УДК 621.372.061:517.518.45

О.І. Рибін, д.т.н., проф.
О.Б. Шарпан, к.т.н., доц.
Національний технічний університет України „КПІ”

АЛГОРИТМИ ФОРМУВАННЯ МАТРИЧНИХ ОПЕРАТОРІВ ДИСКРЕТНИХ ОРТОГОНАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ REX ТА COREX

Запропоновані прості алгоритми формування матричного оператора ортогональних дискретних CoREX та REX-перетворень з дійсним ядром.

Вступ

Перетворення з дійсним ядром знаходять все більш широке застосування в сучасній медичній практиці [1] внаслідок їх зручності при стисненні, архівації та передачі сигналів. Різні перетворення мають різну чутливість для різних діагностик і класів сигналів. Тому, з одного боку, для відомих ортогональних перетворень слід проводити дослідження для визначення ефективності їх використання, а з іншого боку, – поповнювати ряд існуючих перетворень новими.

В роботі [2] було запропоновано сімейство нових ортогональних перетворень REX з дійсним ядром. Позитивною властивістю цього перетворення (як і спорідненого з ним CoREX) є можливість підстроювання під аналізований клас сигналів зміною максимального степеня експоненти, знака та характеру (дійсний, уявний, комплексний) степеня. Але таке підстроювання вимагає простого та швидкого алгоритму формування матричного оператора $\overline{\overline{REX_n}}$ довільного формату. Тому доцільно розглянути алгоритм формування такого оператора.

Алгоритм формування матричних операторів

У дискретній формі запису перетворення REX має такий вигляд:

$$\begin{aligned} \overline{X_\zeta} &= \overline{\overline{REX_n}}\,\overline{x_t}, \\ \overline{x_t} &= \overline{\overline{REX_n}}^{T}\,\overline{X_\zeta}, \end{aligned} \tag{1}$$

де $\overline{\overline{REX_H}}$ – нормована матриця (оператор) REX-перетворення N-го порядку (

n – ціле); T – знак транспонування; $\overline{X_\xi}, \overline{x_t}$ – відповідно стовпці дискретів (амплітуд) трансформант REX-перетворення та відліків сигналу в натуральних координатах розміру NX1

Базовими функціями REX-перетворення є скокові кусочно-експоненціальні функції, такі, що:

$$\mathrm{signRex_w}(n,t) = W(n,t), \tag{2}$$

де $W(n,t)$ – функція Уолша при впорядкуванні її за Карчмаржем.

Матриця $\overline{\overline{REX}}$ утворюється добутком матриць:

$$\overline{\overline{rex}} \otimes \overline{\overline{wal}} = \overline{\overline{REX}} \tag{3}$$

де $\overline{\overline{wal}}$ – матриця відліків функцій Уолша, впорядкованих за Карчмаржем;

$\otimes$ – знак множення матриць, при якому кожен елемент R_{ij} матриці $\overline{\overline{REX}}$ одержують множенням елементів r_{ij} матриці $\overline{\overline{rex}}$ та Wij матриці $\overline{\overline{wal}}$ с тими самими номерами рядків і стовпців.

Формування допоміжної матриці $\overline{\overline{rex}}$ виконують за наступним алгоритмом.

1. Нульовий рядок матриці $\overline{\overline{rex}}$ утворено відліками функції $\exp\{0t\}$ на всьому інтервалі періоду $T = [0,1)$.

2. Перший рядок матриці $\overline{\overline{rex}}$ утворено дискретними відліками двох періодів $T \in \left[0, \tfrac{1}{2}\right)$ експоненціальної функції $\exp\{\alpha t\}$, де α – довільне дійсне, уявне або комплексне число, надання якого

для перетворення REX визначає властивості одержуваного в (1) спектра трансформант $\overline{X}_\xi$. Тут максимальний степінь експоненти дорівнює $\alpha/2$.

3. Другий рядок матриці $\overline{\overline{rex}}$ утворено тією самою періодичною функцією, але посунутою на чверть періода $T = 1$, тобто на 1/4.

4. Третій рядок матриці $\overline{\overline{rex}}$ утворено відліками чотирьох періодів функції $\exp\{\alpha t\}$ (максимальний степінь експоненти становить $\alpha/4$).

5. Четвертий–шостий рядки матриці $\overline{\overline{rex}}$ утворено посувом третього рядка на восьму частину періода, тобто 1/8.

6. Сьомий рядок матриці $\overline{\overline{rex}}$ утворено вже вісьмома періодами функції $\exp\{\alpha t\}$ з максимальним степенем α/8, а восьмий–одинадцятий рядки – посувом сьомого рядка на 1/16 і т.ін.

Після формування матриці $\overline{\overline{rex}}$ і реалізації добутку (3) одержимо перетворення $\overline{\overline{REX}}$. При цьому залежно від значення α сума квадратів відліків функції $\mathrm{Rex}(n,t)$ (тобто рядків матриці $\overline{\overline{REX}}$) буде для того самого рядка іншою. Тому при використанні для обчислень (1) перетворення REX доцільним є нормування функції $\mathrm{rex}(n,t)$ або матриць $\overline{\overline{REX}}$.

Добуток:

$$\overline{\overline{REX}}\,\overline{\overline{REX}}^T = Diag\varepsilon_i^2, \qquad (4)$$

де $Diag\varepsilon_i^2$ – діагональна матриця, кожен елемент якої d_{ij} містить енергію ε_i^2 дискретного сигналу $\mathrm{Rex}(i, n\Delta t)$. Поділивши кожен рядок матриці $\overline{\overline{REX}}$ на діюче значення сигналу ε_i, одержимо нормовану матрицю $\overline{\overline{REX_n}}$, для якої вірно:

$$\overline{\overline{REX_n}}\,\overline{\overline{REX_n}}^T = \overline{\overline{REX_n}}^T\,\overline{\overline{REX_n}} = \overline{\overline{E}}, \qquad (5)$$

де $\overline{\overline{E}}$ – одинична матриця.

На кроці нормування і закінчується формування матриці (дискретного оператора) ортогонального REX-перетворення із впорядкуванням знаків функції $\mathrm{Rex}(n,t)$ за Карчмаржем, що, як видно з запропонованого алгоритму, складно.

З рівняння (5) (другий добуток) можна зробити висновок, що базовими функціями можуть бути не тільки рядки матриці $\overline{\overline{REX_n}}$, але й рядки матриці $\overline{\overline{REX_n}}^T = \overline{\overline{CoREX_n}}$. Функції $\mathrm{CoRex}(n,t)$ відрізняються від функцій $\mathrm{Rex}(n,t)$, що є наслідком асиметрії матриці $\overline{\overline{REX_n}}$ (на відміну від операторів дискретних перетворень Фур'є, Уолша і т.ін, для яких такі оператори є симетричними матрицями). Приклад матриці $\overline{\overline{REX_n}}$ формату $N = 8$ при $\alpha = 4\ln 2$ наведено у таблиці 1. Стовпці цієї матриці є дискретними відліками інших базових функцій ортогонального перетворення з дійсним ядром $\mathrm{CoRex}(n,t)$.

Впорядкування функцій Уолша за Карчмаржем зручне тим, що зі зростанням номера рядка (номеру функції) збільшується її основна частота при розкладі функції в ряд Фур'є. Цього не можна сказати про функції $\mathrm{Rex}(n,t)$, оскільки залежно від значення показника степеня експоненти α форма, наприклад, першої трансформант (після нормування) змінюється від форми , що співпадає з формою функції Уолша ($\alpha = 0$) до двох δ -імпульсів ($\alpha \to \infty$).

З табл. 1 видно також, що

$$sign\mathrm{CoRex}_{\mathrm{w}}(n,t) = wal(n,t).$$

Таблиця 1

$1/\sqrt{8}$	$1/\sqrt{8}$	$1/\sqrt{8}$	$1/\sqrt{8}$	$1/\sqrt{8}$	$1/\sqrt{8}$	$1/\sqrt{8}$	$1/\sqrt{8}$
$1/\sqrt{170}$	$2/\sqrt{170}$	$4/\sqrt{170}$	$8/\sqrt{170}$	$-1/\sqrt{170}$	$-2/\sqrt{170}$	$-4/\sqrt{170}$	$-8/\sqrt{170}$

$4/\sqrt{170}$	$8/\sqrt{170}$	$-1/\sqrt{170}$	$-2/\sqrt{170}$	$-4/\sqrt{170}$	$-8/\sqrt{170}$	$1/\sqrt{170}$	$2/\sqrt{170}$
$1/\sqrt{20}$	$2/\sqrt{20}$	$-1/\sqrt{20}$	$-2/\sqrt{20}$	$1/\sqrt{20}$	$2/\sqrt{20}$	$-1/\sqrt{20}$	$-2/\sqrt{20}$
$2/\sqrt{20}$	$-1/\sqrt{20}$	$-2/\sqrt{20}$	$1/\sqrt{20}$	$2/\sqrt{20}$	$-1/\sqrt{20}$	$-2/\sqrt{20}$	$1/\sqrt{20}$
$2/\sqrt{20}$	$-1/\sqrt{20}$	$-2/\sqrt{20}$	$1/\sqrt{20}$	$-2/\sqrt{20}$	$1/\sqrt{20}$	$2/\sqrt{20}$	$-1/\sqrt{20}$
$2/\sqrt{20}$	$-1/\sqrt{20}$	$2/\sqrt{20}$	$-1/\sqrt{20}$	$-2/\sqrt{20}$	$1/\sqrt{20}$	$-2/\sqrt{20}$	$1/\sqrt{20}$
$1/\sqrt{8}$	$-1/\sqrt{8}$	$1/\sqrt{8}$	$-1/\sqrt{8}$	$1/\sqrt{8}$	$-1/\sqrt{8}$	$1/\sqrt{8}$	$-1/\sqrt{8}$

З іншого боку, формування матриць (операторів) дискретного перетворення Уолша є найпростішим при впорядкуванні за Адамаром [3]. Але найголовнійшим для подальших обчислень є те, що при розв'язанні диференційних рівнянь рівноваги в області трансформант при впорядкуванні функцій за Адамаром (як функції Уолша, так і $\mathrm{Rex}(n,t)$ та $\mathrm{CoRex}(n,t)$) обчислювальна схема зводиться до формування і обернення блочно-діагональної матриці. Це дозволяє проводити обчислення для окремих груп трансформант (однієї, двох, чотирьох і т.д.), що є значно більш зручним, ніж розв'язувати різницеві диференційні рівняння в області натуральних координат [4]–[6].

Тому важливим є створення алгоритму формування матриць $\overline{\overline{REX_H}}$ перетворення при впорядкуванні функцій $\mathrm{Rex}(n,t)$ за Адамаром.

Формування такої матриці слід виконувати одночасно як для допоміжної функції $\overline{\overline{rex}}$ в (3), так і для множника $\overline{\overline{wal}} = \overline{\overline{Had}}$ при зміні порядків матриці від $n_0 = 1$ до $n_N = N$. Нехай $\beta = \alpha/N$ є найменшим степенем експоненти, яка періодично повторюється на інтервалі часу $T \in [0,1)$.

Тоді для $n_0 = 2^0 = 1$ рівняння (3) має вигляд:

$$[1] \otimes [1] = 1.$$

Для $n_1 = 2^1 = 2$ одержимо $\overline{\overline{rex_1}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\overline{\overline{Had_1}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$,

$$\overline{\overline{rex_1}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \overline{\overline{Had_1}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

де перший рядок одержано періодичним продовженням відліку $\exp\{0t\}$, а другий – періодичним повторенням відліку $\exp\{\beta t\}$ для $t = 0$ та $t = 1/2$. В точці $t = 1/2$ маємо скок від $\exp\{\beta/2\}$ до $\exp\{0\}$ і той відлік, що правіше скоку і є другою одиницею.

Для $n_2 = 2^2 = 4$ матриця $\overline{\overline{Had_2}}$, одержана як добуток Кронекера,

$$Had_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Theta \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

а $\overline{\overline{rex_2}}$ – періодичним повторення (до формату 4) перших двох рядків та появою третього і четвертого рядка, які утворено відліками двох функцій $\exp\{2\beta t\}$ і посувом цих експонент ліворуч на інтервал, що дорівнює половині області визначення однієї експоненти відповідно.

Подальшу матрицю ($n_3 = 8$) $\overline{\overline{Had_3}}$ одержимо Кронекеровим множенням $\overline{\overline{Had_2}}$ на матрицю $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, перші чотири рядки слід повторити двічі й визначити рядки 5–8-й (з номерами 4–7).Таким чином, для формування матриці $\overline{\overline{rex}}$ необхідно сформувати рядки, що вміщують відліки експонент з різними $m\beta$, які (з кратністю 2^k) повторюються в рядках і (залежно від формату матриці N) повторити ці експоненти до повного заповнення рядка. Тому основним для формування матриці $\overline{\overline{rex}}$ є закономірність, за якої визначається максимальний степінь експоненти в залежності від номеру рядка.

Так, для $n_0 = 1$ маємо степінь 0. Для $n_1 = 2$ – степіні $0, \beta$, а для $n_2 = 4$ – степені $0,\ \beta,\ 2\beta,\ 2\beta_1$, де β_1 – означає, що відповідні експоненти ще й посунуті на інтервал, що дорівнює ½ області визначення експонент $e^{2\beta t}$. Інакше кажучи, для $n_2 = 4$ степені 0 відповідає рядок [1 1 1 1], степені β – рядок [1 1 1 1] , степені 2β – [1 2 1 2] , а степені $2\beta_1$ – [2 1 2 1].

Для $n_3 = 8$ маємо степені експонент рядків $0,\ \beta,\ 2\beta,\ 2\beta_1,\ 4\beta,\ 2\beta_1,\ 4\beta_1,\ 2\beta_1$, а при $n_4 = 16$ до цих рядків (які двічі повторені у часі у порівнянні з випадком $n_3 = 8$) додається ще 16–31 рядки з експонентами $8\beta,\ 2\beta_1,\ 4\beta_1,\ 2\beta_1,\ 8\beta_1,\ 2\beta_1,\ 4\beta_1,\ 2\beta_1$. Шукана послідовність степенів легко піддається формалізації. Так, для рядків 16–31 максимальний степінь 8β . Маємо:

$$8\beta, 8\beta_1 \to 8\beta, 4\beta_1, 8\beta_1, 4\beta_1 \to 8\beta, 2\beta_1, 4\beta_1, 2\beta_1, 8\beta_1, 2\beta_1, 4\beta_1, 2\beta_1,$$

а для рядків 32–64:

$$16\beta, 16\beta_1 \to 16\beta, 8\beta_1, 16\beta_1, 8\beta_1 \to 16\beta, 4\beta_1, 8\beta_1, 4\beta_1, 16\beta_1, 4\beta_1, 8\beta_1, 4\beta_1 \to$$
$$\to 16\beta, 2\beta_1, 4\beta_1, 2\beta_1, 8\beta_1, 2\beta_1, 4\beta_1, 2\beta_1, 16\beta_1, 2\beta_1, 4\beta_1, 2\beta_1, 8\beta_1, 2\beta_1, 4\beta_1, 2\beta_1$$

Наприклад для N = 16 шостий рядок (степінь 2β) одержимо з $[e^{\beta}\,1\,e^{\beta}\,1]$ чотирикратним повторенням $[e^{\beta}\,1\,e^{\beta}\,1\,e^{\beta}\,1\,e^{\beta}\,1\,e^{\beta}\,1\,e^{\beta}\,1\,e^{\beta}\,1\,e^{\beta}\,1]$; для п'ятого рядка $[\chi\ \chi\ \chi\ \chi]$, де $\chi = [1\ \ e^{\beta}\ \ e^{2\beta}\ \ e^{3\beta}]$, а для сьомого рядка (з номером 6) $[\delta\ \delta\ \delta\ \delta]$, де $\delta = [e^{2\beta}\ \ e^{3\beta}\ \ 1\ \ e^{\beta}]$. Після обчислень за (3) $\overline{\overline{\mathrm{Rex}}}$ та нормування (аналогічно нормуванню при впорядкуванні знаків за Карчмаржем) одержимо матрицю $\overline{\overline{\mathrm{Rex}}}_n$, впорядковану за Адамаром. Відповідні відліки функції $\mathrm{CoRex}(n, t)$ утворюють стовпці одержаної матриці.

Висновки

Запропоновані алгоритми формування матриць перетворень REX прості й зручні при ручному формуванні матриць довільних порядків, а також (внаслідок формалізації) легко програмуються при використанні ЕОМ.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Абакумов В.Г., Рибін О.І., Сватош Й.* Біомедичні сигнали. Генезис, обробка, моніторинг. – К.: Нора-принт, 2001. – 516 с.
2. *Рыбин А.И.* Ортогональное экспоненциальное преобразование REX // Радиоэлектроника. – 2004. – № 2 – С. 3–9.
3. *Ахмед Н. Рао К.Р.* Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов: Пер. с англ. / Под ред. И.Б. Фоменко. – М: Связь, 1980. – 248 с.
4. *Рыбин А.И.* Анализ линейных цепей в базисе преобразований Уолша // Радиоэлектроника. – 2004. – № 5. – С. 36–41.
5. *Рыбин А.И.* Метод модификаций для анализа линейных цепей в базисе функций Уолша // Радиоэлектроника. – 2004. – № 6. – С. 36–41.
6. *Рыбин А.И., Пилинский В.В., Родионова М.В.* Анализ электрических цепей в натуральных координатах на базе ортогональных преобразований с действительным ядром // Праці інституту електродинаміки НАНУ: Зб. наукових праць. – 2004. –№ 1(7). – С. 7–12.

РИБІН Олександр Іванович – доктор технічних наук, професор кафедри теоретичних основ радіотехніки Національного технічного університету України „КПІ”.

Наукові інтереси:

– теорія та методи обробки сигналів;

– медичні електронні прилади та системи.

ШАРПАН Олег Борисович – кандидат технічних наук, доцент кафедри теоретичних основ радіотехніки Національного технічного університету України „КПІ”.

Наукові інтереси:
– фазові радіотехнічні та вимірювальні системи;
– медичні електронні прилади та системи.

Подано 11.11.2004

Рибін О.І., Шарпан О.Б. Алгоритми формування матричних операторів дискретних ортогональних перетворень rex та corex

Рыбин А.И., Шарпан О.Б. Алгоритмы формирования матричных операторов дискретных ортогональных преобразований rex та corex

Rybin A.I., Sharpan O.B. The algorithmes of construction of discret orthogonal rex and corex transfom matrix operator

УДК 621.372.061:517.518.45

Алгоритми формування матричних операторів дискретних ортогональних перетворень rex та corex / О.І. Рибін, О.Б. Шарпан

Запропоновані прості алгоритми формування матричного оператора ортогональних дискретних CoREX та REX-перетворень з дійсним ядром.

УДК 621.372.061:517.518.45

Алгоритмы формирования матричных операторов дискретных ортогональных преобразований rex та corex / А.И. Рыбин, О.Б. Шарпан

Предложены простые алгоритмы формирования матричного оператора ортогональных дискретных CoREX та REX-преобразований с действительным ядром.

УДК 621.372.061:517.518.45

The algorithmes of construction of discret orthogonal rex and corex transfom matrix operator / A.I. Rybin, O.B. Sharpan

The algorithmes of discret orthogonal rex and corex transforms with real kernel are proposed.