УДК 621.396

І.О. Коваленко к.т.н., доц.
Житомирський державний технологічний університет
К.Б. Тимошенко, старший офіцер
Житомирський військовий інститут радіоелектроніки ім. С.П. Корольова

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ІОНІЗОВАНОГО СЕРЕДОВИЩА

Розглянуто математичну модель розподілення електронної концентрації в іонізованому середовищі. Запропоновано описувати розподілення електронної концентрації в іонізованому середовищі поліномом другого порядку у вибраній системі координат. Показано, що, залежно від параметрів іонізованого середовища розподілення електронної концентрації, можна представити шматочно-аналітичною апроксимацією різних поверхонь другого порядку.

Постановка проблеми та аналіз джерел досліджень. Для описування кількісної оцінки ефектів, які виникають при поширенні електромагнітних хвиль у земній атмосфері, необхідно знати її електричні властивості. В атмосфері Землі можна виділити дві, які істотно відрізняються за своїми електричними властивостями, області: нижню, яка прилягає до поверхні Землі – тропосферу, та іоносферу, що знаходиться вище 60 км, яка простягається до декількох радіусів Землі [1].

Тропосферу, яка є сумішкою нейтральних газів, можна розглядати як недіспергіруючий ізотропний діелектрик.

В іоносфері істотну роль відіграє іонізація повітря, обумовленна як природними причинами (наприклад діями ультрафіолетового випромінюванням Сонця), так і штучними (дією іонізованим випромінюванням висотних ядерних вибухів при їх застосуванні й тепловим випромінюванням об′єктів, які рухаються, та інших факторів).

Іоносферу в УКХ діапазоні можна розглядати як неоднорідне, анізотропне середовище.

Далі основна увага буде приділятися математичній моделі іоносфери.

Для описання висотного профілю електронної концентрації N(z) застосовуються різні моделі залежності, які передають найбільш характерні особливості побудови іоносфери. У більшості випадків модель обмежуються функціями з одним максимумом і трьома–чотирма вільними параметрами, за допомогою яких можна керувати положенням максимуму Z_{max}, електронною концентрацією в максимумі – $N(z_{max})$, положенням початку іонізованої області Z_0, крутизною спаду залежності N(z). Верхню частину іоносфери, що вище Z_{max}, зазвичай апроксимують експоненціальною функцією, а нижню ділянку $Z < Z_0$ – параболою. Мають свідчення і про біоекспоненціальні моделі, які представляють іоносферу у вигляді однієї формули (функції) [1].

Такі моделі можливо використовувати до природної іоносфери. Однак при врахуванні впливу штучних іонізацій на земну атмосферу такого описування недостатньо, тому що при польоті літальних апаратів відіграють важливу роль не тільки висотні профілі, а також розподілення електронної концентрації в різних напрямках від літального апарату, що рухається.

Постановка завдання. Пропонується більш детальний математичний опис тонкої структури іоносфери для вивчення розподілу електронної концентрації та її градієнтних змін в різних напрямках при польоті літальних апаратів.

Виклад основного матеріалу досліджень. У цій статті пропонується розподіл електронної концентрації в іонізованому середовищі представляти поліномом другого порядку в прямокутній системі координат (0xyz) у вигляді:

$$N(x,y,z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0. \quad (1)$$

Як відомо, кожний поліном другого ступеня від трьох змінних

$$F(x,y,z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2. \quad (2)$$

є квадратична форма старших членів поліному, а

$$\varphi(x,y,z) = a_1x + a_2y + a_3z. \quad (3)$$

Лінійна форма, яка складається з членів першого порядку поліному N(x, y, z). Тоді

$$N(x,y,z) = F(x,y,z) + 2\varphi(x,y,z) + a_0.$$

Введемо таке позначення:

$$A_N = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}; \qquad A_F = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Матрицю A_N – назвемо великою матрицею рівняння (1), матрицю A_F – малою матрицею. Ранги цих матриць назвемо відповідно великим і малим рангом поверхонь, які задаються рівнянням (1), та позначимо їх відповідно через R і r. Детермінанти матриць A_N і A_F позначимо відповідно через Δ і δ.

Якщо поверхня другого порядку задана рівнянням (1) відносно якоїсь прямокутної системи координат 0xyz, то на крайній випадок, як відомо [2], завжди існує така прямокутна система координат 0x′y′z′, осі якої мають головні напрямки. В цій системі координат рівняння поверхонь (1) має вигляд:

$$N\left(x^{'}, y^{'}, z^{'}\right) = \lambda_1 x^{'2} + \lambda_2 y^{'2} + \lambda_3 z^{'2} + 2a_1^{'}x^{'} + 2a_2^{'}y^{'} + 2a_3^{'}z^{'} + a_0 = 0.$$

Почнемо з центрального випадку $\delta \neq 0$, r = 3. При цьому $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$. Якщо перенести початок координат “0”системи 0x′y′z′ в єдиний центр поверхні (1), то рівняння (4) прийме вигляд:

$$N\left(x^{'}, y^{'}, z^{'}\right) = N\left(x^{''}, y^{''}, z^{''}\right) = \lambda_1 x^{''2} + \lambda_2 y^{''2} + \lambda_3 z^{''2} + a_0^{'} = 0. \tag{5}$$

Пом'ятаючи, що великий і малий детермінанти Δ і δ – ортогональні інваріанти, для їх визначення можна скористуватися часткою рівняння (5), що дає $\delta = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$, $\Delta = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 a_0^{'}$, таким чином $a_0^{'} = \dfrac{\Delta}{\delta}$.

Кінцевий вигляд рівняння (1) в обраній нами прямокутній системі координат:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0. \tag{6}$$

Тепер є дві можливості: $\Delta = 0$ і $\Delta \neq 0$. Якщо $\Delta=0$, отримуємо дійсний конус другого порядку, якщо серед чисел λ_1, λ_2, λ_3 є числа різних знаків. Перемножуючи, якщо потрібно, обидві частини рівняння (5) на (-1), можемо припустити, що серед його коефіцієнтів λ_1, λ_2, λ_3 є два позитивних та один негативний. Змінивши, якщо необхідно, найменування осей координат та позначивши позитивні коефіцієнти через $\dfrac{1}{a^2}$, $\dfrac{1}{b^2}$, а негативний через $\dfrac{1}{c^2}$, можна представити при $\Delta = 0$ рівняння (6) у вигляді:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

(тут і в подальшому будемо вважати, що α, b, c – позитивні числа). Це канонічне рівняння дійсного конусу.

Помітимо, що $\lambda_1 = \lambda_2$ означає $\alpha = b$. Тоді в цьому випадку отримаємо круговий конус або конус обертання.

Нехай тепер $\Delta \neq 0$. Це означає, що розподіл електронної концентрації описується центральною невираженою поверхнею.

Уявимо рівняння (6) у вигляді:

$$\frac{x^2}{-\frac{\Delta}{\delta\lambda_1}} + \frac{y^2}{-\frac{\Delta}{\delta\lambda_2}} + \frac{z^2}{-\frac{\Delta}{\delta\lambda_3}} = 1. \tag{7}$$

Можливі три цікаві для практики випадки:

а) характеристичні числа мають різні знаки та $\Delta > 0$. Хай λ_1 і λ_2 мають однакові знаки, а λ_3 – протилежний їм знак. Тоді, вважаючи $-\dfrac{\Delta}{\delta\lambda_1} = a^2$, $-\dfrac{\Delta}{\delta\lambda_2} = b^2$, $\dfrac{\Delta}{\delta\lambda_3} = c^2$ дає рівнянню (7) вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Це – канонічне рівняння однополосного гіперболоїда;

б) всі характеристичні числа мають однаковий знак і $\Delta < 0$. Тоді вважаємо:

$-\dfrac{\Delta}{\delta\lambda_1} = a^2$, $-\dfrac{\Delta}{\delta\lambda_2} = b^2$, $-\dfrac{\Delta}{\delta\lambda_3} = c^2$, і отримуємо канонічне рівняння дійсного еліпсоїда:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Якщо $\alpha = b = c$ отримуємо сферичну поверхню;

в) характеристичні числа мають різні знаки і $\Delta < 0$. Припустимо, що числа λ_1 і λ_2 – мають однакові знаки, а λ_3 – протилежний їм знак. Вважаємо, що $-\dfrac{\Delta}{\delta\lambda_1} = a^2$, $-\dfrac{\Delta}{\delta\lambda_2} = b^2$, $\dfrac{\Delta}{\delta\lambda_3} = c^2$, отримаємо рівняння:

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Це канонічне рівняння двополосного гіперболоїда.

Таким чином, розподілення електронної концентрації може бути представлено центральною поверхнею другого порядку, котра може бути або конусом, або еліпсоїдом, або сферою, або гіперболоїдом (однополосним або двополосним).

Перейдемо до випадку поверхні рангу r = 2.

Можна показати, що в цьому випадку рівняння (1) визначає при $\Delta \neq 0$ (R = 4) параболоїд еліптичний, якщо $\Delta < 0$, і гіперболічний, якщо $\Delta > 0$ [3].

В першому випадку рівняння

$$2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{g}$$

описує еліптичний параболоїд, а в другому – гіперболічний параболоїд.

Параметри p і g параболоїда виявляються через ортогональні інваріанти Δ, λ_1, λ_2. Рівність $\lambda_1 = \lambda_2$ означає, що розподілення електронної концентрації представляє собою еліптичний параболоїд з рівними параметрами p = g, тобто параболоїд обертання.

Якщо $\Delta = 0$, і $a_3^{'} = 0$, великий ранг $R \leq 3$ і рівняння (5) обере вигляд:

$$\lambda_1 x^{'2} + \lambda_2 y^{'2} + 2a_1^{'} x^{'} + 2a_2^{'} y^{'} + a_0 = 0.$$

Використовуючи до цього рівняння перетворення паралельного переносу, можна отримати [2]:

$$\lambda_1 x^{''2} + \lambda_2 y^{''2} + a_0^{'} = 0. \tag{8}$$

При великому рангу R = 3 і $a_0^{'} \neq 0$ рівняння (8) задає циліндричну поверхню другого порядку. У канонічному вигляді ця поверхня описується рівнянням:

$$\frac{x^{''2}}{a^2} \pm \frac{y^{''2}}{b^2} = 1$$

та являє еліптичний або гіперболічний циліндр.

Рівність $\lambda_1 = \lambda_2$ є ознакою того, що розподілення електронної концентрації є круговим циліндром.

Перейдемо до поверхні рангу r = 1. Для цих поверхонь лише одне характеристичне число, нехай $\lambda_2 \neq 0$ і $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$. Для поверхонь рангу r = 1 завжди $R \leq 3$. В цьому випадку поверхня обертання описується гіперболічним циліндром.

Висновки. Таким чином, розподілення електронної концентрації в іонізованому середовищі можна описати:

а) дев'ятьма класами поверхонь другого порядку: еліпсоїдом обертання, сферою, гіперболоїдами однополосними і двополосними, конусами, параболоїдами еліптичними і гіперболічними, а також гіперболічними, параболічними та еліптичними циліндрами.

б) шматочною-аналітичною апроксимацією, перш за все у вигляді сукупності гіперболічної, параболічної та сферичною поверхні другого порядку, що буде давати більш точні результати при обробці радіолокаційної інформації, яка поступає від рухомих літальних апаратів.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Кравцов Ю.А., Фейзумен З.И., Виноградов А.Г.* Прохождение радиоволн через атмосферу Земли. – М. Радио и связь, 1983.
2. *Александров П.С.* Лекции по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1968.
3. Курс высшей математики / Под ред. проф. П.И. Романовского. – 1964.

КОВАЛЕНКО Іван Олексійович – кандидат технічних наук, доцент Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:
– нелінійні явища та моделі;
– кібернетика;
– радіотехніка та радіотелекомунікації.

ТИМОШЕНКО Костянтин Борисович – старший офіцер Житомирського військового інституту радіоелектроніки ім. С.П. Корольова.

Наукові інтереси:
– нелінійні явища та моделі;
– методи нелінійної оптимізації;
– радіотехніка та радіотелекомунікації.

Подано 11.11.2004

Коваленко І.О., Тимошенко К.Б. Математична модель іонізованого середовища
Коваленко И.А., Тимошенко К.Б. Математическая модель ионизированной среды
Kovalenko I.A., Timoshenko K.B. The mathematical model of ionizing environment

УДК 621.396.963

Математична модель іонізованого середовища / Коваленко І.О., Тимошенко К.Б.

Розглянута математична модель розподілення електронної концентрації в іонізованому середовищі. Запропоновано описувати розподілення електронної концентрації в іонізованому середовищі поліномом другого порядку у вибраній системі координат. Показано, що залежно від параметрів іонізованого середовища розподілення електронної концентрації можна представити шматочно-аналітичною апроксимацією різних поверхонь другого порядку.

УДК 621.396.963

Математическая модель ионизированной среды / И.А. Коваленко, К.Б. Тимошенко // Вісник ЖДТУ/Технічни науки.-2004.-№ -Библиогр.: 3 назв.

Рассмотрена математическая модель распределения электронной концентрации в ионизированной среде. Предложено описать распределение электронной концентрации в ионизированной среде полиномом второго порядка в прямоугольной системе координат. Показано , что в зависимости от параметров ионизированной среды распределение электронной концентрации можно представить кусочно-аналитической апроксимацией различных поверхностей второго порядка.

The mathematical model of ionizing environment. / I.A. Kovalenko, K.B. Timoshenko // Вісник ЖДТУ/Технічни науки.-2004.-№ - Refs.: 3 titles

Mathematical model of the electronical concentration distribution in ionizing environment is considered. It was offered to describe the distribution of electronical concentration in ionizing environment with polinom of the second order in rectangular system of co-ordinates. It was showed, that in dependence of ionizing environment parameters, the distribution of electronical concentration can be presented as a pieced-apolitical approximation of the different surfaces of the second order.