ПРИЛАДИ. РАДІОТЕХНІКА ТА ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЇ

УДК 621.317

О.М. Безвесільна, д.т.н., проф.
І.В. Коробійчук, аспір.
Житомирський державний технологічний університет

ДИНАМІЧНІ ПОХИБКИ ДИНАМІЧНО НАСТРОЮВАНОГО ГРАВІМЕТРА

Отримано математичну модель динамічної похибки динамічно настроюваного гравіметра авіаційної гравіметричної системи, що дозволяє розраховувати та аналізувати динамічні похибки гравіметра.

Постановка проблеми. Гравіметр як основний чутливий елемент авіаційної гравіметричної системи (АГС) повинен мати високі метрологічні характеристики: точність, чутливість, швидкодію, надійність [6]. Рівень цих вимог постійно зростає, що спонукає до проведення пошукових робіт зі створення гравіметрів нових типів.

Аналіз досліджень. Огляд літератури та практичних робіт з авіаційної гравіметрії [2], [3] показав, що основні відомі гравіметри АГС (струнний типу ГС, кварцовий типу ГАЛС) мають такі основні недоліки: недостатні точність (0,8 мГл) та швидкодію – потребують наземної обробки вимірювальної інформації протягом місяців часу. Одним з найбільш перспективних вважається [1] динамічно настроюваний гравіметр (ДГ), побудований на основі динамічно настроюваного гіроскопа шляхом його нескладної модифікації. Однак в літературі немає відомостей щодо математичної моделі ДГ та аналізу динамічних похибок гравіметра [5]–[7].

Метою роботи є розробка математичної моделі динамічної похибки динамічно настоюваного гравіметра для роботи в складі АГС.

Основна частина. Скористаємось апробованими методиками дослідження подібних систем [4 та ін.] і знайдемо розв’язок диференціального рівняння руху ДГ [1] без обліку складових більш високого порядку малості, яке запишеться у вигляді:

$$\begin{aligned}&\ddot{\alpha} + 2h\dot{\alpha} + w_0^2\alpha = Ag(t)\cos\alpha + A\left[(W'_{AX}\sin\dot{\gamma}t - W'_{AY}\cos\dot{\gamma}t)\sin\alpha + W'_{AZ}\cos\alpha\right] + \\ &+B\left[w_{xo}\sin\dot{\gamma}t - w_{yo}\cos\dot{\gamma}t\right] - I_x(\dot{w}_{xo}\cos\dot{\gamma}t + \dot{w}_{yo}\sin\dot{\gamma}t) - Cw_{zo}\sin 2\alpha\end{aligned}, \tag{1}$$

де позначимо:

$$A = -\frac{ml}{I},\ B = \frac{I_x - I_y + I_z}{I}\dot{\gamma},\ C = \frac{(I_z - I_y)}{I}\dot{\gamma}.$$

Розв'язання рівняння (1) будемо знаходити методом послідовних наближень [4 та ін.]. Для цього представимо кутову швидкість, лінійне прискорення основи і вимірюваний кут α у вигляді:

$$\begin{aligned}&W'_{AX} = W_{1x} + W_{2x},\ w_{xo} = w_{1x} + w_{2x},\ g = g_0 + g_1 + g_2,\\ &W'_{AY} = W_{1y} + W_{2y},\ w_{yo} = w_{1y} + w_{2y},\ \alpha = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2,\\ &W'_{AZ} = W_{1z} + W_{2z},\ w_{zo} = w_{1z} + w_{2z},\end{aligned} \tag{2}$$

де величини з індексом 1 мають перший, а з індексом 2 – другий порядок малості. Середнє значення вимірюваного прискорення і відповідне йому відхилення ротора позначено g_0 і α_0. Окрім того, зробимо розкладання тригонометричних функцій кута α в околах значення α_0, обмеживши їх величинами не вище другого порядку малості:

$$\begin{aligned}&\sin\alpha = \sin\alpha_0 + \alpha_1\cos\alpha_0 - \frac{\alpha_1^2}{2}\sin\alpha_0 + \alpha_2\cos\alpha_0,\\ &\sin\alpha = \sin\alpha_0 + \alpha_1\cos\alpha_0 - \frac{\alpha_1^2}{2}\sin\alpha_0 + \alpha_2\cos\alpha_0,\\ &\sin 2\alpha = \frac{1}{2}\left(\sin 2\alpha_0 + 2\alpha_1\cos 2\alpha_0 - 2\alpha_1^2\sin 2\alpha_0 + 2\alpha_2\cos 2\alpha_0\right).\end{aligned} \tag{3}$$

Підставивши вирази (2) і (3) у (1) і обмеживши їх величинами першого порядку малості, одержимо рівняння першого наближення:

$$\begin{aligned}&\ddot{\alpha}_1 + 2h\dot{\alpha}_1 + w_0^2\alpha_1 = A'(g_1 + W_{1z}) + A''(W_{1x}\sin\dot{\gamma}t - W_{1y}\cos\dot{\gamma}t) + \\ &+ B\left[w_{1x}\sin\dot{\gamma}t - w_{1y}\cos\dot{\gamma}t\right] - I_x(\dot{w}_{1x}\cos\dot{\gamma}t + \dot{w}_{1y}\sin\dot{\gamma}t) - C'w_{1z}\end{aligned}, \tag{4}$$

де позначимо:

$$A' = A\cos\alpha_0,$$

 © О.М. Безвесільна, І.В. Коробійчук, 2006

$$A'' = A \sin\alpha_0 ,$$

$$C' = \frac{1}{2} C \sin 2\alpha_0 .$$

У рівнянні другого наближення залишимо тільки величини другого порядку малості:

$$\begin{aligned} &\ddot{\alpha}_2 + 2h\dot{\alpha}_2 + w_0^2\alpha_2 = A''(g_1 + W_{1z})\alpha_1 + A'(g_2 + W_{2z}) + \\ &+ A'(W_{1x}\sin\dot{\gamma}t - W_{1y}\cos\dot{\gamma}t)\alpha_1 + A'(W_{2x}\sin\dot{\gamma}t - W_{2y}\cos\dot{\gamma}t) + \\ &+ B\left[w_{2x}\sin\gamma - w_{2y}\cos\gamma\right] - I_x(\dot{w}_{2x}\cos\dot{\gamma}t + \dot{w}_{2y}\sin\dot{\gamma}t) + \\ &+ C'w_{1z}\alpha_1 + C'w_{2z} \end{aligned} , \quad (5)$$

де $C' = C\cos 2\alpha_0$.

Для визначеності приймемо гармонічний закон зміни кутових швидкостей і лінійних прискорень, тобто:

$$\begin{aligned} &g_1 = C\sin w_1 t , \; w_{1x} = \Omega_x \sin(w_z t + \delta_x) , \\ &W_{1x} = X\sin(w_1 t + \delta_1) , \; w_{1y} = \Omega_y \sin(w_z t + \delta_y) , \\ &W_{1y} = Y\sin(w_1 t + \delta_2) , \; w_{1z} = \Omega_z \sin(w_z t + \delta_z) , \\ &W_{1z} = Z\sin(w_1 t + \delta_3) , \; \dot{w}_{1x} = \Omega_x w_z \cos(w_1 t + \delta_x) , \\ &\dot{w}_{1y} = \Omega_y w_z \cos(w_1 t + \delta_y) , \; \dot{w}_{1z} = \Omega_x w_z \cos(w_1 t + \delta_z) , \end{aligned} \quad (6)$$

де G, X, Y, Z – амплітуди лінійних прискорень основи по відповідних осях,

δ_1, δ_2, δ_3 – зсуви фаз лінійних прискорень,

Ω_x, Ω_y, Ω_z – амплітуди кутових швидкостей основи по відповідних осях,

δ_x, δ_y, δ_z – зсуви фаз складових кутових швидкостей,

w_1, w_2 – частоти зміни лінійних прискорень і кутових швидкостей відповідно.

Після підстановки (6) у (5), нескладних перетворень і відкидання членів більш високого порядку малості, рівняння першого наближення прийме вигляд:

$$\begin{aligned} &\ddot{\alpha}_1 + 2h\dot{\alpha}_1 + w_0^2\alpha_1 = A'\left[C\sin w_1 t + Z\sin(w_1 t + \delta_3)\right] - \\ &- \frac{A''}{2} X\left\{\cos\left[(w_1 + \dot{\gamma})t + \delta_1\right] - \cos\left[(w_1 - \dot{\gamma})t + \delta_1\right]\right\} - \\ &- \frac{A''}{2} Y\left\{\sin\left[(w_1 + \dot{\gamma})t + \delta_2\right] + \sin\left[(w_1 - \dot{\gamma})t + \delta_2\right]\right\} - \\ &- \frac{B}{2}\Omega_x\left\{\cos\left[(w_2 + \dot{\gamma})t + \delta_x\right] - \cos\left[(w_2 - \dot{\gamma})t + \delta_x\right]\right\} - \\ &- \frac{B}{2}\Omega_y\left\{\sin\left[(w_2 + \dot{\gamma})t + \delta_y\right] + \sin\left[(w_2 - \dot{\gamma})t + \delta_y\right]\right\} - \\ &- C'\Omega_z \sin(w_2 t + \delta_z). \end{aligned} \quad (7)$$

Загальний розв'язок цього рівняння, як відомо, можна представити у вигляді суми загального розв'язку однорідного рівняння і частного рішення α' неоднорідного рівняння:

$$\alpha_{общ} = ce^{-ht}\sin\left(\sqrt{w_0^2 - h^2 t} + \varepsilon\right) + \alpha' . \quad (8)$$

Зі збільшенням часу t перший доданок (8) прагне до нуля, тобто він описує загасаючий у часі коливальний процес відносно нульового положення. Насправді в подібних системах коливання відбуваються відносно деякого середнього положення, що визначається наявністю постійної величини в частинному розв'язку α'. Тобто ротор гравіметра відхилиться додатково на деякий кут $\Delta\alpha$ і прилад покаже прискорення $g + \Delta g$, де Δg визначить динамічну похибку гравіметра.

Частинний розв'язок α_1, відповідний правій частини рівняння першого наближення (7), представимо у вигляді:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = \frac{A'}{D_1}\left[C\sin(w_1 t - \varepsilon_1) + Z\sin(w_1 t + \delta_\varepsilon - \varepsilon_1)\right] - \\ &- \frac{A''}{2D_1} X\left\{\cos\left[(w_1 + \dot{\gamma})t + \delta_1 - \varepsilon_1\right] - \cos\left[(w_1 - \dot{\gamma})t + \delta_1 - \varepsilon_1\right]\right\} - \end{aligned}$$

$$-\frac{A''}{2D_1}Y\{\sin[(w_1+\dot\gamma)t+\delta_2-\varepsilon_1]+\sin[(w_1-\dot\gamma)t+\delta_2-\varepsilon_1]\}-$$
$$-\frac{B}{2D_1}\Omega_x\{\cos[(w_2+\dot\gamma)t+\delta_x-\varepsilon_2]-\cos[(w_2-\dot\gamma)t+\delta_x-\varepsilon_2]\}- \qquad (9)$$
$$-\frac{B}{2D_1}\Omega_y\{\sin[(w_2+\dot\gamma)t+\delta_y-\varepsilon_2]+\sin[(w_2-\dot\gamma)t+\delta_y-\varepsilon_2]\}-$$
$$-\frac{C'}{D_z}\Omega_z\sin(wt+\delta_2-\varepsilon_2),$$

де $D_i=\sqrt{(w_0^2-w_i^2)^2+4h^2w_i^2}$, $(i=1,2)$,

$$\varepsilon_i=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{2hw_i}{w_0^2-w_i^2}, \text{при } w_0>w,\\ \pi+\operatorname{arctg}\dfrac{2hw_i}{w_0^2-w_i^2}, \text{ при } w_0<w,\end{cases} \qquad (10)$$

Очевидно, що в першому наближенні, на гармонічні рухи основи гравіметр реагує коливаннями біля нульового положення. Постійна складова може з'явиться лише при рівності частот w_1 і w_2, частоті обертання ротора $\dot\gamma$, тобто $w_1=w_2=\dot\gamma$. Величина її визначиться виразом:

$$\Delta\alpha_1=\frac{A''}{2D}\{X\cos[\delta_1-\varepsilon]-Y\cos[\delta_2-\varepsilon]\}+$$
$$+\frac{B}{2D}\{\Omega_x\cos[\delta_x-\varepsilon]-\Omega_y\cos[\delta_y-\varepsilon]\}, \qquad (11)$$

де D і ε визначаються виразами (10), у яких w_i замінено на $\dot\gamma$.

У найбільш несприятливому випадку, тобто при $\delta_1=\delta_x=\varepsilon$, $\delta_2-\varepsilon=\delta_x-\varepsilon=n\frac{\pi}{2}$, $(n=1,2\dots)$ максимальне відхилення буде:

$$\Delta\alpha_1^m=\frac{A''}{2D}\{X-Y\}+\frac{B}{2D}\{\Omega_x-\Omega_y\}. \qquad (12)$$

Таким чином, ротор відхилиться на кут $\alpha+\Delta\alpha_1$ і замість вимірюваного прискорення g гравіметр покаже прискорення $g+\Delta g$. У сталому режимі $\alpha=-\frac{ml}{k}g$, тому $\alpha+\Delta\alpha_1=-\frac{ml}{k}(g+\Delta g)$, звідки удаване збільшення прискорення Δg з врахуванням (12) складе

$$\Delta g=\frac{k}{2Dml}\left[A''(X-Y)+B(\Omega_x-\Omega_y)\right].$$

Перейдемо до розв'язку рівняння (5) другого наближення. Після підстановки виразів (6) і (9) у (5) рівняння другого наближення запишемо у вигляді:

$$\ddot\alpha_2+2h\dot\alpha_2+w_0^2\alpha_2=A''\left[C\sin w_1t+Z\sin(w_1t+\delta_3)\right]\alpha_1+$$
$$+A'\left[X\sin(w_1t+\delta_1)\sin\dot\gamma t-Y\sin(w_1t+\delta_2)\cos\dot\gamma t\right]\alpha_1- \qquad (13)$$
$$-C''\Omega_2\alpha_1\sin(w_2t+\delta_z).$$

Для скорочення запису в правій частині рівняння (13) запишемо тільки ті члени, що дадуть постійні доданки. Для визначення скористаємося методом осереднення [4], відповідно до якого

$$<x>=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x\,dt,$$

де позначено $<x>$ – середнє за часом значення перемінної x.

Постійні складові з'являться у правій частині (13) після перемножування на α_1, в наступних сполученнях:

$$<C^2\sin(w_1t)\sin(w_1t-\varepsilon_1)>=-\frac{1}{2}C^2\lim_{T\to\infty}\int_0\sin(w_1t)\sin(w_1t-\varepsilon_1)dt=-\frac{1}{2}C^2\cos\varepsilon_1,$$

$$<CZ\left[\sin(w_1t)\sin(w_1t+\delta_3-\varepsilon_1)+\sin(w_1t+\delta_3)\sin(w_1t-\varepsilon_1)\right]>=$$
$$=-\frac{1}{2}CZ\left[\cos(\varepsilon_1-\delta_3)+\cos(\varepsilon_1+\delta_3)\right],$$

$$< Z^2 \sin(w_1 t + \delta_3)\sin(w_1 t + \delta_3 - \varepsilon_1) >= -\frac{1}{2} Z^2 \cos\varepsilon_1 ,$$

$$< X^2 \sin(w_1 t + \delta_1)\sin(\dot{\gamma} t)\cos\left[(w_1 + \dot{\gamma})t + \delta_1 - \varepsilon_1\right] >= \frac{1}{4} X^2 \cos\varepsilon_1 ,$$

$$< XY \sin(w_1 t + \delta_1)\sin(\dot{\gamma} t)\sin\left[(w_1 + \dot{\gamma})t + \delta_2 - \varepsilon_1\right] >= -\frac{1}{4} XY \sin(\varepsilon_1 + \delta_1 - \delta_2) ,$$

$$< XY \sin(w_1 t + \delta_1)\cos(\dot{\gamma} t)\sin\left[(w_1 + \dot{\gamma})t + \delta_1 - \varepsilon_1\right] >= -\frac{1}{4} XY \sin(\varepsilon_1 - \delta_1 - \delta_2) ,$$

$$< X^2 \sin(w_1 t + \delta_1)\sin(\dot{\gamma} t)\cos\left[(w_1 - \dot{\gamma})t + \delta_1 - \varepsilon_1\right] >= \frac{1}{4} X^2 \cos\varepsilon_1 ,$$

$$< \Omega_z^2 \sin(w_2 t + \delta_2)\sin(wt + \delta_2 - \varepsilon_2) >= -\frac{1}{2}\cos\varepsilon_2 . \qquad (14)$$

Знайдені постійні доданки визначать у сталому режимі додаткове відхилення ротора $\Delta\alpha_2$. Позначивши їхню суму через L у відповідності до (13), можна записати:

$$w_0^2 \Delta\alpha_2 = L \text{ чи } \Delta\alpha_2 = \frac{L}{w_0^2} . \qquad (15)$$

У розгорнутому вигляді з використанням виразів (14) після групування членів одержимо:

$$\Delta\alpha_2 = -\frac{A'A''}{w_0^2 D_1}\Big\{\left(C^2 + Z^2\right)\cos\varepsilon_1 + CZ\left[\cos(\varepsilon_1 - \delta_3) + \cos(\varepsilon + \delta_3)\right] +$$
$$+\left(X^2 + Y^2\right)\cos\varepsilon_1 + XY\left[\sin(\varepsilon_1 + \delta_1 - \delta_2) + \sin(\varepsilon_1 - \delta_1 + \delta_2)\right]\Big\} + \qquad (16)$$
$$+\frac{C'C''}{w_0^2 D_1}\Omega_z^2 \cos\varepsilon_2 .$$

У випадку збігу частот збурювань w_1 і w_2 рівняння (16) ускладнюється. У ньому з'являються додаткові доданки, що містять добуток амплітуд – кутових швидкостей і лінійних прискорень:

$$-\frac{A''B}{4w_0^2 D}\left[X\Omega_x \cos(\delta_x - \delta_1 + \varepsilon) + Y\Omega_y \cos(\delta_y - \delta_2 + \varepsilon)\right] -$$
$$-\frac{A'C''}{2w_0^2 D_1}\Omega_z\left[C\cos(\delta_z + \varepsilon) + Z\cos(\delta_z - \delta_3 + \varepsilon)\right]. \qquad (17)$$

Таким чином, додаткове відхилення ротора викликається дією як кутових швидкостей, так і лінійних прискорень і їх спільною дією. Крім того, при рівності частот збурювань w_1 і w_2 частоті обертання ротора $\dot{\gamma}$, аналогічно, як в першому наближенні, так і в другому, з'являються постійні доданки.

Отриманий вираз (16), з врахуванням (17), визначає систематичну динамічну похибку гравіметра, що дозволяє зробити оцінку та аналіз похибок при дії лінійних прискорень, кутових швидкостей і при їх спільному впливі на динамічно настоюваний гравіметр.

Висновок. У даній роботі отримано основний результат, що є новим: отримано математичну модель динамічної похибки нового динамічно настоюваного гравіметра [1] авіаційної гравіметричної системи, що дозволить наступним дослідникам розрахувати та проаналізувати динамічні похибки гравіметра, що виникають у разі дії поступальних, кутових та сумісної дії поступальних і кутових віброприскорень.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Безвесільна О.М., Нечай С.О.* Гравіметр: Деклараційний патент на винахід № 53478А, 7G01V7/00 Заявка № 2002064813 на винахід. – 2002. Опубл. 15.01.2003. Бюл. № 1.
2. *Безвесільна О.М.* Вимірювання прискорень: Підручник. – Київ: Либідь, 2002, – 350 с.
3. *Безвесільна О.М.* Вимірювання гравітаційних прискорень: Підручник. – Житомир: РВВ ЖІТІ, 2002. – 264 с.
4. *Одинцов А.А.* Теория и расчет гироскопических приборов. – К.: Вища школа, 1985. –392 с.
5. *Шокин П.Ф.* Гравиметрия. – М.: Геодезиздат, 1960. – 316 с.
6. *Юзефович А.Г.* Гравиметрия. – М.: Недра, 1980. – 319 с.
7. *Безвесільна О.М.* Автоматизація аерогравіметричних систем // Вісник ЖДТУ № 11 (33). – Житомир, 2005. – С. 34–37.

БЕЗВЕСІЛЬНА Олена Миколаївна – Заслужений діяч науки і техніки України, доктор технічних наук, професор кафедри приладобудування Національного технічного університету України „КПІ”.

Наукові інтереси:

- гравіметричні системи;
- навігаційні системи;
- вимірювальні перетворювачі;
- інформаційні системи.

КОРОБІЙЧУК Ігор Вацлавович – аспірант кафедри автоматизованих і комп’ютерних технологій Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:

- гравіметрія.

Подано 16.01.2006

УДК 621.317
Динамические ошибки динамически настраиваемого гравиметра / Е.Н. Безвесильна, И.В. Коробийчук

В работе разработана математическая модель динамической погрешности динамически настраиваемого гравиметра для работы в составе авиационной гравиметрической системы.

УДК 621.317
Dynamic inaccuracy dynamically adjusted gravimeter / O.M. Bezvesilnaja, I.V. Korobiychuk

In work the mathematical model of a dynamic inaccuracy dynamically adjusted gravimeter for work is developed in structure of aircraft gravimetric system.