УДК 519.21

В.О. Коваль, д.ф.-м.н., проф.
Житомирський державний технологічний університет

ЗАКОН ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА ДЛЯ ПРОЦЕСІВ АВТОРЕГРЕСІЇ ЗРОСТАЮЧОГО ПОРЯДКУ

Доводиться закон повторного логарифма для одновимірних лінійних процесів авторегресії зростаючого порядку. Припускається, що збурення задовольняють принцип інваріантності Штрассена.

Процеси авторегресії мають широкі застосування в економіці, екології, інженерних та фізичних науках (напр. [1]). Дослідженню їх асимптотичної поведінки присвячене значне число публікацій. В даному повідомленні вивчається асимптотична поведінка майже напевно (м.н.) процесу авторегресії $(x_n, n \ge 1)$ зростаючого порядку. Такий процес визначається рекурентним рівнянням виду:

$$x_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k x_{n-k} + v_n,\ n \ge 2,\ x_1 = v_1, \tag{1}$$

де $(a_n, n \ge 1)$ – числова послідовність; $(v_n, n \ge 1)$ – послідовність випадкових величин. Підсилені закони великих чисел для процесу (1) вивчались в роботах [2], [3]. У даній роботі доводиться закон повторного логарифма. При цьому припускається, що збурення $(v_n, n \ge 1)$ задовольняють сильний принцип інваріантності з точністю апроксимації $o\left((n \ln\ln n)^{1/2}\right)$ (напр. [4]). Такий підхід дає можливість охопити одночасно різні класи збурень $(v_n, n \ge 1)$. Відзначимо також, що закон повторного логарифма для процесу авторегресії m-го порядку $x_n = \sum_{k=1}^{m} a_k x_{n-k} + v_n,\ n \ge 1$ був встановлений у роботі [5]. Через E позначаємо математичне сподівання випадкової величини.

Теорема. Нехай виконуються наступні умови:

$$\sup_{n \ge 1} E|v_n| < \infty, \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = q < 1; \tag{3}$$

знайдеться послідовність незалежних центрованих гауссівських випадкових векторів $(\gamma_n, n \ge 1)$ з дисперсією σ^2, що виконується умова:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i = o\left((n \ln\ln n)^{1/2}\right) \quad \text{м.н.} \quad (n \to \infty). \tag{4}$$

Тоді

$$\limsup_{n\to\infty} (2n \ln\ln n)^{-1/2} \left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| = \sigma \left|1 - \sum_{k=1}^{\infty} a_k\right|^{-1} \quad \text{м.н.} \tag{5}$$

Зауваження. Умови (2), (3) є стандартними і використовувались, наприклад, є роботах [2], [3] при доведенні підсиленого закону великих чисел для процесу (1).

Доведення теореми. Через умови (2) (3) процес (1) можна записати у вигляді (теорема 2, *a* в [3]):

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} c_{n-k} v_k,\ n \ge 1,$$

причому виконуються умови:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| < \infty, \tag{6}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \ne 0. \tag{7}$$

Нехай $t_n = (2n \ln\ln n)^{-1/2}$, $n \ge 3$, і покажемо спочатку, що

$$\limsup_{n\to\infty} t_n \left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| = \sigma \left|\sum_{k=0}^{\infty} c_k\right| \quad \text{м.н.} \tag{8}$$

Розглянемо гауссівський лінійний процес $z_n = \sum_{k=1}^{n} c_{n-k}\gamma_k$, $n \ge 1$. Використовуючи теорему 3 з роботи [6] та враховуючи умови (6), (7), дістанемо:

$$\limsup_{n\to\infty} t_n \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sigma\left|\sum_{k=0}^{\infty} c_k\right| \quad \text{м.н.} \tag{9}$$

Має місце нерівність:

$$t_n\left|\sum_{k=1}^{n}(x_k - z_k)\right| = t_n\left|\sum_{k=1}^{n} c_{n-k}\sum_{i=1}^{k}(v_i - \gamma_i)\right| \le \sum_{k=1}^{n}|c_{n-k}|\left(t_k\left|\sum_{i=1}^{k}(v_i - \gamma_i)\right|\right).$$

Звідси, через умови (4), (6) та лему Тепліца, випливає, що

$$t_n\left|\sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n} z_k\right| \to 0 \quad \text{м.н.} \qquad (n \to \infty).$$

На основі даного співвідношення та (9) говоримо, що має місце (8).

З умови (3) випливає, що

$$\left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda^k\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^k, |\lambda| < 1.$$

Перейшовши в даному співвідношенні до границі при $\lambda \to 1-0$, дістанемо:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)^{-1}.$$

Звідси та з (8) випливає виконання співвідношення (5). Теорему доведено.

Розглянемо один практично важливий наслідок.

Наслідок. Нехай виконується умова (3) і процес (1), породжений мартингал-різницею $(v_n, n \ge 1)$ відносно фільтрації $(F_n, n \ge 0)$, причому виконуються умови:

$$\lim_{n\to\infty} Ev_n^2 = \lim_{n\to\infty} E\left(v_n^2 \middle| F_{n-1}\right) = \sigma^2 > 0 \quad \text{м.н.}, \tag{10}$$

при деякому $p \in (2; 4)$:

$$\sup_{n\ge 1} E|v_n|^p < \infty. \tag{11}$$

Тоді має місце (5).

Доведення випливає безпосередньо з теореми, оскільки через умови (10), (11) та теореми 1 [7] має місце співвідношення (4). Умова 2 виконується через (12).

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Duflo M.* Random iterative models. – Berlin: Springer, 1997. – 385 p.
2. *Peligrad M.* Limit theorems and the law of large numbers for martingale-like sequences // Math. Nachrichten. – 1980. – Vol. 99. – № 1. – P. 211–216.
3. *Ганошкин В.Ф.* О законе больших чисел для линейных процессов авторегрессии // Изв. вузов / Математика. – 1988. – № 4. – С. 12–21.
4. *Philipp W.* Invariance principles for independent and weakly dependent random variables // Dependence in Probability and Statistics. – Basel: Birkhдuser, 1986. – P. 225–268.
5. *Koval' V., Schwabe R.* Limit theorems for solutions of stochastic difference equations in Banach spaces with applications // Random Oper. Stoch. Equat. – 1998. – Vol. 6. – № 2. – P. 149–158.
6. *Lai T.L., Wei C.Z.* A law of the iterated logarithm for double arrays of independent random variables with applications to regression and time series models // Ann. Probab. – 1982. – Vol. 10. – № 2. – P. 320–335.
7. *Heyde C.C., Scott D.J.* Invariance principles for the law of the iterated logarithm for martingales and processes with stationary increments // Ann. Probab. – 1973. – Vol. 1. – № 3. – P. 428–436.

КОВАЛЬ Валерій Олександрович – професор кафедри вищої математики Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:

– граничні теореми теорії ймовірностей.

Тел.: (0412) 24-37-89.

E-mail: vkoval@com.zt.ua

Подано 25.10.2004