УДК 519.67

О.П. Степанов, магістрант
С.І. Яремчук, к.ф.-м.н., доц.
Житомирський державний технологічний університет

МЕТОД G-ПРОЕКЦІЇ В ЗАДАЧАХ МІНІМІЗАЦІЇ ЄДНАЛЬНОЇ МЕРЕЖІ ПРЯМОКУТНИКІВ

Розглядається задача оптимізації розміщення об'єктів, що мають прямокутну форму на опуклій області. Множина припустимих розв'язків задачі розбивається на опуклі підмножини. Для пошуку розв'язку задачі пропонується використати метод G-проекції.

Вступ. На практиці досить часто виникають задачі, пов'язані з розміщенням об'єктів у заданих областях. Існує багато методів для розв'язання таких задач. Найчастіше застосовують наближені методи, що дозволяють знайти деяке раціональне розміщення. В даній роботі до розв'язку задачі застосовується метод, для якого доведена збіжність у випадку опуклої функції цілі.

Постановка задачі. Дано m геометричних об'єктів прямокутної форми (D_j, $j = 1,\dots, m$), розміри яких задаються векторами $l^j(l^j_1, l^j_2, \dots, l^j_n)$, $j = 1,\dots,m$, положення у просторі визначається координатами їх полюсів $Z^j(\xi^j_1, \xi^j_2, \dots, \xi^j_n)$, $j = 1, 2,\dots, m$. Область розміщення цих об'єктів Ω – прямокутник з розмірами ($a_1, \dots, a_2$). Необхідно знайти таке розміщення прямокутників D_j,($j = 1,\dots, m$) в області Ω, при якому досягає екстремуму обраний критерій якості:

$$f(Z) = \to \mathrm{extr},\ Z \in G\ , \tag{1}$$

де $f(Z)$ – неперервна та неперервно-диференційована на G функція, $Z = Z^1, Z^2, \dots, Z^m$) – вектор, що визначає розміщення об'єктів D_j,($j = 1,\dots, m$) в просторі $Z^j(\xi^j_1, \xi^j_2, \dots, \xi^j_n)$ – задається координатами полюса D_j,($j = 1,\dots, m$) [1].

Для нашого випадку задача матиме вигляд:

$$f(Z) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(\xi^i_j - \xi^i_{j-1})^2 + \sum_{j=1}^{n}(\xi^m_j - \xi^0_{j-1})^2 \to \min\ ,\ \ Z \subset G\ . \tag{2}$$

Тобто потрібно мінімізувати єднальну мережу об'єктів D_j,($j = 1,\dots, m$).

Мета даного дослідження. Розв'язати поставлену задачу, що збігається до її розв'язку

Аналіз джерел дослідження. В даній роботі використовується метод проекції градієнта [1]. Для випадку, коли множина припустимих розв'язків задається системою лінійних обмежень задача розв'язується методом Розена, який належить до методів проекції градієнта[2]. Однак дана задача має особливості, врахування яких дозволило використати метод G-проекції, що дозволяє отримати розв'язок набагато швидше, ніж метод Розена.

Виклад основної частини досліджень. Умови взаємного неперетинання прямокутників $D_1,\dots,D_m$ можна записати так: для кожної пари D_iD_j прямокутників існує хоча б одне $k \in \{1, 2\}$ таке, що

$$\left|\xi^i_k - \xi^j_k\right| \ge \frac{l^i_k + l^j_k}{2},\quad k = 1, 2;\quad i \ne j,\quad i = 1,\dots, m;\quad j = 1\ ,\dots,\ m; \tag{3}$$

умови належності прямокутника області Ω мають наступний вигляд – для кожного прямокутника D_j виконується

$$\frac{l^j_k}{2} \le \xi^j_k \le a_k - \frac{l^j_k}{2},\ \ k = 1, 2;\ \ j = 1, \dots, m \tag{4}$$

де $a(a_1, a_2)$ – розміри області Ω [1].

Таким чином, множина припустимих розв'язків G описується обмеженнями (3),(4). З цього випливає, що множина G – неопукла, багатозв'язна та може бути незв'язною. У загальному випадку функція цілі задачі (1) нелінійна.

Нехай функція цілі – неперервно-диференційована та опукла на деякій опуклій множині $Y \subset G$. Для застосування методів умовної оптимізації, необхідно, щоб множина припустимих розв'язків була опуклою.

Представимо множину припустимих розв'язків G у вигляді об'єднання опуклих підмножин G_i.

Для цього нерівність 2, яка описує умову взаємного неперетинання прямокутників, представимо в наступному вигляді:

$$\left[\begin{array}{l} \xi_k^i - \xi_k^j \geq \dfrac{l_k^i + l_k^j}{2} \\ \xi_k^j - \xi_k^i \geq \dfrac{l_k^i + l_k^j}{2} \end{array}\right. \qquad k = 1, \dots, n. \tag{5}$$

Таким чином, існує всього $2n$ нерівностей, які визначають умову неперетинання для кожної пари прямокутників. Кількість пар прямокутників буде дорівнювати C^2_m, де m – кількість прямокутників. Отже, загальна кількість нерівностей, що задають умову неперетинання для m прямокутників, буде дорівнювати $r = (2n)^{C_m^2}$ [2].

Для кожної координати ξ_k вектора Z, що визначає розміщення прямокутників, обирається одна з двох можливих нерівностей (5) і для кожної пари прямокутників обирається лише одна координата ξ_k, за якою задається умова неперетинання. Таким чином, обравши для кожної пари прямокутників одну з n координат, за якою буде задана умова неперетинання, а для обраної координати, визначивши одну з двох умов неперетинання та додавши умови належності джерел області розміщення Ω, ми визначаємо підмножину припустимих розв'язків поставленої задачі. Система, що складена таким чином, описує опуклу множину [5].

Таким чином, множину припустимих розв'язків G можна представити у вигляді об'єднання опуклих n-вимірних багатогранників G_k. Кількість таких багатогранників буде дорівнювати $(4)^{C_m^2}$ [3], де m – кількість багатогранників:

$$G = \bigcup_{k=1}^{r} G_k, \tag{6}$$

де $r = (4)^{C_m^2}$.

З наведеного вище видно, що кожне обмеження , що задає підмножини, містить не більше двох змінних, із загальної кількості $2m$. З використанням цієї особливості побудовано алгоритм.

Алгоритм методу G-проекції [5].

Введемо наступні позначення:

A – матриця коефіцієнтів системи лінійних нерівностей, що задають підмножину G_k;

A_1 – матриця коефіцієнтів лінійних нерівностей, активних у даному наближенні;

A_2 – матриця коефіцієнтів лінійних нерівностей, не активних у даному наближенні;

b – матриця-стовпчик вільних членів системи лінійних нерівностей, що задають підмножину G_k;

d_k – вектор спуску.

Крок 1.

Задається точка $Z_0 \in G_0$. Представимо матриці A і b у вигляді (A_1, A_2) і (b_1, b_2) відповідно, де $A_1Z_0 = b_1$, $A_2Z_0 < b_2$. Приймемо $k = 1$ і перейдемо до основного етапу.

Крок 2.

Якщо A_1 порожня (не містить жодного стовпця), то покладемо $d_k = -\nabla f(Z_k)$.

Інакше, якщо A_1 для поточного наближення не порожня, то побудуємо вектор спуску d_k. Спочатку покладемо $d_k = -\nabla f(Z_k)$.

Для кожної координати антиградієнта функції цілі ($i = 1, \dots, 2m$) перевіряється відповідний стовпчик матриці A_1.

Якщо s-тий ($s \in \{1,\dots,2m\}$) стовпчик матриці A_1 містить хоча б один одиничний елемент, знак якого збігається зі знаком антиградієнта функції цілі, то s-та координата вектора Z вважається «стримуваною» (тобто її зміну необхідно заборонити). У векторі спуску відповідний елемент $-\nabla f(Z_k)$ покладається рівним 0 ($\dfrac{\partial f(Z_k)}{\partial \xi_s} = 0$).

Крок 3.

Знаходиться наступне наближення $Z_{k+1} = Z_k + \beta_k \cdot d_k$, що належить променеві, який виходить із точки Z_k і має напрямок вектора d_k. β_k знаходиться з умови:

$$\beta_k = \arg\min f(Z^k + \beta \cdot d_k), \quad 0 \le \beta \le \beta_{\max},$$

де

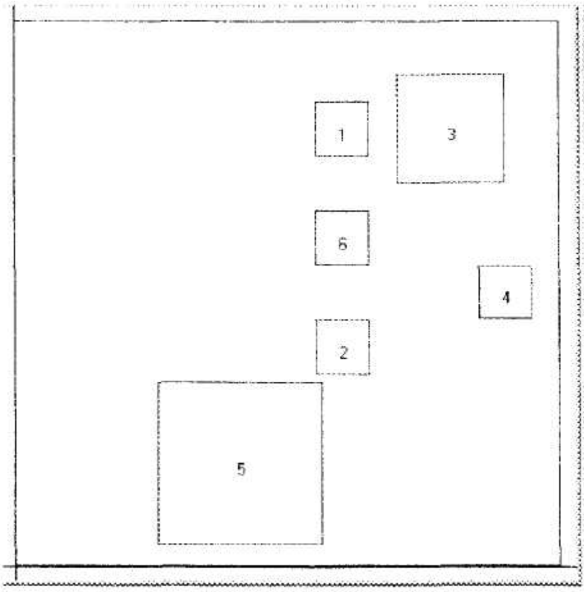
$$\beta_{\max} = \begin{cases} \infty, & \text{якщо} \quad d \le 0 \\ \min\left\{\dfrac{b_i}{d_i} : d_i\right\}, & \text{в іншому випадку} \end{cases}.$$

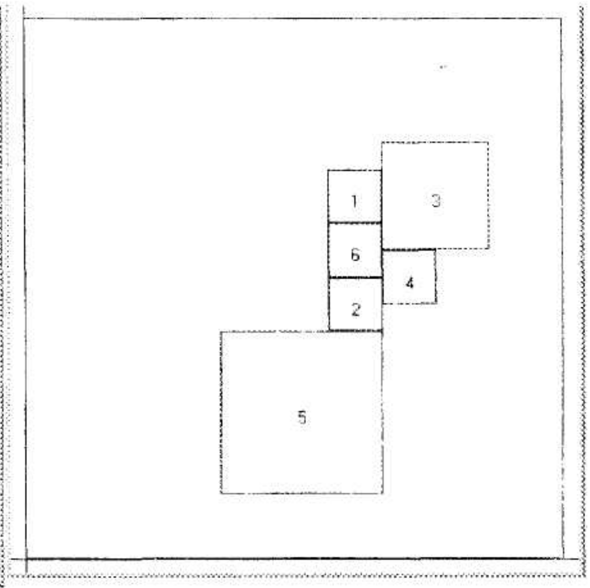
$$b = b_2 - A_2 Z^k, \quad d = A_2 d_k.$$

Обчислювальний експеримент. Наведений алгоритм реалізовано програмно. На рис. 1 зображено результат роботи методу G-проекції, задачі оптимізації розміщення прямокутних об'єктів на прямокутній області. Тестова функція цілі – сума квадратів відстані між прямокутними об'єктами (2).

Кількість об'єктів – 6.

Значення функції цілі у початковій точці $\chi(Z^0) = 104.069$, в кінцевій точці – $\chi(Z^*) = 34.000$. Розв'язок отримано за : 0,141 с





а) Початкове наближення *б) Кінцевий розв'язок*

Рис. 1. Задача мінімізації суми квадратів відстаней до точки

Початкове наближення:

x1	6.00	y1	8.00
x2	6.00	y2	4.00
x3	8.00	y3	8.00
x4	9.00	y4	5.00
x5	4.13	y5	1.87
x6	6.00	y6	6.00

Значення фунції цілі $f(z) = 104.069$.

Результат:

x1	6.13	y1	6.69
x2	6.13	y2	4.69
x3	7.63	y3	6.69
x4	7.13	y4	5.19
x5	5.13	y5	2.69
x6	6.13	y6	5.69

Значення функції цілі $f(z) = 34.000$.

Висновки.

Було проведено порівняння даного методу з методом проекції Розена, в результаті чого було відмічено, що цей метод знаходить розв'язок набагато швидше та краще, ніж метод Розена. Крім того, цей метод можна використовувати в таких актуальних задачах , як задачі мінімізації довжини зайнятої прямокутниками напівскінченної полоси. Для цього необхідно використати функцію цілі $f(Z) = \min \max_{\xi_i}(\xi_i + l_i)$ та перетворити обмеження (4) таким чином:

$$\xi_k^j \ge \frac{l_k^j}{2}, \quad k = 1, 2; \; j = 1, \ldots, m.$$

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Svetlana I. Yremchuk, Lidia V. Ruduyk.* Practical solution of problem of rectangular physical field sources arrangement in rectangle. 2002.
2. *Жовновский Д.О., Рудюк Л.В.*, Применение метода проекции градиента Розена для решения задачи оптимизации размещения источников физического поля в случае, когда область размещения и источники имеют форму n-мерных прямоугольников // Сборник научных трудов по материалам 4-го молодёжного форума "Радиоэлектроника и молодёжь в 21 веке". Ч. 2. – Харьков, 2000. С. 34–35.
3. *Яремчук С.І., Жовновський Д.О., Співак А.В.* Модифікація методу умовного градієнта для розв'язання задач оптимального розміщення джерел фізичних полів // Вісник ЖІТІ / Технічні науки. – 1999. – № 9. – С. 248–253.
4. *Власенко О.В., Співак А.В., Яремчук С.І.* Метод умовного градієнта для оптимального розташування джерел фізичних полів // Вісник ЖІТІ / Технічні науки. – 1998. – № 7. – С. 248–253.
5. *Жовновський Д.О., Рудюк Л.В., Саваневіч К.Є., Яремчук С.І.* Оптимізація розміщення джерел фізичного поля модифікованим методом Розена // Вісник ЖІТІ / Технічні науки. – 2000. – № 13. – С. 188–191.
6. *Яремчук С.І., Рудюк Л.В.* Оптимізація розміщення прямокутник джерел фізичного поля в прямокутнику // Вісник ЖІТІ / Технічні науки. – 2001.

СТЕПАНОВ Олександр Петрович – магістрант кафедри програмного забезпечення обчислювальної техніки Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:
- мінімаксні задачі;
- програмування на ВСВ .

ЯРЕМЧУК Світлана Іванівна – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри програмного забезпечення обчислювальної техніки Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:
- екстремальні задачі;
- математичне моделювання.

Подано 01.11.2004