ІНФОРМАТИКА, ОБЧИСЛЮВАЛЬНА ТЕХНІКА ТА АВТОМАТИЗАЦІЯ

УДК 517.2

В.Л. Баранов, д.т.н., проф.
С.В. Водоп'ян, к.т.н.
Р.М. Костюченко, викл.
Житомирський військовий інститут радіоелектроніки ім. С.П. Корольова

СИМВОЛІЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯНЬ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ НА ОСНОВІ СИСТЕМОАНАЛОГОВИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Запропоновано символічний метод розв'язку рівнянь в частинних похідних, що оснований на системі одномірних диференціальних перетворень. Наведені приклади застосування символічного методу.

Постановка проблеми. Відомі символічні методи розв'язку рівнянь в частинних похідних основані на різних інтегральних перетвореннях і мають суттєві обмеження щодо класу задач, що розв'язуються. В зв'язку з цим виникає проблема розробки символічного методу, який би дозволяв розширити клас цих задач.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Аналіз останніх досліджень і публікацій [1–8] показав, що, крім методів інтегральних перетворень, були розроблені методи, що ґрунтувались на диференціальних перетвореннях [1–4]. Диференціальні перетворення дозволяють розв'язувати диференціальні рівняння як аналітичними, так і чисельно-аналітичними методами. Основна перевага диференціальних перетворень, в порівнянні з інтегральними, полягає в розширенні класу розв'язуваних задач на нелінійні диференціальні рівняння.

На даний час досліджено символічний метод розв'язку звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, що оснований на диференціальних перетвореннях [1].

Мета статті. *Мета статті полягає в розширенні класу задач, що розв'язуються* диференціальними перетвореннями, на рівняння в частинних похідних.

Розглянемо фізичні процеси, що описуються функцією $u(x_1, x_2)$ двох незалежних змінних в області:

$$0 \le |x_1| \le H_1 \le \infty; \tag{1}$$

$$0 \le |x_2| \le H_2 \le \infty, \tag{2}$$

де H_1, H_2 – задані додатні сталі.

Моделювання процесів виду $u(x_1,\ x_2)$ виконаємо, ввівши систему двох одномірних диференціальних перетворень виду:

$$U(k_1,\ x_2) = \frac{H_1^{k_1}}{k_1!}\left(\frac{\partial^{k_1} u(x_1, x_2)}{\partial x_1^{k_1}}\right)_{x_1=0}; \tag{3}$$

$$u(x_1,\ x_2) = \sum_{k_1=0}^{\infty}\left(\frac{x_1}{H_1}\right)^{k_1} U(k_1,\ x_2); \tag{4}$$

$$U(x_1,\ k_2) = \frac{H_2^{k_2}}{k_2!}\left(\frac{\partial^{k_2} u(x_1,\ x_2)}{\partial x_2^{k_2}}\right)_{x_2=0}; \tag{5}$$

$$u(x_1,\ x_2) = \sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\frac{x_2}{H_2}\right)^{k_2} U(x_1,\ k_2), \tag{6}$$

де цілочисельні аргументи k_1 і k_2 приймають значення 0, 1, 2, 3... Вираз (3) описує прямі диференціальні перетворення функції $u(x_1,\ x_2)$ у функцію $U(k_1,\ x_2)$ цілочисельного аргументу k_1 і незалежної змінної x_2, яка називається зображенням, або диференціальним спектром процесу $u(x_1,\ x_2)$, що моделюється. Обернені диференціальні перетворення (3) дозволяють за диференціальним спектром $U(k_1,\ x_2)$ відновити в області оригіналів процес $u(x_1,\ x_2)$, який моделюється. Аналогічним чином вирази (5) і (6) описують прямі і обернені диференціальні перетворення по змінній x_2 відповідно.

Диференціальні спектри $U(k_1,\ x_2)$, $U(x_1,\ k_2)$ є аналогами в області зображень фізичного процесу, математична модель якого задається функцією $u(x_1,\ x_2)$.

З метою моделювання фізичних процесів може використовуватись диференціальний спектр $U(k_1, x_2)$ або $U(x_1, k_2)$. В деяких крайових задачах виникає потреба в дослідженні обох диференціальних спектрів $U(k_1, x_2)$ і $U(x_1, k_2)$.

Основні властивості одномірних диференціальних перетворень, встановлені в [1–4], справедливі для обох видів перетворень (3), (5). Основні математичні операції в області зображень (3), (5) виконуються за правилами відповідності, які визначаються такими виразами:

$$u(x_1, x_2) = \pm v(x_1, x_2) = \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} U(k_1, x_2) \pm V(k_1, x_2) \\ U(x_1, k_2) \pm V(x_1, k_2) \end{cases}, \tag{7}$$

$$cu\,(x_1, x_2) = \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} C \cdot U(k_1, x_2) \\ C \cdot U(x_1, k_2) \end{cases}; \tag{8}$$

$$u(x_1, x_2)\, v(x_1, x_2) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} U(k_1, x_2) * V(k_1, x_2) \\ U(x_1, k_2) * V(x_1, k_2) \end{cases}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial^m u(x_1, x_2)}{\partial x_1^m}, \quad D_1^m U(k_1, x_2); \tag{10}$$

$$\frac{\partial^m u(x_1, x_2)}{\partial x_2^m}, \quad D_2^m U(x_1, k_2), \tag{11}$$

де

$$U(k_1, x_2) * V(k_1, x_2) = \sum_{l=0}^{l=k_1} U(l, x_2) \cdot V(k_1 - l, x_2); \tag{12}$$

$$U(x_1, k_2) * V(x, k_2) = \sum_{l=0}^{l=k_2} U(x_1, l) \cdot V(x_1, k_2 - l); \tag{13}$$

$$D_1^m U(k_1, x_2) = \frac{(k_1 + m)!}{k_1!\, H_1^m} U(k_1 + m, x_2); \tag{14}$$

$$D_2^m U(x_1, k_2) = \frac{(k_2 + m)!}{k_2!\, H_2^m} U(x_1, k_2 + m). \tag{15}$$

Фігурними дужками в (7)–(9) позначені математичні операції в області зображень. Верхній рядок виразу у фігурних дужках позначає виконання операцій в області зображень (3), а нижній рядок – в області зображень (5).

Вираз (7) показує, що виконанню операцій додавання і віднімання в області оригіналів відповідають ті ж операції додавання й віднімання диференціальних спектрів в області зображень (3), (5). Множенню функції $u(x_1, x_2)$ на константу C (8) відповідає множення на ту ж константу диференціальних спектрів $U(k_1, x_2)$ і $U(x_1, k_2)$. Операції множення двох функцій в області оригіналів (9) відповідає спеціальна операція p-множення, позначена символом *, двох диференціальних спектрів в області зображень (3), (5). Операція m-кратного диференціювання функції $u(x_1, x_2)$ по змінній x_1 в області зображень (3) позначена символом D_1^m (10). Аналогічно символом D_2^m в (11) позначено m-кратне диференціювання функції $u(x_1, x_2)$ по змінній x_2 в області зображень (5).

Виконання операції множення * двох диференціальних спектрів в областях зображень (3) і (5) розкривається відповідно до виразів (12), (13). Операції m-кратного диференціювання в областях зображень (3), (5) реалізують за виразами (14), (15) відповідно.

Розглянемо математичну модель фізичного процесу у вигляді диференціального рівняння в частинних похідних з двома незалежними змінними:

$$f(x_1, x_2, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}) = 0. \tag{16}$$

Рівняння (16) може мати нескінченну кількість частинних розв'язків. Моделювання конкретних фізичних процесів вимагає вибору з усіх розв'язків рівняння (16) такого розв'язку, який задовольняє граничним умовам. Як правило, граничні умови задають на межі Γ середовища, в якому протікає фізичний процес, що моделюють.

Граничні умови задають у вигляді:

Умови Діріхле: $u(x)\big|_{x \in \Gamma} = \psi(x)$. (17)

Умови Неймана: $\frac{du(x)}{dv}\Big|_{x\in\Gamma} = \psi(x)$. (18)

Змішані умови:

$$\frac{du(x)}{dv} + \beta u = \psi(x). \quad (19)$$

де ψ, β неперервні функції, визначені на граничній поверхні Γ, а $\frac{du(x)}{dv}$ означає похідну, взяту в точці поверхні Γ в напрямку нормалі до неї.

Переведемо рівняння (16) в область зображень диференціальними перетвореннями (3), (5), використовуючи правила відповідності (7)–(15). В результаті отримаємо два зображення вигляду:

$$F_1[k_1, x_2, U(k_1, x_2), D_1U(k_1, x_2), \frac{dU(k_1,x_2)}{dx_2}, D_1\frac{dU(k_1,x_2)}{dx_2}, D_1^2\, U(k_1, x_2), \frac{d^2U(k_1,x_2)}{dx_2^2}] = 0; \quad (20)$$

$$F_2[x_1, k_2, U(x_1, k_2), \frac{dU(x_1,k_2)}{dx_1}, D_2U(x_1, k_2), D_2\frac{dU(x_1,k_2)}{dx_1}, \frac{d^2U(x_1,k_2)}{dx_1^2}, D_2^2\, U(x_1, k_2)] = 0, \quad (21)$$

де F_1, F_2 – зображення функції f, що отримані відповідно до перетворень (3), (5).

Рівняння (20) і (21) є звичайними диференціальними рівняннями. Кожне з рівнянь (20) і (21) є аналогом рівняння (16) в області зображень. Систему рівнянь (20), (21) назвемо системоаналогом рівняння (16) в області зображень.

Граничні умови (17), (18) переводяться в область (3), (5) або виражаються через диференціальні спектри $U(k_1, x_2)$, $U(x_1, k_2)$ таким чином:

1. $U(0, x_2) = U(0, x_2)$; $u(x_1, 0) = U(x_1, 0)$; (22)

$$U(H_1, x_2) = \sum_{k_1=0}^{\infty} U(k_1, x_2); \quad (23)$$

$$U(x_1, H_2) = \sum_{k_2=0}^{\infty} U(x_1, k_2); \quad (24)$$

2.

$$U(1, x_2) = H_1\left[\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}\right]_{x_1=0}; \quad (25)$$

$$U(x_1, 1) = H_2\left[\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right]_{x_2=0}; \quad (26)$$

$$\left[\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}\right]_{x_1=H_1} = \frac{1}{H_1}\sum_{k_1=0}^{\infty}(k_1+1)U(k_1+1, x_2); \quad (27)$$

$$\left[\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right]_{x_2=H_2} = \frac{1}{H_2}\sum_{k_2=0}^{\infty}(k_2+1)U(x_1, k_2+1). \quad (28)$$

Граничні умови (19) виражаються через дискрети диференціальних спектрів на основі виразів (22)–(28).

В загальному випадку задача розв'язку рівняння в частинних похідних (16) з граничними умовами (17)–(19) звелась до розв'язку в області зображень звичайних диференціальних рівнянь (20) і (21) відносно диференціальних спектрів і при крайових умовах (22)–(28). Ця задача розв'язується відомими методами. У випадку лінійних диференціальних рівнянь (20), (21) можуть застосовуватись більш загальні методи розв'язку звичайних диференціальних рівнянь [10], методи на основі різних інтегральних перетворень [9], або методи на основі диференціальних перетворень, запропоновані в [1–4].

У випадку нелінійних диференціальних рівнянь (20), (21) слід рекомендувати їх розв'язання в аналітичному і чисельно-аналітичному виглядах на основі диференціальних перетворень, запропонованих в [1–4].

Після розв'язку задачі в області зображень здійснюють переведення зображення розв'язку задачі (16)–(19) в область оригіналів. Цей перехід може здійснюватись різними способами.

Перший спосіб полягає у використанні таблиць відповідності оригіналів і зображень, аналогічних таблицям відповідності, складеним для інтегральних перетворень. Таблиці відповідності оригіналів і зображень для одномірних диференціальних перетворень надані в [1–3].

Другий спосіб використовує відновлення функції $u(x_1, x_2)$ за диференціальним спектром $U(k_1, x_2)$, $U(x_1, k_2)$ згідно з оберненими перетвореннями (4)–(6).

Третій спосіб полягає в переході в область зображень інтегральних перетворень Лапласа за виразами [1]:

$$U(s, x_2) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{k_1!}{s^{k_1+1}} \cdot \frac{U(k_1, x_2)}{H_1^{k_1}}; \tag{29}$$

$$U(x_1, s) = \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{k_2!}{s^{k_2+1}} \cdot \frac{U(x_1, k_2)}{H_2^{k_2}}. \tag{30}$$

Після переходу в область зображень за Лапласом (29), (30) можна використовувати методи переходу до оригіналу, розроблені для інтегральних перетворень Лапласа.

Четвертий спосіб ґрунтується на методі балансу диференціальних спектрів, запропонованих в [3]. Спосіб полягає у виборі виду апроксимуючої функції з вільними коефіцієнтами або ряду за відомими базисними функціями, переводі їх диференціальними перетвореннями (3), (5) в область зображень і прирівнюванні дискрет до диференціальних спектрів $U(k_1, x_2)$, $U(x_1, k_2)$ при однакових значеннях цілочисельних аргументів k_1, k_2. В результаті складається система кінцевих рівнянь для визначення коефіцієнтів ряду або апроксимуючої функції.

Відмітимо особливості запропонованого символічного методу. Він є точним операційним методом і у випадку аналітичного розв'язання задачі (16)–(19) дає її точний аналітичний розв'язок. Згідно з (1), (2), запропонований метод допускає зміну змінних перетворення як в скінчених, так і нескінченних межах. Досить прості вирази (12), (13) для виконання операції множення в області зображень дозволяють розповсюдити символічний метод на нелінійні крайові задачі.

Диференціальні перетворення (3)–(6) мають широкі можливості з аналітичного та чисельно-аналітичного переходу з області зображень до оригіналів. В багатьох практичних випадках крайова задача (16)–(19) розв'язується на основі одного зображення (20) або (21).

Покажемо це на прикладах.

Приклад 1. Розв'яжемо запропонованим методом хвильове рівняння [1]:

$$\frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_1^2}, \tag{31}$$

з граничними умовами

$$u(0, x_2) = u(\pi, x_2) = 0 \tag{32}$$

і початковими умовами

$$u(x_1, 0) = \sin x_1; \quad \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2}\Big|_{x_2=0} = 0. \tag{33}$$

Переведемо рівняння (31) в область зображень (3), використовуючи зображення похідної у вигляді (10):

$$\frac{d^2 U(k_1, x_2)}{dx_2^2} = D_1^2 U(k_1, x_2). \tag{34}$$

Загальний розв'язок звичайного диференціального рівняння (34) має вигляд:

$$U(k_1, x_2) = A(k_1)\, e^{x_2 D_1} + B(k_1)\, e^{-x_2 D_1}. \tag{35}$$

Переведемо в область зображень (3) умову (33)

$$U(k_1, 0) = S(k_1) = \frac{H_1^{k_1}}{k_1!} \sin\frac{\pi k_1}{2}, \tag{36}$$

$$\frac{\partial U(k_1, x_2)}{\partial x_2}\Big|_{x_2=0} = 0. \tag{37}$$

Умови (36), (37) дозволяють знайти невідомі функції $A(k_1)$, $B(k_1)$ цілочисельного аргументу k_1, що входить в загальний розв'язок (35). Диференціюємо вираз (35) по змінній x_2 і на основі умови (37) при $x_2 = 0$ маємо:

$$D_1 A(k_1) - D_2 B(k_1) = 0. \tag{38}$$

Вираз (38) на основі співвідношення (14) при $m = 1$ перетвориться до вигляду:

$$A(k_1 + 1) = B(k_1 + 1). \tag{39}$$

Враховуючи умову (36), із виразу (35) при $x_2 = 0$ отримаємо таке співвідношення:

$$A(k_1) + B(k_1) = S(k_1). \tag{40}$$

З граничної умови (32) і виразу (35) випливає:

$$A(0) = B(0) = 0. \tag{41}$$

Об'єднаємо вираз (39) і (41) в одне співвідношення:

$$A(k_1) = B(k_1). \tag{42}$$

Із виразу (40) і (41) випливає:

$$A(k_1) = B(k_1) = \frac{1}{2} S(k_1). \tag{43}$$

Підстановка (43) в (35) дозволяє знайти зображення розв'язку задачі у вигляді:

$$U(k_1,\ x_2) = \frac{1}{2} e^{x_2 D_1}\ S(k_1) + \frac{1}{2} e^{-x_2 D_1}\ S(k_1), \tag{44}$$

де зображенню $S(k_1)$ в області оригіналів відповідає функція $\sin x_1$. Зображення (44) переводимо в область оригіналів за таблицею відповідності зображень і оригіналів, наведених в [3]:

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\sin(x_1 + x_2) + \frac{1}{2}\ \sin(x - x_2) = \sin x_1 \cos x_2.$$

Цей розв'язок точно задовольняє рівняння (31) і умови (32), (33).

Приклад 2. Розв'яжемо символічним методом рівняння параболічного типу:

$$\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} = a \cdot \frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} \tag{45}$$

з обмежуючими умовами

$$u(x_1,\ 0) = u_0 e^{-\alpha x_1}, \tag{46}$$

$$\lim_{x_2 \to \infty} u(x_1, x_2) = 0. \tag{47}$$

В області $x_1 > 0$, $0 < x_2 < \infty$, де a і α – задані додатні сталі

Застосуємо диференціальні перетворення (3) до рівняння (45), використовуючи символьне зображення похідної згідно з виразом (10) при $m = 1$:

$$\frac{d^2 u(k_1, x_2)}{dx_2^2} - \frac{D_1}{a} U(k_1, x_2) = 0 \cdot \tag{48}$$

Загальний розв'язок звичайного диференціального рівняння (48) має вигляд:

$$U(k_1,\ x_2) = A(k_1)\, e^{-\frac{x_2}{\sqrt{a}}\sqrt{D_1}} + B(k_1)\ e^{\frac{x_2}{\sqrt{a}}\sqrt{D_1}}. \tag{49}$$

Переведемо граничні умови (47) в область зображень:

$$\lim_{x_2 \to \infty} U(k_1, x_2) = 0. \tag{50}$$

Із умови (50) випливає, що в розв'язку (49) $B(k_1) = 0$. Невідому функцію $A(k_1)$ в розв'язку (49) визначимо з граничних умов (46), які переведемо в область зображень (3):

$$U(k_1,\ 0) = U_0\, E\, (k_1), \tag{51}$$

де $E(k_1)$ – зображення функції $e^{-\alpha x_1}$.

Прирівнюючи вираз (49) при $x_2 = 0$ і $B(k_1) = 0$ до співвідношення (51), отримаємо:

$$A(k_1) = U_0\, E(k_1). \tag{52}$$

Підстановка (52) у вираз (49) при $B(k_1) = 0$ дає розв'язок крайової задачі (45)–(47) в області зображень:

$$U(k_1,\ x_2) = U_0\ e^{-\frac{x_2}{\sqrt{a}}\sqrt{D_1}}\ E(k_1). \tag{53}$$

Із властивостей диференціальних спектрів [1–3] випливає:

$$E(k_1) = \vartheta(k_1) * E(k_1), \tag{54}$$

де * – символ p-множення (9) диференціальних спектрів в області зображень, а

$$\vartheta(k_1) = \begin{cases} 1, & k_1 = 0, \\ 0, & k_1 \neq 0. \end{cases}$$

Підстановка (54) в (53) дає розв'язок крайової задачі (45)–(47) у вигляді:

$$U(k_1,\ x_2) = U_0\ e^{-\frac{x_2}{\sqrt{a}}\sqrt{D_1}}\ \vartheta(k_1) * E(k_1). \tag{55}$$

В роботі [1] показано, що:

$$e^{-\frac{x_2}{\sqrt{a}}\sqrt{D_1}}\ \vartheta(k_1) \to 1 - erf\,\frac{x_2}{2\sqrt{a x_1}}. \tag{56}$$

Вираз (56) дає відповідність між зображенням зліва та його оригіналом. З виразів (46), (51) випливає, що

$$E(k_1) \to e^{-ax_1}. \tag{57}$$

Виконаємо перехід з області зображень (55) в область оригіналів, використовуючи (8), (9) і співвідношення (56), (57). В результаті отримаємо розв'язок граничної задачі (45)–(47) у вигляді:

$$u(x_1, x_2) = u_0 e^{-ax_1} \left(1 - erf \frac{x_2}{2\sqrt{ax_1}}\right), \tag{58}$$

де erf позначає так званий інтеграл помилок

$$erfz = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-r^2} dr.$$

<u>Приклад 3.</u> Розглянемо одномірну задачу про розподіл температури по товщині нескінченної пластини $-\infty < y < \infty$, $-\infty < z < \infty$, $0 \le x \le a$. Грань $x = a$, якою підтримується при постійній температурі α, а грань $x = 0$ випромінює тепло за законом Стефана-Больцмана [9]. Математична модель даної задачі описується одномірним рівнянням Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < a \tag{59}$$

з граничними умовами

$$u\big|_{x=a} = \alpha; \tag{60}$$

$$\left(-\frac{du}{dx} + \beta u^4\right)\Big|_{x=0} = 0, \tag{61}$$

де a, α, β – задані додатні сталі.

Математична модель (59)–(61) містить нелінійну граничну умову (61) і відноситься до класу нелінійних задач теплопровідності [9]. Нелінійна крайова задача (59)–(61) розв'язується аналітично на основі диференціальних перетворень (3), (4), в яких цілочисельний аргумент позначимо через k.

Переведемо рівняння (59) в область зображень (3), використовуючи вираз (14) при $m = 2$:

$$\frac{(k+1)(k+2)}{H^2} U(k+2) = 0. \tag{62}$$

Послідовно надаючи цілочисельному аргументу k значення 0, 1, 2..., отримаємо, що всі дискрети диференціального спектра $U(k)$ при $k \ge 2$ приймають нульові значення:

$$U(k \ge 2) = 0. \tag{63}$$

Граничну умову (60) виразимо через диференціальний спектр $U(k)$ при $H = a$, використовуючи вираз (23) і приймаючи до уваги (63),

$$U\big|_{x=H=a} = \sum_{k=0}^{\infty} U(k) = U(0) + U(1) = \alpha. \tag{64}$$

Граничну умову (61) перетворимо до вигляду

$$\frac{du(x)}{dx}\Big|_{x=0} = \beta U^4(0). \tag{65}$$

На основі прямих диференціальних перетворень (3) запишемо вираз дискрети диференціального спектра $U(k)$ при $k = 1$:

$$U(1) = H \left[\frac{du(x)}{dx}\right]\Big|_{x=0}. \tag{66}$$

Підстановка (65) в (66) дає співвідношення між нульовою $U(0)$ і першою $U(1)$ дискретами диференціального спектра $U(k)$.

$$U(1) = \beta \cdot H \cdot U^4(0). \tag{67}$$

Рівняння (64) з врахуванням (67) при $H = a$ перетвориться до вигляду

$$U(0) + a\beta U^4(0) = \alpha. \tag{68}$$

Розв'язок рівняння (68) визначає дискрету $U(0)$, підстановка якої в (67) дозволяє знайти дискрету $U(1)$. Інші дискрети диференціального спектра $U(k)$ при $k \ge 2$, згідно з виразом (63) дорівнюють нулю. За дискретами диференціального спектра $U(k)$ оберненими перетвореннями (4) отримаємо розв'язок нелінійної крайової задачі (59)–(61) у вигляді:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{H}\right)^k \cdot U(k) = U(0) + \frac{x}{H}U(1). \tag{69}$$

Підстановка (67) в (69) дає аналітичний розв'язок задачі:

$$U(x) = U(0) + \beta U^4(0) \cdot x, \tag{70}$$

де $U(0)$ обчислюється з рівняння (68).

Використовуючи співвідношення (68), розв'язок (70) можна звести до більш простого вигляду:

$$u(x) = u(0) + \frac{\alpha - u(0)}{a} \cdot x. \tag{71}$$

Висновки. Символічний метод розв'язку крайових задач, що оснований на системоаналогових диференціальних перетвореннях, є точним операційним методом. Метод дозволяє розв'язувати крайові задачі при зміні змінних перетворення як на скінчених, так і на нескінчених межах. Запропонований символічний метод допускає аналітичний і чисельно-аналітичний розв'язок крайових задач. Розв'язок крайових задач в аналітичному і чисельно-аналітичному вигляді значно понижує обчислювальну складність розв'язку крайових задач, в порівнянні з чисельними методами.

Предметом подальших досліджень є розвиток чисельно-аналітичних методів розв'язку нелінійних крайових задач на основі системоаналогових диференціальних перетворень.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. – М.: БИНОМ, 2003. – 632 с.
2. *Береговенко Г.Я., Пухов Г.Е., Саух С.Е.* Численные операторные методы решения дифференциальных уравнений и анализа динамических систем. – Киев: Наук. думка, 1993. – 262 с.
3. *Мэтьюз Д.Г., Финк К.Д.* Численные методы. Использование MATLAB. – М.: "Вильямс", 2001. – 720 с.
4. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1970. – 332 с.
5. *Поршнев С.В.* Вычислительная математика. – Санкт–Петербург: БХВ–Петербург, 2004. – 320 с.
6. *Пухов Г.Е.* Приближенные методы математического моделирования, основанные на применении дифференциальных Т-преобразований. – К.: Наук. думка, 1988. – 216 с.
7. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов. – К.: Наук. думка, 1986. – 158 с.
8. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные преобразования функций и уравнений. – К.: Наук. думка, 1984. – 420 с.
9. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные спектры и модели. – К.: Наук. думка, 1990. – 184 с.
10. *Рвачев В.Л., Слесаренко А.П.* Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах. – К.: Наук. думка, 1976. – 288 с.

БАРАНОВ Володимир Леонідович – головний науковий співробітник, Заслужений діяч науки і техніки України, доктор технічних наук, професор.

Наукові інтереси:
- моделювання;
- оптимізація;
- диференціація перетворення.

ВОДОП'ЯН Сергій Васильович – кандидат технічних наук Житомирського військового інституту радіоелектроніки ім. С.П. Корольова.

Наукові інтереси:
- алгоритми багатоканальних автоматичних систем управління та оцінювання.

КОСТЮЧЕНКО Руслана Михайлівна – викладач кафедри фундаментальних дисциплін Житомирського військового інституту радіоелектроніки ім. С.П. Корольова.

Наукові інтереси:
- моделювання.

Подано 20.05.2005