УДК 519.6

М.Ю. Ракушев, к.т.н.
Житомирський військовий інститут радіоелектроніки ім. С.П. Корольова

ВИЗНАЧЕННЯ ДВОМІРНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО СПЕКТРА СКЛАДНИХ ФУНКЦІЙ

Наведено рекурентні формули визначення двомірного диференціального спектра складних функцій – ступеневої та тригонометричних.

Вступ. Математичний апарат диференціальних перетворень – це відносно новий операційний метод академіка НАН України Г.Є. Пухова. Використання цього математичного апарату в багатьох науково-технічних задачах під час розгляду різного роду об'єктів (процесів), що описуються нелінійними інтегро-диференціальними рівняннями, призводить до покращення обчислювально-точнісних характеристик проведення моделювання (розрахунків) або взагалі дозволяє отримувати нові наукові результати [3, 5].

Аналіз останніх досліджень. Диференціальні перетворення (як операційний метод) і зараз продовжує активно розвиватися. Причому розширюється не тільки коло задач, до яких застосовується цей математичний апарат, а й вдосконалюються його математичні засади. Так диференціальні перетворення застосовані до випадкових процесів [2, 3], розв'язання нелінійних рівнянь [1], визначення методом варіацій часткових похідних від вихідних за вхідними параметрами [4], розроблені зміщені диференціальні перетворення [3].

Більш розповсюдженими та вивченими є одномірні диференціальні перетворення [2, 3, 5]. Але з погляду повноти реалізації математичного потенціалу методу диференціальних перетворень більш перспективними є багатомірні диференціальні перетворення [1, 4, 5], які, в порівнянні з одномірними, є значно менше розповсюдженими та вивченими.

Застосування математичного апарату диференціальних перетворень (будь-якої мірності) до розв'язання конкретної задачі за умови, що ця задача має відповідні математичні властивості (може бути розв'язана за допомогою цього математичного апарату), вимагає обов'язкового (як і для будь-якого операційного методу) проведення прямого перетворення – переходу з області оригіналів до області зображень. Для диференціальних перетворень такий перехід проводиться за допомогою спеціальних правил: однозначної заміни математичних операцій ($+,\ -,\ *,\ /,\ \partial,\ \int\ \ldots$) та функцій ($\sin,\ \cos,\ \exp\ldots$) в області оригіналів на відповідних їм залежностей в області зображень. Зазначені вище залежності в переважній більшості мають вигляд рекурентних формул відносно дискрет диференціальних спектрів. Зведені таблиці з формулами для переходу з області оригіналів до області диференціальних спектрів наводяться у [3, 5]. Самим простим випадком багатомірних диференціальних перетворень є двомірні диференціальні перетворення, саме такий вид був використаний в [1, 4]. У подальшому будемо розглядати тільки двомірні диференціальні перетворення.

Формулювання цілей статті. Внаслідок недостатньої розповсюдженості багатомірних диференціальних перетворень у літературі, в порівнянні з одномірним випадком, не наведено рекурентних залежностей визначення двомірного диференціального спектра (1) для складних функцій, які часто зустрічаються в практичних задачах [5]. А саме: складної ступеневої функції $\exp[x(w_1, w_2)]$ (2) та складних тригонометричних функцій $\sin[x(w_1, w_2)]$, $\cos[x(w_1, w_2)]$ (3, 4)

$$P_2\{f(w_1, w_2)\} = \frac{H_1^{k_1} H_1^{k_2}}{k_1! k_2!} \left[\frac{\partial^{w_1+w_2} f(w_1, w_2)}{\partial w_1 \partial w_2} \right]_{w_1=0, w_2=0}, \tag{1}$$

$$\underline{\exp}X(k_1, k_2) = P_2\{\exp[x(w_1, w_2)]\}, \tag{2}$$

$$\underline{\sin}X(k_1, k_2) = P_2\{\sin[x(w_1, w_2)]\}, \tag{3}$$

$$\underline{\cos}X(k_1, k_2) = P_2\{\cos[x(w_1, w_2)]\}, \tag{4}$$

де $P_2\{\ \}$ – оператор прямого переходу з області оригіналів до області диференціальних спектрів; $x(w_1, w_2)$ – функція аргументів w_1, w_2; k_1, k_2 – цілочислові аргументи за w_1, w_2 відповідно, $k_{1,2} = \overline{0...N}$; H_1, H_2 – масштабні постійні, які мають розмірність аргументів w_1, w_2 відповідно; $\underline{\exp}X(k_1, k_2)$, $\underline{\sin}X(k_1, k_2)$, $\underline{\cos}X(k_1, k_2)$ – двомірні диференціальні спектри складних функцій.

Виходячи з викладеного вище, *метою статті* є отримання рекурентних формул визначення двомірного диференціального спектра для складних функцій – ступеневої та тригонометричних.

Виклад основного матеріалу. Задача визначення диференціального спектра складної функції вбачає, що відомий диференціальний спектр її аргументу – $x(w_1, w_2)$, тому задамо його у вигляді

$$X(k_1, k_2) = P_2\{x(w_1, w_2)\} \ . \tag{5}$$

Щоб отримати рекурентну залежність для визначення двомірного диференціального спектра для складної ступеневої функції – $\exp[x(w_1, w_2)]$ (2) проведемо диференціювання цієї функції за кожним з аргументів:

$$\frac{\partial^2 \exp[x(w_1, w_2)]}{\partial w_1 \partial w_2} = \left[\frac{\partial^2 x(w_1, w_2)}{\partial w_1 \partial w_2} + \frac{\partial x(w_1, w_2)}{\partial w_1}\frac{\partial x(w_1, w_2)}{\partial w_2}\right]\exp[x(w_1, w_2)]. \tag{6}$$

Використовуючи правила для переходу до області диференціальних спектрів [3, 5], запишемо (6) в області зображень:

$$D^2_{k_1,k_2} \underline{\exp}X(k_1, k_2) = \left[D^2_{k_1,k_2} X(k_1, k_2) + D_{k_1} X(k_1, k_2) * D_{k_2} X(k_1, k_2)\right] * \underline{\exp}X(k_1, k_2), \tag{7}$$

де $*$ позначає операцію згортки, наприклад:

$$S(k_1, k_2) * U(k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{k_1}\sum_{n_2=0}^{k_2}\left[S(n_1, n_2)U(k_1 - n_1, k_2 - n_2)\right];$$

D – операцію диференціювання.

Розпишемо в (7) операцію диференціювання

$$\frac{(k_1+1)(k_2+1)}{H_1H_2}\underline{\exp}X(k_1+1, k_2+1) = \left[\frac{(k_1+1)(k_2+1)}{H_1H_2}X(k_1+1, k_2+1) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{(k_1+1)}{H_1}X(k_1+1, k_2)\right) * \left(\frac{(k_2+1)}{H_2}X(k_1, k_2+1)\right)\right] * \underline{\exp}X(k_1, k_2). \tag{8}$$

Розпишемо в (8) почергово згортки: спочатку внутрішню:

$$\frac{(k_1+1)(k_2+1)}{H_1H_2}\underline{\exp}X(k_1+1, k_2+1) = \left[\frac{(k_1+1)(k_2+1)}{H_1H_2}X(k_1+1, k_2+1) + \right.$$
$$\left. + \sum_{n_1=0}^{k_1}\sum_{n_2=0}^{k_2}\left(\frac{(n_1+1)}{H_1}X(n_1+1, n_2)\frac{(k_2+1-n_2)}{H_2}X(k_1-n_1, k_2+1-n_2)\right)\right] \times \underline{\exp}X(k_1, k_2),$$

а потім зовнішню:

$$\frac{(k_1+1)(k_2+1)}{H_1H_2}\underline{\exp}X(k_1+1, k_2+1) = \sum_{m_1=0}^{k_1}\sum_{m_2=0}^{k_2}\left\{\left[\frac{(m_1+1)(m_2+1)}{H_1H_2}X(m_1+1, m_2+1) + \right.\right.$$
$$\left. + \sum_{n_1=0}^{m_1}\sum_{n_2=0}^{m_2}\left(\frac{(n_1+1)}{H_1}X(n_1+1, n_2)\frac{(m_2+1-n_2)}{H_2}X(m_1-n_1, m_2+1-n_2)\right)\right] \times$$
$$\left. \times \underline{\exp}X(k_1-m_1, k_2-m_2)\right\}. \tag{9}$$

Отримаємо з (9) остаточну рекурентну залежність для визначення двомірного диференціального спектра складної ступеневої функції:

$$\underline{\exp}X(k_1+1, k_2+1) = \sum_{m_1=0}^{k_1}\sum_{m_2=0}^{k_2}\left\{\left[\frac{(m_1+1)(m_2+1)}{(k_1+1)(k_2+1)}X(m_1+1, m_2+1) + \right.\right.$$
$$\left. + \sum_{n_1=0}^{m_1}\sum_{n_2=0}^{m_2}\left(\frac{(n_1+1)(m_2+1-n_2)}{(k_1+1)(k_2+1)}X(n_1+1, n_2)X(m_1-n_1, m_2+1-n_2)\right)\right] \times$$
$$\left. \times \underline{\exp}X(k_1-m_1, k_2-m_2)\right\}. \tag{10}$$

Щоб використовувати залежність (10), необхідно доповнити її співвідношеннями для визначення одномірного диференціального спектра ступеневої функції [3, 5], а саме:

$$\left.\begin{aligned} \underline{\exp}X(0,0) &= \exp[X(0,0)], \\ \underline{\exp}(k_1+1,0) &= \sum_{n_1=0}^{k_1}\left\{\frac{(n_1+1)}{(k_1+1)}X(n_1+1,0)\,\underline{\exp}(k_1-n_1,0)\right\}, \\ \underline{\exp}(0,k_2+1) &= \sum_{n_2=0}^{k_2}\left\{\frac{(n_2+1)}{(k_2+1)}X(0,n_2+1)\,\underline{\exp}(0,k_2-n_2)\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Таким чином, отримана залежність (10) разом з (11) є рекурентною формулою визначення двомірного диференціального спектра складної ступеневої функції, якщо відомо диференціальний спектр її аргументу (5).

Щоб отримати рекурентну залежність з метою визначення двомірного диференціального спектра для складних тригонометричних функцій $\sin[x(w_1,w_2)]$, $\cos[x(w_1,w_2)]$ (3, 4), проведемо заміну в (10) $X(k_1,k_2)$ на $jX(k_1,k_2)$, де $j=\sqrt{-1}$ – уявна одиниця, а $\underline{\exp}jX(k_1,k_2)$ на суму $\underline{\cos}X(k_1,k_2)+j\underline{\sin}X(k_1,k_2)$ [3, 5]:

$$\begin{aligned} &\underline{\cos}X(k_1+1,k_2+1)+j\underline{\sin}X(k_1+1,k_2+1)= \\ &=\sum_{m_1=0}^{k_1}\sum_{m_2=0}^{k_2}\left\{\left[\frac{(m_1+1)(m_2+1)}{(k_1+1)(k_2+1)}jX(m_1+1,m_2+1)+\right.\right. \\ &\left.+\sum_{n_1=0}^{m_1}\sum_{n_2=0}^{m_2}\left(\frac{(n_1+1)(m_2+1-n_2)}{(k_1+1)(k_2+1)}jX(n_1+1,n_2)\,jX(m_1-n_1,m_2+1-n_2)\right)\right]\times \\ &\left.\times\left[\underline{\cos}X(k_1-m_1,k_2-m_2)+j\underline{\sin}X(k_1-m_1,k_2-m_2)\right]\right\}. \end{aligned} \tag{12}$$

Розкриваючи в (12) внутрішні дужки та враховуючи, що $j^2=-1$, отримаємо

$$\begin{aligned} &\underline{\cos}X(k_1+1,k_2+1)+j\underline{\sin}X(k_1+1,k_2+1)=-\sum_{m_1=0}^{k_1}\sum_{m_2=0}^{k_2}\left\{\left[\underline{\cos}X(k_1-m_1,k_2-m_2)\times\right.\right. \\ &\times\sum_{n_1=0}^{m_1}\sum_{n_2=0}^{m_2}\left(\frac{(n_1+1)(m_2+1-n_2)}{(k_1+1)(k_2+1)}X(n_1+1,n_2)\,X(m_1-n_1,m_2+1-n_2)\right)+ \\ &\left.+\underline{\sin}X(k_1-m_1,k_2-m_2)\frac{(m_1+1)(m_2+1)}{(k_1+1)(k_2+1)}X(m_1+1,m_2+1)\right]+ \\ &+j\left[\underline{\cos}X(k_1-m_1,k_2-m_2)\frac{(m_1+1)(m_2+1)}{(k_1+1)(k_2+1)}X(m_1+1,m_2+1)-\right. \\ &\left.\left.-\underline{\sin}X(k_1-m_1,k_2-m_2)\sum_{n_1=0}^{m_1}\sum_{n_2=0}^{m_2}\left(\frac{(n_1+1)(m_2+1-n_2)}{(k_1+1)(k_2+1)}X(n_1+1,n_2)\,X(m_1-n_1,m_2+1-n_2)\right)\right]\right\}\Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{\cos}X\left(k_1+1,k_2+1\right)+j\underline{\sin}X\left(k_1+1,k_2+1\right)=$$
$$=-\sum_{m_1=0}^{k_1}\sum_{m_2=0}^{k_2}\left\{\underline{\cos}X\left(k_1-m_1,k_2-m_2\right)\times\right.$$
$$\times\sum_{n_1=0}^{m_1}\sum_{n_2=0}^{m_2}\left(\frac{\left(n_1+1\right)\left(m_2+1-n_2\right)}{\left(k_1+1\right)\left(k_2+1\right)}X\left(n_1+1,n_2\right)X\left(m_1-n_1,m_2+1-n_2\right)\right)+$$
$$\left.+\underline{\sin}X\left(k_1-m_1,k_2-m_2\right)\frac{\left(m_1+1\right)\left(m_2+1\right)}{\left(k_1+1\right)\left(k_2+1\right)}X\left(m_1+1,m_2+1\right)\right\}+$$
$$+j\sum_{m_1=0}^{k_1}\sum_{m_2=0}^{k_2}\left\{\underline{\cos}X\left(k_1-m_1,k_2-m_2\right)\frac{\left(m_1+1\right)\left(m_2+1\right)}{\left(k_1+1\right)\left(k_2+1\right)}X\left(m_1+1,m_2+1\right)-\right.$$
$$-\underline{\sin}X\left(k_1-m_1,k_2-m_2\right)\times$$
$$\left.\times\sum_{n_1=0}^{m_1}\sum_{n_2=0}^{m_2}\left(\frac{\left(n_1+1\right)\left(m_2+1-n_2\right)}{\left(k_1+1\right)\left(k_2+1\right)}X\left(n_1+1,n_2\right)X\left(m_1-n_1,m_2+1-n_2\right)\right)\right\}.$$

З останнього виразу визначимо остаточні рекурентні залежності для визначення двомірного диференціального спектра складних тригонометричних функції:

$$\underline{\cos}X\left(k_1+1,k_2+1\right)=-\sum_{m_1=0}^{k_1}\sum_{m_2=0}^{k_2}\left\{\underline{\cos}X\left(k_1-m_1,k_2-m_2\right)\times\right.$$
$$\times\sum_{n_1=0}^{m_1}\sum_{n_2=0}^{m_2}\left(\frac{\left(n_1+1\right)\left(m_2+1-n_2\right)}{\left(k_1+1\right)\left(k_2+1\right)}X\left(n_1+1,n_2\right)X\left(m_1-n_1,m_2+1-n_2\right)\right)+$$
$$\left.+\underline{\sin}X\left(k_1-m_1,k_2-m_2\right)\frac{\left(m_1+1\right)\left(m_2+1\right)}{\left(k_1+1\right)\left(k_2+1\right)}X\left(m_1+1,m_2+1\right)\right\}, \quad (13)$$

$$\underline{\sin}X\left(k_1+1,k_2+1\right)=$$
$$=\sum_{m_1=0}^{k_1}\sum_{m_2=0}^{k_2}\left\{\underline{\cos}X\left(k_1-m_1,k_2-m_2\right)\frac{\left(m_1+1\right)\left(m_2+1\right)}{\left(k_1+1\right)\left(k_2+1\right)}X\left(m_1+1,m_2+1\right)-\right.$$
$$-\underline{\sin}X\left(k_1-m_1,k_2-m_2\right)\times$$
$$\left.\times\sum_{n_1=0}^{m_1}\sum_{n_2=0}^{m_2}\left(\frac{\left(n_1+1\right)\left(m_2+1-n_2\right)}{\left(k_1+1\right)\left(k_2+1\right)}X\left(n_1+1,n_2\right)X\left(m_1-n_1,m_2+1-n_2\right)\right)\right\}. \quad (14)$$

Щоб використовувати залежності (13, 14), необхідно доповнити їх співвідношеннями для визначення одномірного диференціального спектра тригонометричних функцій [3, 5], а саме:

$$\left.\begin{aligned}\underline{\sin}X(0,0)&=\sin[X(0,0)],\\ \underline{\cos}X(0,0)&=\cos[X(0,0)],\\ \underline{\sin}(k_1+1,0)&=\sum_{n_1=0}^{k_1}\left\{\frac{(n_1+1)}{(k_1+1)}X(n_1+1,0)\underline{\cos}(k_1-n_1,0)\right\},\\ \underline{\cos}(0,k_2+1)&=\sum_{n_2=0}^{k_2}\left\{\frac{(n_2+1)}{(k_2+1)}X(0,n_2+1)\underline{\sin}(0,k_2-n_2)\right\}.\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Таким чином, отримані залежності (13, 14) разом з (15) є рекурентною формулою визначення двомірних диференціальних спектрів складних тригонометричних функцій, якщо відомо диференціальний спектр її аргументу (5).

Висновки. В статті отримано рекурентні формули для визначення двомірного диференціального спектра складних функцій – ступеневої (10, 11) та тригонометричних (13–15). Отримані залежності можуть бути використані під час розв'язання практичних задач математичним апаратом двомірних диференціальних перетворень, якщо математична модель цієї задачі включає такі функції.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Баранов В.Л.* Многомерная дифференциально-тейлоровская модель систем конечных уравнений// Электронное моделирование. – 1999. – Том 21. – № 6. – С. 10–20.
2. *Баранов В.Л.* Применение дифференциальных преобразований для моделирования случайных процессов в метрологических исследованиях // Український метрологічний журнал. – 2002. – Вип. 1. – С. 5–10.
3. *Баранов Г.Л., Баранов В.Л., Жуков І.А., Алексєєва Л.О.* Диференціальні перетворення для комп'ютерного моделювання: Навчальний посібник. – К.: Національний авіаційний університет, 2002. – 106 с.
4. *Ковбасюк С.В., Ракушев М.Ю.* Расчет частных производных от текущих элементов орбиты по начальным условиям на основе многомерных дифференциальных преобразований // Двойные технологии. – 2004. – № 2. – С. 15–18.
5. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов. – К.: Наукова думка, 1986. – 159 с.

РАКУШЕВ Михайло Юрійович – кандидат технічних наук, провідний науковий співробітник науково-дослідного відділу науково-дослідного управління Житомирського військового інституту радіоелектроніки ім. С.П. Корольова.

Наукові інтереси:

– математичне моделювання та диференціальні перетворення.

Подано 19.06.2006