ПРИЛАДИ. РАДІОТЕХНІКА ТА ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЇ

УДК 621.372.061

В.Л. Баранов, д.т.н., проф.
С.В. Водоп'ян, к.т.н.
Р.М. Костюченко, викл.
Житомирський військовий інститут радіоелектроніки ім. С.П. Корольова

ЗМІЩЕНІ СИСТЕМОАНАЛОГОВІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКУ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Запропоновано систему одновимірних зміщених диференціальних перетворень. Ця система є аналогом багатомірних диференціальних перетворень і призначена для зниження обчислювальної складності розв'язку крайових задач. Запропоновані приклади застосування зміщених системоаналогових диференціальних перетворень для моделювання фізичних процесів.

Постановка проблеми. Моделювання фізичних процесів на основі чисельних методів розв'язку рівнянь в частинних похідних з початковими і граничними умовами вимагає виконання значного об'єму обчислень на ЕОМ. В задачах управління об'єктами з розподіленими параметрами і прогнозування змін нестаціонарних фізичних процесів необхідно реалізувати моделювання фізичних процесів в реальному і прискореному часі. Розв'язок задач вказаного класу вимагає розробки методів моделювання фізичних процесів, що дозволяють виконувати необхідний об'єм обчислень на ЕОМ за заданий інтервал часу. Ці вимоги значною мірою задовольняють аналітичні та чисельно-аналітичні методи розв'язку крайових задач, основані на інтегральних і диференціальних перетвореннях. [1]–[5].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Аналіз останніх досліджень і публікацій показав, що відомі аналітичні та чисельно-аналітичні методи розв'язку крайових задач мають ряд недоліків.

Застосування інтегральних перетворень можливе для вузького класу задач, що описуються рівняннями в частинних похідних [6]–[8]. Багатовимірні диференціальні перетворення, запропоновані в [1]–[4], розширюють клас задач, які можна розв'язати, на нелінійні задачі, але є громіздкими в обчислювальному відношенні при моделюванні багатовимірних фізичних процесів.

Мета статті. Метою статті є зниження обчислювальної складності розв'язку нелінійних крайових задач на основі зміщених системоаналогових диференціальних перетворень. Розглянемо фізичний процес в області багатовимірного простору, обмеженого умовами:

$$0 \le |x_1| \le H_1 \le \infty, \quad 0 \le |x_2| \le H_2 \le \infty, \dots, \; 0 \le |x_n| \le H_n \le \infty, \tag{1}$$

де $H_1, H_2, \dots H_n$ – задані додатні сталі.

Зміщеними системоаналоговими диференціальними перетвореннями назвемо систему одновимірних перетворень функції багатьох змінних $u(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = u(x)$ вигляду:

$$\begin{aligned}
&U_{1v}(k_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \frac{H_1^{k_1}}{k_1!}\left(\frac{\partial^{k_1} u(x)}{\partial x_1^{k_1}}\right)_{x_1 = x_{1v}},\\
&U_{2v}(x_1, k_2, x_3, \dots, x_n) = \frac{H_2^{k_2}}{k_2!}\left(\frac{\partial^{k_2} u(x)}{\partial x_2^{k_2}}\right)_{x_2 = x_{2v}},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots ,\\
&U_{nv}(x_1, x_2, x_3, \dots, k_n) = \frac{H_n^{k_n}}{k_n!}\left(\frac{\partial^{k_n} u(x)}{\partial x_n^{k_n}}\right)_{x_n = x_{nv}},
\end{aligned} \tag{2}$$

де $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ – координати фіксованої точки в межах області (1); $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ – цілочисельні аргументи, що набувають значення $0, 1, 2, 3, \dots, \infty$; $U_{1v}, U_{2v}, \dots, U_{nv}$ – диференціальні зображення функції $u(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, які будемо називати зміщеними диференціальними спектрами, а значення їх при фіксованих значеннях цілочисельних аргументів – дискетами відповідних диференціальних спектрів.

Перетворення (2) називають прямими диференціальними перетвореннями, які представляють функцію багатьох змінних $u(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ в області зображень у вигляді системи диференціальних спектрів $U_{1v}(k_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, $U_{2v}(x_1, k_2, x_3, \dots, x_n)$, …, $U_{nv}(x_1, x_2, x_3, \dots, k_n)$, у фіксованій точці $x_v = (x_{1v}, x_{2v}, x_{3v}, \dots, x_{nv})$.

Обернений перехід з області зображень в область оригіналів здійснюється оберненими диференціальними перетвореннями вигляду:

$$u(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \left(\frac{x_1 - x_{1v}}{H_1}\right)^{k_1} U_{1v}(k_1, x_2, x_3, \dots, x_n), \tag{3}$$

$$u(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = \sum_{k_2=0}^{\infty} \left(\frac{x_2 - x_{2v}}{H_2}\right)^{k_2} U_{2v}(x_1, k_{2v}, x_3, \ldots, x_n),$$

………,

$$u(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = \sum_{k_2=0}^{\infty} \left(\frac{x_n - x_{nv}}{H_n}\right)^{k_n} U_{nv}(x_1, x_2, x_3, \ldots, k_n).$$

Обернені перетворення (3) дають способи відновлення функції багатьох змінних $u(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ за одним диференціальним спектром із системи диференціальних спектрів $U_{1v}, U_{2v}, \ldots, U_{nv}$.

Якщо задачу моделювання фізичного процесу вдасться розв'язати в області зображень (2) на основі одного із диференціальних спектрів $U_{1v}, U_{2v}, \ldots, U_{nv}$, то математичний опис фізичного процесу у вигляді функції багатьох змінних $u(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ відновлюється за вибраним диференціальним спектром, що відповідає оберненому перетворенню (2).

Зміщені системоаналогові диференціальні перетворення (2), (3) є узагальненням одновимірних диференціальних перетворень, запропонованих в [1]–[4]. Всі основні властивості одновимірних диференціальних перетворень, встановлені в [1]–[4], зберігаються для перетворень виду (2), (3).

У випадку застосування диференціальних перетворень (2) по змінній x_i виконуються наступні залежності:

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) \pm v(x_1, x_2, \ldots, x_n) \Leftrightarrow U_{iv}(k_1, \ldots, k_i, \ldots, x_n) \pm \pm V_{iv}(k_1, \ldots, k_i, \ldots, x_n), \quad (4)$$

$$c\, u(x_1, x_2, \ldots, x_n) \Leftrightarrow c\, U_{iv}(k_1, x_2, \ldots, k_i, \ldots, x_n), \quad (5)$$

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot v(x_1, x_2, \ldots, x_n) \Leftrightarrow U_{iv}(x_1, \ldots, k_i, \ldots, x_n) * * V_{iv}(x_1, \ldots, k_i, \ldots, x_n), \quad (6)$$

$$\frac{\partial^m u(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_i^m}, \; D_i^m U(x_1, \ldots, k_i, \ldots, x_n), \quad (7)$$

$$U_{iv}(x_1, \ldots, k_i, \ldots, x_n) * V_{iv}(x_1, \ldots, k_i, \ldots, x_n) = = \sum_{l=0}^{l=k_i} U_{iv}(x_1, \ldots, k_i - l, \ldots, x_n) \cdot V_{iv}(x_1, \ldots, l, \ldots, x_n), \quad (8)$$

$$D_i^m U_{iv}(x_1, \ldots, k_i, \ldots, x_n) = \frac{(ki + m)!}{k_i!\, H_i^m} U_{iv}(x_1, \ldots, k_i + m, \ldots, x_n). \quad (9)$$

У виразах (4)–(9) стрілкою позначено перехід із області оригіналів в область зображень, символ * відповідає операції множення в області зображень. Вираз (4) описує виконання операцій додавання і віднімання в області оригіналів та в області зображень. Операція множення на довільну сталу С виконується в області зображень згідно з виразом (5). Операція множення двох функцій багатьох змінних, позначена в області зображень (6) символом *, реалізується на основі звичайних операцій множення та алгебраїчного додавання згідно з формулою (8). Частинну похідну m-го порядку функції багатьох змінних $u(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ по змінній x_i позначено оператором D_i^m, дія якого згідно з виразом (9) призводить до зміщення диференціального спектра $U_{iv}(x_1, \ldots, k_i, \ldots, x_n)$ на m дискрет $U_{iv}(x_1, \ldots, k_i + m, \ldots, x_n)$ і множення його на константу $\frac{(k_i + m)!}{k_i!\, H_i^m}$.

Розглянемо методику застосування зміщених системоаналогових диференціальних перетворень для розв'язку крайових задач.

Математична модель крайової задачі складається з диференціального рівняння в частинних похідних з n незалежними змінними:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \ldots, \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}) = 0 \quad (10)$$

і граничних (крайових) умов.

Обмежимось розглядом трьох основних видів граничних умов і відповідних до них задач:

умови Діріхле: $u(x)\big|_{x \in \Gamma_v} = \psi(x)$, (11)

умови Неймана: $\frac{du(x)}{d\bar{n}}\Big|_{x \in \Gamma_v} = \psi(x)$, змішані умови: $\left|\frac{du(x)}{d\bar{n}} + \beta u\right|_{x \in \Gamma} = \psi(x)$,

де Γ_v – границя області V; u і β – неперервні функції, визначені на граничній поверхні Γ_v,; $\frac{du}{d\bar{n}}$ – похідна, взята в точці поверхні Γ_v в напрямку нормалі $\bar{n}$ до неї.

З широкого класу крайових задач (10), (11) виділимо нелінійні задачі з граничними умовами (11) виду:

$$\frac{\partial^m u}{\partial x_n^m} = \varphi(x_1, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1} ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, ..., \frac{\partial^{m-1} u}{\partial x_n^{m-1}}). \tag{12}$$

Переведемо рівняння (12) в область зображень зміщеними системоаналоговими диференціальними перетвореннями (2) з урахуванням співвідношень (4)–(9). В результаті в області зображень отримаємо систему аналогів (системоаналог) фізичного процесу, що описується рівнянням (12)

$$U_{iv}(x_1, ..., k_1 + m, ..., x_n) = \frac{k_i! H_i^m}{(k_i + m)!} \Phi[x_1, ..., k_i, ..., x_n, U_{iv}(x_1, ..., k_i, ... x_n),$$
$$\frac{\partial U_{iv}(x_1, ..., k_i, ... x_n)}{\partial x_1}, ..., \frac{k_i + 1}{H_i} U_{iv}(x_1, ..., k_i, ..., x_n), ..., \tag{13}$$
$$\frac{d^{m-1} U_{iv}(x_1, \ldots, k_i, \ldots, x_n)}{dx_n^{m-1}}],$$

де Φ – зображення функції φ.

Вираз (13) рекурентного типу дозволяє визначити дискрети диференціального спектра при $k_i \geq m$, якщо задані початкові дискрети U_{iv} при $k_i = 0, 1, 2, ..., m - 1$. В крайових задачах з граничними умовами виду (11) задані не всі початкові дискрети диференціального спектра U_{iv} при $k_i = 0, 1, 2, ..., m - 1$. У такому випадку рекомендується задавати невідомі дискрети диференціального спектра U_{iv} у вигляді ряду з вільними параметрами або у формі символьного позначення невідомих дискрет диференціального спектра.

Наступний етап розв'язку крайової задачі (11), (12) полягає у визначенні диференціального спектра $U_{iv}(x_1, ..., k_i, ..., x_n)$ за рекурентним виразом (13), послідовно надаючи аргументу k_i цілочисельні значення $k_i = 0, 1, 2, ...$. У загальному випадку вираз (13) дозволяє скласти систему рівнянь, яка визначає зв'язок між різними дискретами диференціального спектра $U_{iv}(x_1, ..., k_i, ..., x_n)$. До цієї системи слід додати добавити граничні умови (11), які також переводяться в область зображень зміщеними системоаналоговими диференціальними перетвореннями (2). У загальному випадку розв'язок отриманої системи кінцевих рівнянь вимагає застосування чисельних методів. Але в багатьох практичних застосуваннях дискрети диференціального спектра $U_{iv}(x_1, ..., k_i, ..., x_n)$ вдається визначити в аналітичному вигляді. Після визначення диференціального спектра $U_{iv}(x_1, ..., k_i, ..., x_n)$ в аналітичному або в чисельно-аналітичному вигляді виконують обернені перетворення за одним із виразів (3).

Викладена методика розв'язку крайових задач на основі зміщених системоаналогових диференціальних перетворень (2), (3) носить загальний характер.

В процесі розв'язку практичних задач слід взяти до уваги, що крайова задача може бути розв'язана в області зображень на основі побудови одного диференціального спектра $U_{iv}(x_1, ..., k_i, ..., x_n)$ і немає необхідності в побудові всієї системи диференціальних спектрів за системоаналогом (13). У багатьох випадках граничні умови (11) доцільно врахувати в області оригіналів, використовуючи відомі зв'язки диференціальних спектрів з оригіналами функцій [1]–[4]. Наприклад, врахування крайових умов (11) можна реалізувати на основі наступних співвідношень:

$$u(x_1, ..., x_i, = x_{iv}, ..., x_n) = U_{iv}(x_1, ..., 0, ..., x_n), \tag{14}$$

$$\left.\frac{d^m u}{dx_i^m}\right|_{x_i = x_{iv} + H_i} = \frac{1}{H_i^m} \sum_{k_i=0}^{\infty} \frac{(k_i + m)!}{k_i!} U_{iv}(x_1, ..., k_i + m, ..., x_n), \tag{15}$$

$$\left.\frac{d^m u}{dx_i^m}\right|_{x_i = x_{iv} - H_i} = \frac{1}{H_i^m} \sum_{k_i=0}^{\infty} (-1)^{k_i} \frac{(k_i + m)!}{k_i!} U_{iv}(x_1, ..., k_i + m, ..., x_n). \tag{16}$$

Застосуємо зміщені системоаналогові диференціальні перетворення (2), (3) для моделювання фізичних процесів, які описуються крайовими задачами (11), (13).

Приклад.

Розглянемо нелінійну крайову задачу на визначення температури в нескінченному порожнинному циліндрі, внутрішня поверхня якого $x_1 = b$ підтримується при постійній температурі, а зовнішня випромінює тепло за законом Стефана-Больймана. Математична модель цього фізичного процесу згідно з [9] описується зміщеною крайовою задачею вигляду:

$$\frac{1}{x_1}\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1\cdot\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)=0, \tag{17}$$

$$u\big|_{x_1=b}=\alpha, \tag{18}$$

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}+h\cdot u^4\right)\right|_{x_1=a}=0, \tag{19}$$

де h – задана додатна стала.

Застосуємо до крайової задачі (17)–(19) диференціальні перетворення (2), (3) у фіксованій точці $x_{1v}=b$. Введемо допоміжну функцію:

$$V(x_1)=x_1\cdot\frac{\partial u(x_1)}{\partial x_1}. \tag{20}$$

Рівняння (17) з врахуванням (20) запишемо у вигляді:

$$\frac{\partial V(x_1)}{\partial x_1}=0. \tag{21}$$

Переведемо рівняння (21) в область зображень на основі виразу (9) при $m = 1$, опускаючи індекс в позначенні цілочисельного аргумента k:

$$\frac{k+1}{H}\cdot V_v(k+1)=0, \tag{22}$$

де $H = a - b$.

Послідовно надаючи цілочисельному аргументу k значення 0, 1, 2, 3, ..., з виразу (22) отримаємо диференціальний спектр допоміжної функції (20):

$$V_v(0) = C,\ V_v(k \geq 1) = 0, \tag{23}$$

де символом C позначено невідому ненульову дискрету допоміжної функції (20). З метою визначення диференціального спектра $U_v(k)$ переведемо в область зображень вираз (20), використовуючи співвідношення (8) і (9) при $m = 1$:

$$Vv(k)=\sum_{l=0}^{l=k}X_v(k-l)\cdot\frac{l+1}{H}U_v(l+1), \tag{24}$$

$$Xv(k) = X1v\cdot ъ(k) + H\cdot ъ(k-1),$$

$$ъ(k)=\begin{cases}1, & k=0\\ 0, & k\neq 0\end{cases},\quad ъ(k-1)=\begin{cases}1, & k=1,\\ 0, & k\neq 1.\end{cases}$$

Обчислення за виразом (24) при k = 0, 1, 2, 3,... дає систему рівнянь для визначення диференціального спектра $U_v(k)$:

$$\begin{aligned}
&V(0) = X_v(0)\cdot U_v(1) = \frac{X_{1v}}{H}U_v(1) = \frac{b}{H}U_v(1),\\
&V(1) = X_v(1)\frac{1}{H}U_v(1) + X_v(0)\frac{2}{H}U_v(2) = U_v(1) + \frac{2b}{H}U_v(2),\\
&V(2) = X_v(2)\frac{1}{H}U_v(1) + X_v(1)\frac{2}{H}U_v(2) + X_v(0)\frac{3}{H}U_v(3) = =2U_v(2) + \frac{3b}{H}U_v(3),\\
&V(3) = X_v(3)\frac{1}{H}U_v(1) + X_v(2)\frac{2}{H}U_v(2) + X_v(1)\frac{3}{H}U_v(3) + X_v(0)\frac{4}{H}U_v(4)=\\
&= U_v(3) + \frac{4b}{H}U_v(4),
\end{aligned} \tag{25}$$

……………………….……….

Система рівнянь (25) з врахуванням (23) дозволяє визначити диференціальний спектр $U_v(k)$ у вигляді:

$$\begin{aligned}
&U_v(1)=H\cdot\frac{c}{b},\ U_v(2)=-\frac{H^2}{2}\cdot\frac{c}{b^2},\\
&U_v(3)=\frac{H^3}{3}\cdot\frac{c}{b^3},\ U_v(4)=-\frac{H^4}{4}\cdot\frac{c}{b^4},\dots .
\end{aligned} \tag{26}$$

Вираз (26) дає розв'язок крайової задачі (17)–(19) в формі диференціального спектра $U_v(k)$, який необхідно доповнити нульовою дискретою $U_v(0)$. Гранична умова (18) та співвідношення (14) визначає нульову дискрету:

$$U_v(0) = \alpha. \tag{27}$$

Переведемо розв'язок крайової задачі з області зображень, отриманого у формі диференціального спектра (26), (27), в область оригіналів, застосовуючи обернені перетворення (3):

$$u(x_1) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x_1-b}{H}\right)^k \cdot U_v(k) = \alpha + \frac{c}{b}(x_1-b) - \frac{c}{2b^2}(x_1-b)^2 + \frac{c}{3b^3}(x_1-b)^3 -$$
$$-\frac{c}{4b^4}(x_1-b)^4 = \alpha + c\left[\left(\frac{x_1}{b}-1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{b}-1\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x_1}{b}-1\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{x_1}{b}-1\right)^4\right] = \tag{28}$$
$$= \alpha + c \cdot ln\frac{x_1}{b}.$$

У розв'язку задачі (28) необхідно визначити невідому величину c.

З цією метою відновимо оригінал допоміжної функції $V(x_1)$ на основі обернених перетворень (2) і диференціального спектра (23):

$$V(x_1) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x_1-b}{H}\right)^k \cdot V_v(k) = c. \tag{29}$$

Підстановка (29) в (23) дає вираз:

$$x_1 \cdot \frac{\partial u(x_1)}{\partial x_1} = c. \tag{30}$$

Гранична умова (19) і вираз (30) в точці $x_1 = a$ дозволяє знайти невідому величину c у вигляд:

$$C = -ahu^4(a). \tag{31}$$

Підстановка (31) у (28) при $x_1 = a$ дає рівняння для визначення невідомої величини $u(a)$:

$$u(a) + ahu^4(a) \cdot ln\frac{x_1}{b} = \alpha. \tag{32}$$

В результаті отримано точний аналітичний розв'язок (28), (31), (32) нелінійної крайової задачі (17)–(19).

На другому прикладі покажемо можливість розв'язку двовимірної крайової задачі одновимірними зміщеними диференціальними перетвореннями (2), (3).

Приклад.

Нехай задана прямокутна пластинка ОАСВ. Через сторону ОА тепло рівномірно підводиться, а через сторону ОВ – рівномірно відводиться. Дві інші сторони АС і ВС покриті тепловою ізоляцією. Необхідно знайти стаціонарну температуру внутрішніх точок пластинки. Ця задача зводиться до розв'язку двовмірної задачі Неймана [9]:

$$\frac{\partial^2 u(x_1,x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x_1,x_2)}{\partial x_2^2} = 0, \tag{33}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{x_1=0} = \frac{Q}{\lambda b}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{x_1=a} = 0, \tag{34}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|_{x_2=0} = -\frac{Q}{\lambda a}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|_{x_1=b} = 0, \tag{35}$$

де Q – кількість теплоти, що втікає через АО і витікає через ОВ. А λ – коефіцієнт внутрішньої теплопровідності.

Застосуємо до крайової задачі (33)–(35) одновимірні диференціальні перетворення (2), (3) по змінній x_2 у фіксованій точці $x_{2v} = b$.

Рівняння (33) на основі виразів (2)–(9) в області зображень матиме вигляд:

$$U_{2v}(x_1, k_2+2) = -\frac{H_2^2}{(k_2+1)(k_2+2)} \cdot \frac{d^2 U_{2v}(x_1,k_2)}{dx_1^2}. \tag{36}$$

Переведемо граничну умову (35) в область зображень (2):

$$U_{2v}(x_1, 1) = H_2 \cdot \left[\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right]_{x_2=b} = 0. \tag{37}$$

Обчислення диференціального спектра $U_{2v}(x_1, k_2)$ за рекурентним виразом (36) вимагає задання початкових дискрет $U_{2v}(x_1, 0)$, $U_{2v}(x_1, 1)$. Невідому нульову дискрету задамо в символічній формі:

$$U_{2v}(x_1, 0) = \varphi(x_1), \tag{38}$$

де $\varphi(x_1)$ – невідома функція незалежної змінної x_1. Перша дискрета $U_{2v}(x_1, 1)$ визначена в (37).

Послідовно надаючи цілочисельному аргументу k_2 цілочисельні значення, знаходимо за рекурентним виразом (36) і початковими дискетами (37), (38) чотири дискрети диференціального спектра $U_{2v}(x_1, k_2)$:

$$U_{2\nu}(x_1,0)=\varphi(x_1),\ U_{2\nu}(x_1,1)=0,\ U_{2\nu}(x_1,2)=-\frac{H_2^2}{2}\varphi(x_1),\ U_{2\nu}(x_1,3)=0. \quad (39)$$

Використовуючи вираз (16) при $m = 1$ граничні умови (35) і диференціальний спектр (39), отримаємо звичайне диференціальне рівняння для визначення невідомої функції $\varphi(x_1)$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|_{x_2=x_{2\nu}-H_2=0}=\frac{1}{H_2}\cdot\sum_{k_2=0}^{k_2=3}(-1)^{k_2}(k_2+1)U_{2\nu}(x_1,k_2+1)=H_2\cdot\ddot{\varphi}(x_1)=-\frac{Q}{\lambda a}. \quad (40)$$

Враховуючи, що $H_2 = x_{2\nu} = b$, рівняння (41) перетворюється до вигляду:

$$\frac{d^2\varphi(x_1)}{d^2x_1}=-\frac{Q}{\lambda ab}. \quad (41)$$

Інтегруючи рівняння (41), отримуємо його загальний розв'язок у вигляді:

$$\varphi(x_1)=-\frac{Q}{2\lambda ab}\cdot x_1^2+c_1x_1+c_0. \quad (42)$$

Розв'язок крайової задачі (33)–(35) отримано в області зображень у формі диференціального спектра (39), дискрети якого визначаються на основі виразу (42).

Переведемо розв'язок крайової задачі з області зображень (39) в область оригіналів, застосовуючи обернені перетворення (3) і враховуючи (41) і (42):

$$\begin{aligned}u(x_1,x_2)&=\sum_{k_2=0}^{k_2=3}\left(\frac{x_2-b}{H_2}\right)^{k_2}\cdot U_{2\nu}(x_1,k_2)=\varphi(x_1)-\frac{1}{2}(x_2-b)^2\ddot{\varphi}(x_1)=\\&=-\frac{Q}{2\lambda ab}\cdot x_1^2+c_1x_1+c_0+\frac{Q}{2\lambda ab}\cdot(x_2-b)^2.\end{aligned} \quad (43)$$

З метою визначення невідомої величини використаємо граничні умови (34) і вираз (43):

$$\left.\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}\right|_{x_1=0}=c_1=\frac{Q}{\lambda b}. \quad (44)$$

Розв'язок крайової задачі (43) з врахуванням (44) можна представити у вигляді:

$$\begin{aligned}u(x_1,x_2)&=\bar{c}_0+\frac{Q}{2\lambda ab}\left[(x_2-b)^2-(x_1-a)^2\right],\\ \bar{c}_0&=c_0+\frac{aQ}{2\lambda b}.\end{aligned} \quad (45)$$

Розв'язок (45) точно задовольняє рівняння в частинних похідних (33) і граничні умови (34), (35).

Висновки. Зміщені системоаналогові диференціальні перетворення є точним операційним методом розв'язку нелінійних крайових задач. Можливість отримання розв’язку крайових задач в аналітичному і чисельно-аналітичному вигляді суттєво знижує обчислювальну складність задач моделювання фізичних процесів на ЕОМ.

Перспективи подальших досліджень пов’язані з розширенням класу задач, які можна розв’язувати, на крайові задачі зі складною геометричною областю, в якій моделюються фізичні процеси.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. – М.: БИНОМ, 2003. – 632 с.
2. *Береговенко Г.Я., Пухов Г.Е., Саух С.Е.* Численные операторные методы решения дифференциальных уравнений и анализа динамических систем. – К.: Наук. думка, 1993. – 262 с.
3. *Мэтьюз Д.Г., Финк К.Д.* Численные методы. Использование MATLAB. – М.: Вильямс, 2001. – 720 с.
4. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов. – К.: Наук. думка, 1986. – 158 с.
5. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные преобразования функций и уравнений. – К.: Наук. думка, 1984. – 420 с.
6. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные спектры и модели. – К.: Наук. думка, 1990. – 184 с.
7. *Пухов Г.Е.* Приближенные методы математического моделирования, основанные на применении дифференциальных Т-преобразований. – К.: Наук. думка, 1988. – 216 с.
8. *Поршнев С.В.* Вычислительная математика. – СПб.: БХВ – Петербург, 2004. – 320 с.
9. *Рвачев В.Л., Слесаренко А.П.* Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах. – К.: Наук. думка, 1976. – 288 с.

БАРАНОВ Володимир Леонідович – доктор технічних наук, професор, головний науковий співробітник Житомирського військового інституту радіоелектроніки ім. С.П. Корольова, заслужений діяч науки і техніки України.

Наукові інтереси:

– чисельні методи.

ВОДОП’ЯН Сергій Васильович – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник Житомирського військового інституту радіоелектроніки ім. С.П. Корольова.

Наукові інтереси:

– чисельні методи.

КОСТЮЧЕНКО Руслана Михайлівна – викладач кафедри фундаментальних дисциплін Житомирського військового інституту радіоелектроніки ім. С.П. Корольова.

Наукові інтереси:

– чисельні методи.

Подано 12.09.2005

Баранов В.Л., Водоп'ян С.В., Костюченко Р.М. Зміщені системоаналогові диференціальні перетворення для розв'язку крайових задач

Баранов В.Л., Водопьян С.В., Костюченко Р.М. Смещенные системоаналоговые дифференциальные преобразования для решения краевых задач

Baranov V.L., Vodopjan S.V., Kostuchenko R.M. The displaced system- analogical differential transformations for the edge sums

УДК 621.372.061

Зміщені системоаналогові диференціальні перетворення для розв'язку крайових задач / В.Л. Баранов, С.В. Водоп'ян, Р.М. Костюченко

Запропоновано систему одновимірних зміщених диференціальних перетворень. Ця система є аналогом багатомірних диференціальних перетворень і призначена для зниження обчислювальної складності розв'язку крайових задач. Запропоновані приклади застосування зміщених системоаналогових диференціальних перетворень для моделювання фізичних процесів.

УДК 621.372.061

Смещенные системоаналоговые дифференциальные преобразования для решения краевых задач / В.Л. Баранов, С.В. Водопьян, Р.М. Костюченко

Предложена система одномерных смещенных дифференциальных преобразований. Эта система является аналогом многомерных дифференциальных преобразований и назначена для снижения вычислительной сложности решения краевых задач. Предложены примеры применения смещенных системоаналоговых дифференциальных преобразований для моделирования физических процессов.

УДК 621.372.061

The displaced system- analogical differential transformations for the edge sums / V.L. Baranov, S.V. Vodopjan, R.M. Kostuchenko

The system of the univariate displaced differential transformation is introduced. This system is an analogue of the multidimensional differential transformations and is used for the lowering calculating of the difficulty of the edge sums.

The examples of the usage of the displaced system- analogical differential transformation for the modelling of the physical processes are given.