

УДК 519.67

Ю.О. Шаповалов, аспір.  
С.І. Яремчук, к.ф.-м.н., доц.

Житомирський державний технологічний університет

ОПТИМІЗАЦІЯ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМОКУТНИХ ОБ'ЄКТІВ НА ОПУКЛІЙ ОБЛАСТІ  
МЕТОДОМ ГІЛОК ТА МЕЖ

*Розглядається задача оптимізації розміщення об'єктів, що мають прямокутну форму на опуклій області. Множина припустимих розв'язків задачі розбивається на опуклі підмножини. Для пошуку розв'язку задачі пропонується використати метод гілок та меж.*

**Вступ.** Задачі оптимізації розміщення виникають у різних сферах діяльності людини. Розроблено багато різних підходів та методів, але універсального ефективного методу розв'язання таких задач не існує. На практиці найчастіше застосовують наближені методи, що дозволяють знайти деяке раціональне розміщення. В даному дослідженні розглядається метод, що дозволяє отримати оптимальний розв'язок задачі оптимізації розміщення прямокутних об'єктів на опуклій області.

**Постановка задачі.** Існує  $m$  орієнтованих прямокутників  $(D_1, D_2, \dots, D_m)$ . Кожен прямокутник  $D_i$ ,  $i = \overline{1, m}$  має свої розміри  $L^i (l_1^i, l_2^i)$ . Положення об'єкта визначається координатами його геометричного центра  $Z^i = (\xi_1^i, \xi_2^i)$ . Будь-якому розміщенню об'єктів відповідає вектор  $Z = (Z^1, Z^2, \dots, Z^m)$ . Розміщення  $Z$  є припустимим, якщо всі об'єкти попарно не перетинаються, та не виходять за межі заданої опуклої області  $\Omega$ . Необхідно знайти таке припустиме розміщення  $Z$ , при якому б функція цілі  $\chi(Z)$  досягала свого мінімуму. Тобто маємо задачу:

$$\chi(Z) \rightarrow \min, Z \in G, \quad (1)$$

де  $G$  – множина припустимих розміщень. Вона описується обмеженнями взаємного неперетину прямокутників та належності їх множині  $\Omega$ .

**Аналіз джерел дослідження.** Для знаходження розв'язку задачі (1) було використано наступні підходи.

1. Повний перебір усіх підзадач умовної оптимізації, побудованих певним чином.
2. Направлений перехід у сусідні підмножини [1].
3. Генетичний алгоритм [2], [3], [4], [5].

Серед наведених підходів, тільки повний перебір усіх підзадач гарантує (у випадку опуклості функції цілі) отримання оптимального розв'язку. Але при збільшенні кількості об'єктів, кількість підзадач зростає дуже швидко і для їх розв'язання потрібні значні часові ресурси. Наприклад, для розв'язання задачі оптимізації розміщення п'яти об'єктів методом повного перебору необхідно розв'язати більше ніж  $10^6$  підзадач умовної оптимізації.

**Мета даного дослідження.** Як альтернативу повному перебору для знаходження оптимального розв'язку задачі (1) пропонується використати метод гілок та меж [6].

**Виклад основної частини досліджень.** Умови взаємного неперетину об'єктів можна записати наступним чином:

$$|\xi_1^j - \xi_1^k| \geq \frac{l_1^j + l_1^k}{2} \vee |\xi_2^j - \xi_2^k| \geq \frac{l_2^j + l_2^k}{2}, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad k = \overline{j+1, m}. \quad (2)$$

Область  $\Omega$  – опукла, тому обмеження невиходу об'єктів за межі області задають деяку опуклу множину  $X$ :

$$X = \{Z(Z^1, Z^2, \dots, Z^m), Z^i : D_i \in \Omega, i = \overline{1, m}\}. \quad (3)$$

Вигляд умов невиходу об'єктів за межі області  $\Omega$  залежить від форми цієї області. Якщо  $\Omega$  має вигляд прямокутника, ці умови записуються у вигляді лінійних нерівностей:

$$\frac{l_i^j}{2} \leq \xi_i^j \leq a_i - \frac{l_i^j}{2}, \quad i = \overline{1, 2}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (4)$$

де  $a_1, a_2$  – розміри області  $\Omega$ .

Таким чином, множина припустимих розв'язків  $G$  описується обмеженнями (2),(4).

Завдяки обмеженням (2) множина  $G$  – неопукла та може бути незв'язною, з великою кількістю компонент зв'язності. В загальному випадку функція цілі задачі (1) нелінійна. Задача (1) – це задача нелінійного програмування.

Нехай функція цілі – неперервно диференційована та опукла на (3). Для застосування методів умовної оптимізації необхідно, щоб множина припустимих розв’язків була опуклою.

Множину  $G$  задачі (1) можна подати у вигляді об’єднання опуклих підмножин. Розкривши модулі в системі (2) отримаємо сукупність лінійних нерівностей:

$$\xi_{1^j}^j - \xi_{1^k}^k \geq \frac{I_1^j + I_1^k}{2} \vee \xi_{1^k}^k - \xi_{1^j}^j \geq \frac{I_1^j + I_1^k}{2} \vee \xi_{2^j}^j - \xi_{2^k}^k \geq \frac{I_2^j + I_2^k}{2} \vee \xi_{2^k}^k - \xi_{2^j}^j \geq \frac{I_2^j + I_2^k}{2}, \quad (5)$$

$$j = \overline{1, m-1}, \quad k = \overline{j+1, m}.$$

Для того, щоб пара об’єктів  $(D_j, D_k)$  не перетиналася, необхідно і достатньо, щоб для цієї пари виконувалась хоча б одна з лінійних нерівностей (5). Тобто, включивши в систему по одній нерівності з (5) для кожної пари об’єктів  $(D_j, D_k)$ , ми отримаємо систему з  $\frac{m(m-1)}{2}$  обмежень, що гарантує попарний неперетин об’єктів. Додавши до неї обмеження (4) невиходу за межі області  $\Omega$ , отримаємо опуклу підмножину  $G_j \subset G$ . Перебравши для кожної пари об’єктів усі можливі комбінації чотирьох типів нерівностей з (5), отримаємо  $r$  систем нерівностей, що задають підмножини  $G_j$ , такі що

$$G = \bigcup_{j=1}^r G_j,$$

де  $r = 4C_m^2$  [7].

За розв’язок вихідної задачі (1) можна прийняти кращий з розв’язків наступних підзадач:

$$\chi(Z) \rightarrow \min, Z \in G_i, \quad (6)$$

де  $i = \overline{1, r}$ .

При збільшенні кількості об’єктів кількість підзадач (6) зростає дуже швидко, і, на жаль, вже при  $m > 5$  розв’язати усі підзадачі (6) за прийнятний час неможливо.

Маємо, з одного боку, підзадачу нелінійної оптимізації на опуклій підмножині (6), а з іншого – задачу дискретної оптимізації. Тобто необхідно знайти розв’язок задачі (1) по можливості виключивши з безпосереднього розгляду максимальну кількість підзадач (6).

Підмножини  $G_i$  відрізняються між собою тим, з яких саме обмежень (5), для кожної пари об’єктів, вони побудовані. Кожне з обмежень (5) задає положення об’єкту  $D_j$  відносно  $D_k$ . Для кожної пари об’єктів можливо лише чотири варіанти. У відповідність кожному з цих варіантів проставимо цифри від 0 до 3.

$$\begin{aligned} 0. \quad & \xi_{1^j}^j - \xi_{1^k}^k \geq \frac{I_1^j + I_1^k}{2} - \text{об'єкт } j \text{ знаходиться праворуч об'єкта } k. \\ 1. \quad & \xi_{1^k}^k - \xi_{1^j}^j \geq \frac{I_1^j + I_1^k}{2} - \text{об'єкт } j \text{ ліворуч об'єкта } k. \\ 2. \quad & \xi_{2^j}^j - \xi_{2^k}^k \geq \frac{I_2^j + I_2^k}{2} - \text{об'єкт } j \text{ вище об'єкта } k. \\ 3. \quad & \xi_{2^k}^k - \xi_{2^j}^j \geq \frac{I_2^j + I_2^k}{2} - \text{об'єкт } j \text{ нижче об'єкта } k, \end{aligned} \quad (7)$$

де  $j = \overline{1, m-1}, k = \overline{j+1, m}$ .

Підмножину  $G_i$  можна задати, вказав для кожної пари об’єктів тип нерівності (7), що входить в обмеження підзадачі (6). Таким чином, вектор

$$H(h_{12}, h_{13}, \dots, h_{1m}, h_{23}, h_{24}, \dots, h_{2m}, \dots, h_{m-1m}), \quad (8)$$

де  $h_{ij} = \overline{0, 3}, i = \overline{1, m-1}, j = \overline{i+1, m}$

однозначно задає підмножину  $G_i$ . Кожна координата  $h_{ij}$  вказує на положення об’єкту  $i$  відносно  $j$ . Розмірність вектора (7) визначається таким чином:

$$n = \frac{m(m-1)}{2}.$$

На рис. 1 зображено приклад припустимого розміщення. Лінія, що з'єднує кожен пару прямокутників означає нерівність, що задає обмеження неперетину відповідних об'єктів.

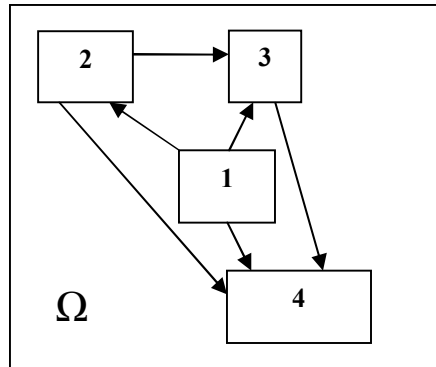


Рис. 1. Приклад припустимого розміщення об'єктів

Для наведеного розміщення побудуємо вектор (8) та відповідні обмеження, що задають підмножину  $G_i$ .

Кількість об'єктів  $m = 4$ , тому розмірність вектора (8) і відповідно кількість нерівностей (7)  $n = 6$ . Вектор (8) має такий вигляд:

$$H(h_{12}, h_{13}, h_{14}, h_{23}, h_{24}, h_{34}).$$

Об'єкт 1 знаходиться: праворуч від 2 ( $h_{12} = 0$ ), нижче за 3 ( $h_{13} = 3$ ), вище за 4 ( $h_{14} = 2$ ).

Об'єкт 2: ліворуч від 3 ( $h_{23} = 1$ ), вище за 4 ( $h_{24} = 2$ ).

Об'єкт 3: вище ніж 4 ( $h_{34} = 2$ ).

Отримали вектор  $H^1(0; 3; 2; 1; 2; 2)$ . Відповідна підмножина  $G_i$  задається наступними обмеженнями:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_1^1 - \xi_1^2 \geq \frac{l_1^1 + l_1^2}{2} \\ \xi_2^3 - \xi_2^1 \geq \frac{l_2^1 + l_2^3}{2} \\ \xi_2^4 - \xi_2^1 \geq \frac{l_2^1 + l_2^4}{2} \\ \xi_1^3 - \xi_1^2 \geq \frac{l_1^2 + l_1^3}{2} \\ \xi_2^2 - \xi_2^4 \geq \frac{l_2^2 + l_2^4}{2} \\ \xi_2^3 - \xi_2^4 \geq \frac{l_2^3 + l_2^4}{2} \end{array} \right. \quad (9)$$

До системи обмежень (9) також додаються обмеження невиходу об'єктів за межі області  $\Omega$ .

При такому розбитті множини  $G$  на підмножини, існують деякі особливості. Легко бачити, що для наведеного на рис. 1 розміщення можна побудувати декілька векторів (8) і, відповідно, систем обмежень. Це означає, що розміщення одночасно належить декільком опуклим підмножинам  $G_i$ . Наприклад можна сказати, що об'єкт 1 знаходиться не праворуч об'єкта 2, а нижче. Зміниться координата  $h_{12}$  вектора і відповідна нерівність в системі обмежень. Тоді маємо  $H^2(3; 3; 2; 1; 2; 2)$ . Також можливі варіанти тлумачення положення об'єкта 2 відносно 4. Тобто при застосуванні наведеного алгоритму розбиття множини  $G = \bigcup_{j=1}^r G_j$ , існують такі опуклі підмножини  $G_i, G_j \subset G$ , для яких  $G_i \cap G_j \neq \emptyset$ , де  $i \neq j$  та  $i, j \in \overline{1, r}$ .

По будь-якому вектору (8) за наведеними правилами можна побудувати відповідну систему обмежень, що задає деяку підмножину  $G_i \subset G$ . Існують вектори (8), які задають несумісні системи

обмежень, тобто  $G_i = \emptyset$ . Наприклад, для задачі розміщення трьох об'єктів вектор  $H(1, 0, 1)$  задає просту підмножину.

При застосуванні методу гілок та меж для отримання глобального мінімуму необхідно, щоб алгоритм розв'язання задачі на опуклій підмножині забезпечував знаходження оптимального розв'язку підзадачі. Це можливо у випадку, коли функція цілі задачі (1) опукла на  $X$ .

Алгоритм методу гілок та меж для задачі (1).

Як початкову множину пропонується обрати  $X^0 = X$ .

Для зменшення кількості підмножин, що розглядаються, при визначенні початкової верхньої межі  $m^*$  доречно отримати деякий припустимий розв'язок  $Z^0$  вихідної задачі (1). Тоді  $m^* = \chi(Z^0)$ . Наприклад це може бути розв'язок підзадачі (6) на будь-якій підмножині  $G_i \neq \emptyset, i \in \overline{1, r}$ . Бажано, щоб розв'язок  $Z^0$  був як найближче до оптимального розв'язку (1).

Основними складовими частинами алгоритму методу гілок та меж є операції оцінювання, зондування та розгалуження. Нижче наведено їх реалізацію для задачі (1).

1. Розгалуження

Операція розгалуження являє собою додавання до системи обмежень, що задає батьківську підмножину  $X_i^{p-1}$  обмеження неперетину для деякої пари об'єктів. Оскільки можливо чотири варіанти обмежень (7), то кожна батьківська вершина, що відповідає підмножині  $X_i^{p-1}$ , розгалужується на чотири вершини, яким відповідають підмножини  $X_0^p, X_1^p, X_2^p, X_3^p$  і так далі, де  $p \in \overline{1, n}$  – відстань до початкової вершини дерева. Індекс  $i \in \overline{0, 3}$  підмножини  $X_i^p$  задає відповідне значення координати  $p \in \overline{1, n}$  вектора (8). Розгалуження починається з першої координати  $h_{12}$  вектора (8).

Виходячи з правила побудови розгалужень, для батьківської множини виконуються наступні умови:

$$G \subset X^0,$$

$$X_i^{p-1} \neq (X_0^p \cup X_1^p \cup X_2^p \cup X_3^p), \text{ але } X_i^{p-1} \supset (X_0^p \cup X_1^p \cup X_2^p \cup X_3^p) \text{ та}$$

$$G \cap X_i^{p-1} = G \cap (X_0^p \cup X_1^p \cup X_2^p \cup X_3^p), p \in \overline{1, n},$$

тобто в процесі розгалуження вилучаються тільки неприпустимі розв'язки. Якщо множина  $X_i^p$  включає обмеження неперетину для усіх пар об'єктів ( $p = n$ ), то  $X_i^p = G_j, j \in \overline{1, r}$ , знайшовши оцінку  $m(G \cap X_i^p)$  буде знайдено припустимий розв'язок задачі (1) (якщо  $X_i^p \neq \emptyset$ ).

Приклад дерева та відповідні значення координат вектора (8) для задачі розміщення трьох об'єктів наведено на рис. 2 (Символом "x" позначено відсутність обмеження на перетин відповідних об'єктів).

2. Оцінювання вершини

Оцінка підмножини  $m(G \cap X_i^p)$  – це мінімум функції цілі на  $X_i^p$ , що отримується в результаті розв'язання наступної задачі нелінійного програмування деяким методом умовної оптимізації

$$m(G \cap X_i^p) = \min_{Z \in X_i^p} \chi(Z). \tag{10}$$

В результаті буде отримано оцінку  $m(G \cap X_i^p)$ , чи з'ясовано, що  $X_i^p = \emptyset$ .

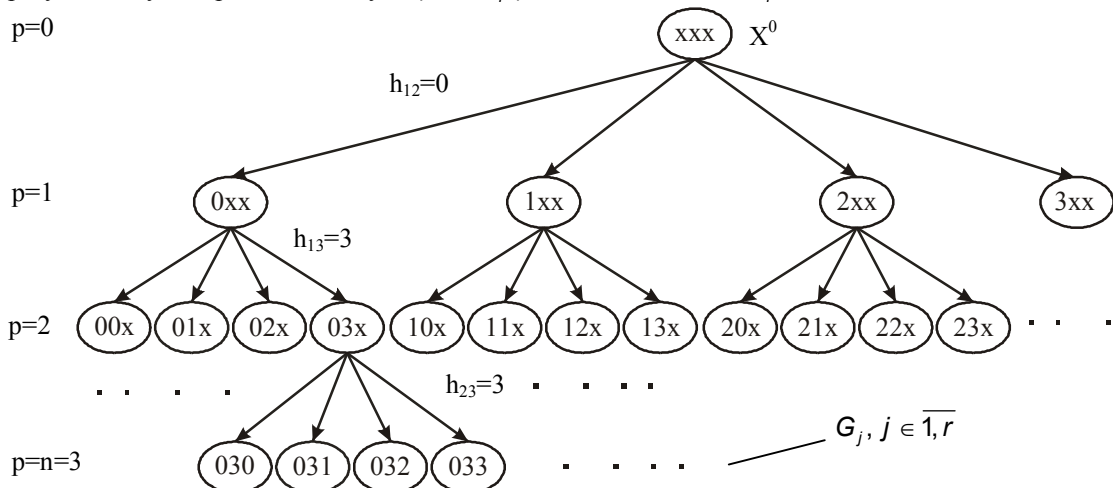


Рис. 2. Приклад побудови дерева

Якщо розміщення, що отримано при оцінюванні «батьківської» вершини, належить підмножині її «нащадка», тобто, якщо  $Z_j^{p-1} \in X_i^p$ , то для знаходження оцінки  $m(G \cap X_i^p)$  підзадача (10) не розв'язується, а відбувається присвоєння:

$$Z_i^p = Z_j^{p-1}, \quad m(G \cap X_i^p) = m(G \cap X_j^{p-1}).$$

3. Зондування вершини. Відбувається у випадку виконання хоча б однієї з умов:

1.  $X_i^p = \emptyset$ .

2.  $m(G \cap X_i^p) \geq m^*$ .

3.  $Z_i^p \in G$ , тобто отримано припустимий розв'язок задачі (1), якщо при цьому  $m(G \cap X_i^p) < m^*$ , то  $m^* = m(G \cap X_i^p)$ .

Враховуючи особливості алгоритму розбиття області  $G$  на підмножини, бажано додатково перевіряти умову: якщо  $X_i^p \subset X_j^p$ , то вершина, що відповідає підмножині  $X_i^p$ , прозондована.

Для перевірки цієї умови реалізовано алгоритм [5], що дозволяє визначити деякі зайві та пусті підмножини  $X_i^p$ :

Для кожної вершини аналізуються перші  $p$  координат вектора (8).

Якщо значення координат  $h_j$  та  $h_k$ , вектора (8), які визначають положення прямокутників  $D_j$  та  $D_k$  відносно  $D_l$ , мають значення 0 та 1 або 2 та 3, де  $l = \overline{1, m-2}$ ,  $j = \overline{l+1, m-1}$ ,  $k = \overline{j+1, m}$  та  $l, j, k \in \overline{1, p}$ , то: якщо  $h_{jk} \neq h_{lk}$ , то  $X_i^p \subset X_j^p$ , вершину, відповідну множині  $X_i^p$ , прозондовано, інакше ( $h_{jk} = h_{lk}$ ) перевіряються координати  $h_{fj}$  та  $h_{fk}$ , де  $f = \overline{l+1, j-1}$ , та  $f \in \overline{1, p}$ : якщо знайдуться координати  $h_{fj}$  та  $h_{fk}$ , що визначають положення прямокутників  $D_j$  та  $D_k$  відносно  $D_f$ , для яких  $h_{fj} = h_{fk}$  та  $h_{fk} = h_{lj}$ , то  $X_i^p = \emptyset$ , вершину, відповідну множині  $X_i^p$ , прозондовано.

*Обчислювальний експеримент.* Наведений алгоритм програмно реалізовано. На рис. 3 зображено результат роботи методу гілок та меж для задачі оптимізації розміщення прямокутних об'єктів на прямокутній області. Тестова функція цілі – сума квадратів відстаней від центрів об'єктів до деякої фіксованої точки:

$$\chi(Z) = \sum_{i=1}^m ((x_1 - \xi_1^i)^2 + (x_2 - \xi_2^i)^2) \rightarrow \min, \tag{11}$$

де  $x(x_1, x_2)$  – задана точка.

Кількість об'єктів – 6. Для знаходження оцінки використовувалась модифікація методу можливих напрямків. Координати заданої точки  $x(0, 0)$ . Значення функції цілі у початковій точці  $\chi(Z^0) = 175,34$ , в кінцевій точці –  $\chi(Z^*) = 66,35$ . Розв'язок отримано за 620 с. Характеристики дерева, що отримане при розв'язанні тестової задачі, наведено у табл. 1.

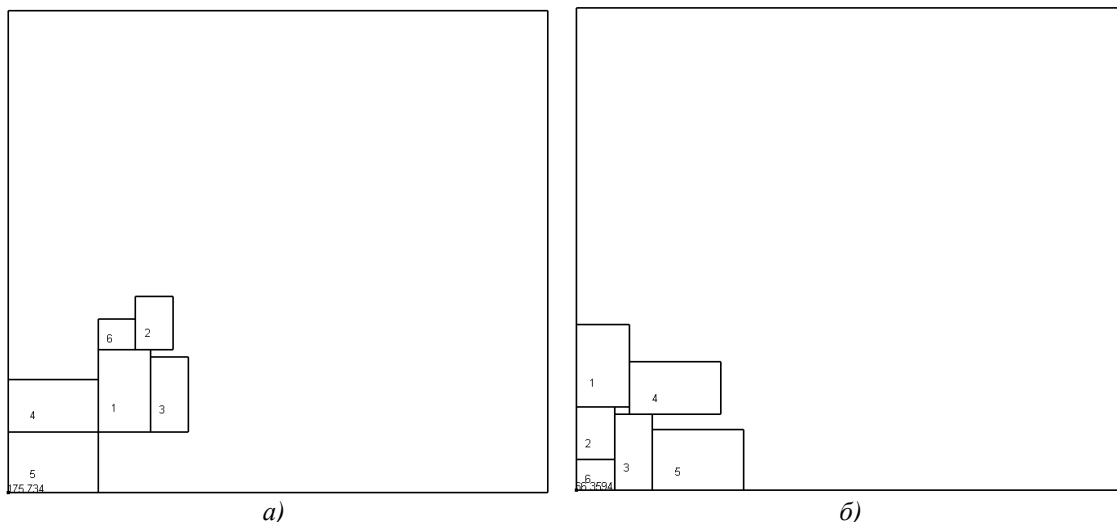


Рис. 3. Приклад розв'язку задачі мінімізації суми квадратів відстаней до точки:  
 а) – початкове розміщення ( $m^*$ );  
 б) – отримане розміщення

Таблиця 1

Характеристики дерева, що отримане при розв'язанні тестової задачі

Рівень дерева	Максимально можлива кількість вершин на рівні	Оцінено на рівні	Серед оцінених		
			Прозондовано	Припустимих розміщень	Пустих підмножин
1	1	1			
2	4	4			
3	16	16			
4	64	64	10		
5	256	216	85		
6	1024	524	222		
7	4096	1208	593		56
8	16384	2460	1424	8	100
9	65536	4144	2708	34	105
10	262144	5744	3234	28	229
11	1,04858e+006	10040	7977	217	187
12	4,1943e+006	8252	6836	851	200
13	1,67772e+007	5664	4022	166	367
14	6,71089e+007	6568	6541	1748	
15	2,68435e+008	100	100	89	
16	1,07374e+009	0	0		

**Висновки.** Для розв'язання тестової задачі за допомогою повного перебору потрібно було б розв'язати більш ніж  $10^9$  підзадач (6). З результатів обчислювального експерименту бачимо, що для знаходження розв'язку методом гілок та меж виявилось за достатнє розв'язати близько  $5 \cdot 10^4$  підзадач меншої розмірності, ніж (6).

Час роботи алгоритму та, відповідно, максимальна кількість об'єктів що розміщуються, залежить від функції цілі конкретної практичної задачі та методу умовної оптимізації, що застосовано для знаходження оцінки вершини.

**БІБЛІОГРАФІЯ:**

1. Яремчук С.І., Жовновський Д.О., Співак А.В. Модифікація методу умовного градієнту для розв'язання задач оптимального розміщення джерел фізичних полів // Вісник ЖІТІ / Технічні науки – 1999. – № 9 – С. 248–253.
2. Holland J.H. Adaptation in Natural and Artificial Systems. – MIT Press, 1975.
3. Beasley D., Bull D.R., Martin R.R. An Overview of Genetic Algorithms: Part I, Fundamentals. University Computing, 15 (2): 58–69, 1993.
4. Beasley D., Bull D.R., Martin R.R. An Overview of Genetic Algorithms: Part II, Research Topics. University Computing, 15 (2): 58–69, 1993.
5. Шаповалов Ю.О., Яремчук С.І. Застосування генетичного алгоритму до задач розміщення // Вісник ЖІТІ / Технічні науки. – 2002. – № (2) 21 – С. 130–133.
6. Яремчук С.І. Введення в математичні методи дослідження операцій: Навчальний посібник. – Житомир: ЖІТІ, 2002. – 300 с.
7. Власенко О.В., Співак А.В., Яремчук С.І. Метод умовного градієнта для оптимального розташування джерел фізичних полів // Вісник ЖІТІ / Технічні науки. – 1998. – № 7 – С. 248–253.

ШАПОВАЛОВ Юрій Іванович – аспірант державного університету.  
 – магістр;  
 – програмування, інформатика.

E-mail: yuri-ua@yandex.ru

ВДАЇ×ОÊ Ñâ³ðeáíà ¸âáí³áíà – eáíãeãàò ô³çeêî-íàòâíàðe³íeð íàóe, áíòâíò eãðããðe íðíãðáíííâí çãããçíã-áííý íã-êñêðããeüííç ðãõí³eê Æeòííeðñíeíâí ðeðæãâíòòò ðãðííeíã³-ííâí óííeðcítetý.

Íãóeíã³³íããðãñe:

– áêñððãíãeüí³ çããã-³;

– íàòâíàðe³-íã ííããêðããííý.

Подано 01.11.2004

**Шаповалов Ю.О., Яремчук С.І.** Оптимізація розміщення прямокутних об'єктів на опуклій області методом гілок та меж.

**Шаповалов Ю.А., Яремчук С.И.** Оптимизация размещения прямоугольных объектов на выпуклой области методом ветвей и границ.

**Shapovalov Y.A., Yaremchuk S.I.** Distribution optimization of rectangular objects on convex area by the method of branches and borders.

УДК 519.67

**Оптимізація розміщення прямокутних об'єктів на опуклій області методом гілок та меж / С.І. Яремчук, Ю.О.Шаповалов.**

Розглядається задача оптимізації розміщення об'єктів що мають прямокутну форму на опуклій області. Множина припустимих розв'язків задачі розбивається на опуклі підмножини. Для пошуку розв'язку задачі пропонується використати метод гілок та меж.

УДК 519.67

**Оптимизация размещения прямоугольных объектов на выпуклой области методом ветвей и границ / С.И. Яремчук, Ю.А.Шаповалов.**

Рассматривается задача оптимизации размещения объектов прямоугольной формы на выпуклой области. Множество допустимых решений задачи разбивается на выпуклые подмножества. Для поиска решения задачи предлагается использовать метод ветвей и границ.

УДК 519.67

**Distribution optimization of rectangular objects on convex area by the method of branches and borders / S.I. Yaremchuk, Y.A. Shapovalov.**

The task of rectangles distribution on convex area is considered. The solution set divide into convex subsets. The method of branches and borders is offered to use for solving this task.