МАШИНОЗНАВСТВО. ОБРОБКА МАТЕРІАЛІВ У МАШИНОБУДУВАННІ

УДК 539.4

В.С. Антонюк, к.т.н., доц.
Національний технічний університет України “КПІ”
В.І. Мірненко, к.т.н., с.н.с
Національна академія оборони України
А.В. Рутковський, к.т.н, с.н.с.
О.Г. Трапезон, д.т.н., с.н.с.
Інститут проблем міцності ім. Г.С. Писаренка НАН України, м. Київ

РОЗРОБКА ОСНОВ АНАЛІТИЧНОГО РОЗРАХУНКУ ПРУЖНИХ СИСТЕМ З ПОКРИТТЯМИ НА БАЗІ ВИБРАНИХ ЗАДАЧ МЕХАНІКИ І ТЕОРІЇ КОЛИВАНЬ

Викладено основи аналітичного розрахунку пружних систем з двостороннім покриттями на основі задач механіки та теорії коливань. Наведено розв’язок прикладних задач розрахунку прямим методом та на основі моделі з використанням жорсткості зв'язків зрушення. Встановлено, що розв’язок розглянутої задачі прямим методом обумовлений виняткова пружними і геометричними параметрами основи і покриття та правдиве тільки для фіксованого значення коефіцієнта жорсткості зв'язків зрушення.

Вступ

Для розробки методичного комплексу, придатного для дослідження циклічної міцності систем із покриттями при високочастотному навантаженні, необхідно мати чітке уявлення щодо поведінки подібних систем та їх робочих елементів при змінних силових впливах. Відповідь на поставлене запитання знаходиться в рішеннях відповідних задач механіки й теорії коливань. При цьому, однак, залишається відкритою проблема відповідних розрахунків при наявності покриттів, оскільки їх врахування неминуче призводить до ускладнення розрахункових моделей. Суть її полягає в тому, що стосовно конкретних видів покриттів обмежити рамки математичних моделей до меж, при яких з однієї сторони рішення відповідних базових задач були б здійсненні, а з іншого, – міра їх вирішення повинна відповідати реальним ситуаціям і не призводити до неприпустимо великих похибок розрахунків.

Аналіз досліджень

Аналіз останніх джерел та публікацій, в яких започатковано розв’язання даної проблеми показує, що при вивченні практичних питань, які пов'язані із необхідністю врахування покриттів на об'єктах, що деформуються, дослідники, як правило, вважаючи систему основа – покриття монолітною, обмежуються при її аналізі введенням у розрахунки відповідних приведених пружних і фізичних постійних, отриманих, наприклад, методом еквівалентних жорсткостей за "правилом суміші". Такий підхід є наслідком припущення щодо абсолютно жорсткого зв'язку між складовими частинами композицій, у той час як практика далеко не завжди підтверджує подібні представлення. Зокрема, при огляді деформованих деталей із захисними або зміцнюючими покриттями досить часто можна знайти відшарування покриттів від основи. Наявність або відсутність відшарувань є якісною характеристикою зв'язку між основою і покриттям, що побічно оцінюється при експериментах, щодо визначення адгезійної міцності, зчеплення покриття з основою. Таким чином, виникає необхідність у більш поглибленому вивченні особливостей деформування подібних композицій шляхом постановки і вирішення ряду найпростіших задач, для того щоб на їх основі із залученням відповідних експериментів, що моделюють задані умови задачі, кількісно оцінити взаємний вплив на дію композиції її складових частин і ступінь їхньої зв'язаності. Відповідне поводження композиції обумовлене її напружено-деформованим станом, тому розглядом задач механіки і теорії коливань визначається також мета описання напруженого і деформованого стану для випадків, що являють собою практичний інтерес.

Задача осьового статичного навантаження призматичного стержня з двостороннім покриттям викликана необхідністю оцінки напружень у покритті й у площині зчеплення залежно від деформації основи зовнішніми силами. Подібні дослідження були проведені при розгляді напруженого стану характерного елемента односпрямованими армованими волокнами композиту [1], [2].

Виходячи із вищесказаного, **метою роботи** є розробка методики аналітичного розрахунку пружних систем з покриттями на основі задач механіки і теорії коливань.

Викладання матеріалу досліджень

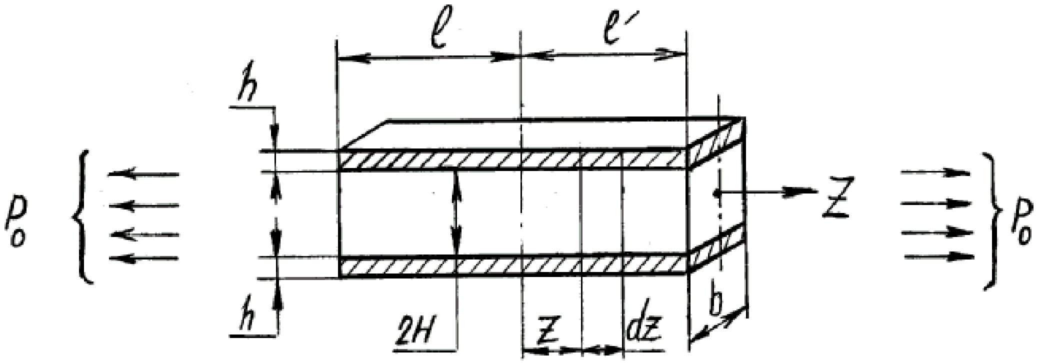
Розв'язання задачі прямим методом. Розглянемо одноосьове розтягування стержня, на верхній і нижній сторонах якого нанесене покриття товщиною h (рис. 1). Задача зводиться до визначення напружень у довільному перетині покриття і основи. Початок координат обраний у середній точці осі стержня. Перетин $z = 0$ залишається при деформації плоским. Навантаження P_o прикладене тільки до торців основи. У цьому випадку зусилля в покритті виникають тільки через дотичні напруження τ на поверхні адгезійного контакту зі стержнем. Допускається також, що лінійні елементи при деформації залишаються прямими.

З умови рівноваги елементів покриття і основи запишемо відповідно:

$$\tau = -h\frac{d\sigma_n}{dz}; \tag{1}$$

$$\tau = H\frac{d\sigma_o}{dz}. \tag{2}$$

Рис. 1. Схема розрахунку напружень в покритті σ_n та дотичних напружень τ в зоні адгезійного контакту



Якщо ввести зусилля, одержимо:

$$\tau = -\frac{1}{b}\frac{dP_n}{dz}; \quad \tau = \frac{1}{2b}\frac{dP_o}{dz}; \tag{3}$$

де P_o – зусилля в основі, P_n – зусилля в одному шарі покриття.

Складові деформації:

$$E_{nz} = \frac{\partial U_n}{\partial z}; \quad E_{oz} = \frac{\partial U_o}{\partial z}. \tag{4}$$

У перетині z = 0 дотичні напруження $\tau = 0$, тому:

$$\frac{dU_n}{dz} = \frac{P_n}{E_n F_n}; \quad \frac{dU_o}{dz} = \frac{P_o}{E_o F_o}, \tag{5}$$

де U_o, U_n – переміщення центрів ваги перетинів основи і покриття; U – переміщення на межі розділу.

З огляду на прийняте припущення про збереження прямими лінійних елементів, характер переміщення точок перетину z = 0 можна представити у вигляді:

$$\gamma_o = \frac{\tau}{G_o} = -\frac{U_o - U}{H/2}; \quad \gamma_n = \frac{\tau}{G_n} = -\frac{U - U_n}{h/2}. \tag{6}$$

З рівнянь (6), виключивши τ, одержимо:

$$U = \frac{G_o U_o / H - G_n U_n / h}{G_o / H - G_n / h}. \tag{7}$$

Продиференціюєморуємо вираз (5) по z:

$$\frac{dP_n}{dz} = E_n F_n \frac{d^2 U_n}{dz^2}; \quad \frac{dP_o}{dz} = E_o F_o \frac{d^2 U_o}{dz^2}. \tag{8}$$

Вносячи (8) в (3), одержимо:

$$\tau = \frac{E_n F_n}{b}\cdot\frac{d^2 U_n}{dz^2}; \quad \tau = \frac{E_o F_o}{2b}\cdot\frac{d^2 U_o}{dz^2}. \tag{9}$$

Підставимо (9) в (6):

$$\frac{E_oF_o}{2b}\cdot\frac{d^2U_o}{dz^2}=-G_o\frac{U_o-U}{H/2}\ ;\ -\frac{E_nF_n}{b}\cdot\frac{d^2U_n}{dz^2}=-G_n\frac{U-U_n}{h/2}\ . \qquad (10)$$

Після підстановки (7) в (10) знайдемо:

$$\frac{d2U_o}{dz^2}-\frac{4bL}{E_oF_o}(U_o-U_n)=0\ ;\ \frac{d2U_n}{dz^2}+\frac{2bL}{E_nF_n}(U_o-U_n)=0\ , \qquad (11)$$

де

$$L=\frac{(G_o/H)(G_n/h)}{G_o/H-G_n/h}\ . \qquad (12)$$

Підсумовуючи вираз (11), одержимо:

$$\frac{d^2(U_o-U_n)}{dz^2}-k^2(U_o-U_n)=0\ , \qquad (13)$$

де

$$k^2=2bL\left(\frac{1}{E_nF_n}+\frac{2}{E_oF_o}\right). \qquad (14)$$

Розв’язавши рівняння (13), оторимаємо: $U_o-U_n=C_1shkz+C_2chkz$
при z = 0 і $U_o=U_n=0$; при z = l, а $dU_o/dz=P_o/E_oF_o$; $dU_n/dz=0$.

З цих умов З$_2$ = 0; $C_1=P_o/E_oF_okchkl$, тоді:

$$U_o-U_n=\frac{P_oshkz}{E_oF_okchkl}\ . \qquad (15)$$

Вносячи (15) у (11), одержуємо:

$$\frac{d2U_o}{dz^2}=\frac{2bLP_oshkz}{(E_oF_o)^2kchkl}\ . \qquad (16)$$

З (9) і (16) маємо:

$$\tau=\frac{2LP_o}{E_oF_ok}\cdot\frac{shkz}{chkl}\ . \qquad (17)$$

Вносячи (16) у (1) й інтегруючи, одержуємо, що:

$$\sigma_n=-\frac{2LP_ochkz}{E_oF_ohk^2chkl}+C\ .$$

При z = l $\sigma_n<0$, тоді $C=2LP_o/E_oF_ohk^2$,

$$\sigma_n=\frac{2\varepsilon_o}{hk^2}\cdot\frac{G_oG_n/Hh}{G_o/H-G_n/h}\left(1-\frac{chkz}{chkl}\right), \qquad (18)$$

де $\varepsilon_o=P_o/E_oF_o$ – відносне подовження основи.

Підставляючи у вираз (17) значення k^2 з (14), одержуємо:

$$\sigma_n=\frac{\varepsilon_o}{F_n(1/E_nF_n+2/E_oF_o)}\left(1-\frac{chkz}{chkl}\right). \qquad (19)$$

Дотичні напруження на межі основи і покриття можна записати у вигляді:

$$\tau=\frac{\varepsilon_ok}{b(1/E_oF_o+2/E_oF_o)}\cdot\frac{chkz}{chkl}\ . \qquad (20)$$

З формул (17) чи (20) для τ видно, що τ_{max} діє на краю стрижня (z = l). В силу цього при виникненні, наприклад, тріщин у покритті, коли σ_n перевищує когезійну міцність покриття, буде мати місце "сплеск" τ, що у випадку досить високої адгезійної міцності зчеплення ($\tau_{сц}>\tau_{max}$) призведе до додаткової концентрації напружень в основному матеріалі. Ця обставина може значно зменшити міцність основи, особливо при циклічних навантаженнях. Для згладжування несприятливого впливу τ_{max} при виникненні тріщин у покритті необхідно, певно, мати деяку оптимальну міцність зчеплення, що задовольняла би співвідношенню $\tau_{сц}\le\tau_{max}$ [3], [4].

Розав’язання задачі на основі моделі з використанням жорсткості зв'язків зрушення. Деформований стан стержня з двостороннім покриттям, розглянутий вище, правдивий для частки випадку жорсткості зчеплення основи і покриття, що визначається з передумов на базі ідеалізованих геометричних побудов. Нижченаведений загальний розв’язок, що враховує довільну жорсткість зчеплення, отримано методом переміщень на основі розрахункової моделі елемента призматичного стрижня з двостороннім симетричним покриттям, навантаженого силою P, що прикладена до основи (рис. 2).

Рівняння рівноваги для елементів покриття (індекс 1) та елементу основи (індекс 2) будуть мати вигляд:

$$\left.\begin{aligned} -N + qdx + N_1 + \frac{\partial N_1}{\partial x}dx = 0; \\ -P - N_2 - 2qdx + N_2 + \frac{\partial N_2}{\partial x}dx + P = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{21}$$

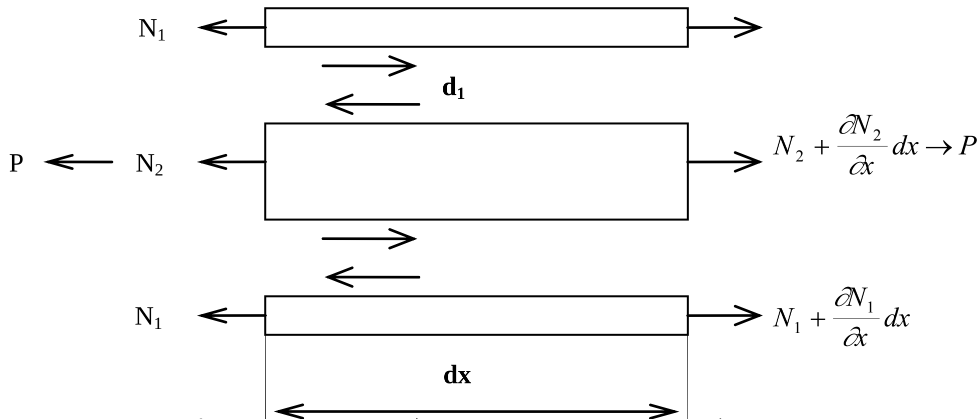


Рис. 2. Розрахункова модель елемента стрижня з двостороннім симетричним покриттям під дією сили P

Враховуючи, що подовжні сили пружності при i = 1, 2 виражаються залежністю:

$$N_i = E_i F_i \frac{\partial U_i}{\partial x};$$

замість (21) одержимо систему рівнянь:

$$\left.\begin{aligned} (U_1' E_1 F_1)' + q = 0; \\ (U_2' E_2 F_2)' - 2q = 0, \end{aligned}\right\}, \tag{22}$$

де U_i – переміщення; E_i – модуль Юнга; $F_i = bh_1$ – площа поперечного розрізу; b – ширина; h_1 – товщина; q – погонні дотичні зусилля.

Помітимо, що при однобічному покритті або двосторонньому, але різної товщини, розрахункова модель ускладнюється за рахунок необхідності врахування внутрішніх згинаючих моментів від дії неврівноважених дотичних зусиль.

Погонні дотичні зусилля виразимо через переміщення U_1 і U_2 у вигляді:

$$q = \mu(U_2 - U_1), \tag{23}$$

де μ – жорсткість зв'язків зрушення (в кг/см^2), що вводиться подібним же чином через співвідношення типу (23) при розгляді складених стержнів.

Оскільки в нашому випадку E_i = const; F_i = const, то, з врахуванням (23), система (23) прийме вигляд:

$$\left.\begin{aligned} U_1'' + \frac{\mu}{E_1 F_1}(U_2 - U_1) = 0 \\ U_2'' + \frac{2\mu}{E_2 F_2}(U_2 - U_1) = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{24}$$

З (24) одержимо рівняння для різниці $U_2 - U_1$:

$$(U_2 - U_1)'' - \left(\frac{2\mu}{E_2 F_2} + \frac{\mu}{E_1 F_1}\right)(U_2 - U_1) = 0 \tag{25}$$

Підстановка в (25) величини $U_2 - U_1$ з (23) призводить до рівняння для погонних зусиль q:

$$q'' - k^2 q = 0, \tag{26}$$

де

$$k^2 = \mu\left(\frac{2}{E_2 F_2} + \frac{1}{E_1 F_1}\right). \tag{27}$$

Розв’язок рівняння (26) має вигляд:

$$q = Ashkx + Bchkx\ , \qquad (28)$$

тому на основі (23) одержимо:

$$U_2 - U_1 = \frac{1}{\mu}(Ashkx + Bchkx)\ . \qquad (29)$$

Значення постійних A і B встановлюємо з граничних умов. Для зручності розташуємо початок координат у центрі стрижня довжиною $2l$, так, що граничні перетини будуть $x = l$ (праворуч) і $x = -l$ (ліворуч).

У даному випадку з умов симетрії повинні бути виконані вимоги:

$$U_1(0) = U_2(0) = 0\ . \qquad (30)$$

Оскільки було прийнято, що сила P прикладена тільки до основи, то повинні бути виконані наступні граничні умови при $x = l$:

$$U_1'(l) = 0\ U_2'(l) = \frac{P}{E_2F_2}\ . \qquad (31)$$

Задовольнивши умови (30) і (31) за допомогою (29), одержимо:

$$B = 0; \qquad A = \frac{\mu P}{kE_2F_2chkl}\ .$$

Звідси:

$$q = \frac{\mu P}{kchklE_2F_2}shkx\ ; \qquad (32)$$

$$U_2 - U_1 = \frac{P}{kchklE_2F_2}shkx\ . \qquad (33)$$

Переміщення U_1, U_2 визначаємо з (24) або (29) після внесення туди (33) або (32) відповідно.

Після інтегрування одержимо:

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= \frac{\mu P}{k^3E_1F_1E_2F_2chkl}shkx + C_1x + C_2 \\ U_2 &= \frac{2\mu P}{k^3(E_2F_2)^2chkl}shkx + D_1x + D_2 \end{aligned}\right\}. \qquad (34)$$

Задовольняючи за допомогою (34) граничні умови (30) і (31), установлені вище, одержимо: $C_2 = D_2 = 0$;

$$C_1 = \frac{\mu P}{k^3E_2F_2E_1F_1}\ ;\ D_1 = \frac{P}{E_2F_2}\left(1 - \frac{2\mu}{k^2E_2F_2}\right). \qquad (35)$$

Після внесення (35) в (34) одержимо:

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= \frac{\mu P}{k^3E_1F_1E_2F_2}\left(x - \frac{shkx}{kchkl}\right) \\ U_2 &= \frac{2\mu P}{(kE_2F_2)^2}\left[\frac{shkx}{kchkl} + \left(\frac{k^2E_2F_2}{2\mu}\right) - x\right] \end{aligned}\right\}. \qquad (36)$$

Нормальні напруження в перетинах покриття або основи обчислюються вздовж осі стержня відомим чином за співвідношенням:

$$\sigma_i = E_iU_i'\ ,$$

а дотичні між основою і покриттям – за формулою:

$$\tau = \frac{q}{b}\ .$$

З врахуванням (32), (27) ця формула приймає вигляд:

$$\tau = \frac{k\varepsilon_o}{b(1/E_2F_2 + 2/E_oF_o)} \cdot \frac{shkx}{chkx}\ . \qquad (37)$$

де $\varepsilon_o = P/E_2F_2$ – відносні подовження основи.

Порівнюючи (37) і (20), що отримані для τ різними шляхами, бачимо їхній повний збіг за формою й структурою. Однак вони різні через розходження в коефіцієнтах k, що обумовлені формулами (14) і (27). Зрівнявши, одержимо:

$$\frac{1}{\mu}=\frac{1}{2b}\left(\frac{h}{G_n}-\frac{H}{G_o}\right), \tag{38}$$

де G_n, G_o – модулі зрушення покриття й основи.

Висновки

1. Очевидно, що рішення розглянутої задачі прямим методом правдиве тільки для фіксованого значення коефіцієнта жорсткості зв'язків зрушення μ, що визначається формулою (38). Також очевидно, що таке значення μ, обумовлене винятково пружними і геометричними параметрами основи і покриття, не може мати практичного значення, оскільки співвідношення (38) може мати силу у виняткових, суто гіпотетичних, випадках. Ідеалізований підхід прямого методу, що призводить до виразу (38), не може відбивати реальних властивостей взаємодії покриття з основою, і тому формули для напружень не можуть вважатися цілком надійними. Очевидно, що на практиці коефіцієнт μ інтегрально буде характеризуватися в першу чергу технологічними і виробничими факторами при нанесенні покриття, фізико-хімічною взаємодією основи і покриття і вже в другу – величинами, що входять у співвідношення (38). В силу сказаного для коректного визначення значень σ і τ коефіцієнт μ, що характеризує жорсткість зв'язків зрушення між основою та покриттям, повинно визначатись експериментальним шляхом.
2. На основі проведених теоретичних досліджень розроблено підхід до експериментального вивчення циклічної міцності матеріалів з покриттями при різних видах високочастотного навантаження, розроблені способи визначення жорсткості зв’язків зрушення між основою та покриттям.
3. Завдяки сукупності запропонованих розв’язків є можливість атестувати покриття за критеріями циклічної міцності, що надасть можливість підвищити довговічність конструкційних матеріалів.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Холистер Г.С., Томас К.* Материалы, упрочненные волокнами. – М.: Металлургия, 1969. – 195 с.
2 *Уманский Э.С.* К оценке взаимодействия между матрицей и волокнами при растяжении однонаправленного композиционного материала // Прикладная механика. – 1970. – Т. 6. – Вып. 4. – С. 91–96.
3. *Уманский Э.С., Ляшенко Б.А.* Условия адгезионной и когезионной равнопрочности жаростойких покрытий // Космические исследования на Украине. – 1975. – Вып. 6. – С. 58–64.
4. *Ляшенко Б.А., Цыгулев О.В., Кузнецов П.Б.* Необходимо ли всегда повышать адгезионную прочность защитных покрытий? // Проблемы прочности. – 1987. – № 5. – С. 70–74.

АНТОНЮК Віктор Степанович – кандидат технічних наук, доцент Національного технічного університету України ”Київський політехнічний інститут”.

Наукові інтереси:
– інженерія поверхні;
– зносостійкі покриття.

Тел.: + 380-44-454-94-75.
E-mail: vp@users.ntu-kpi.kiev.ua

МІРНЕНКО Володимир Іванович – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник Національної академії оборони України.

Наукові інтереси:
– відновлення деталей і модифікація поверхонь.

Тел.: + 380-44-296-69-57.
E-mail: diskret@inbox.ru

РУТКОВСЬКИЙ Анатолій Віталійович – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник Інституту проблем міцності ім. Г.С. Писаренка Національної академії наук України.

Наукові інтереси:
– зносостійкі покриття.

Тел.: + 380-44-296-69-57.
E-mail: coating@ipp.kiev.ua

ТРАПЕЗОН Олександр Георгійович – доктор технічних наук, провідний науковий співробітник Інституту проблем міцності ім. Г.С. Писаренка Національної академії наук України.

Наукові інтереси:

– дослідження міцності деталей машин.
Тел.: + 380-44-296-69-57.
E-mail: coating@ipp.kiev.ua

Подано 25.02.2004

Антонюк В.С., Мірненко В.І., Рутковський А.В., Трапезон О.Г. Розробка основ аналітичного розрахунку пружних систем з покриттями на базі вибраних задач механіки і теорії коливань

УДК 539.4

Розробка основ аналітичного розрахунку пружних систем з покриттями на базі вибраних задач механіки і теорії коливань / В.С. Антонюк, В.І. Мірненко, А.В. Рутковський, О.Г. Трапезон

Викладено основи аналітичного розрахунку пружних систем з двостороннім покриттями на основі задач механіки та теорії коливань. Наведено розв’язок прикладних задач розрахунку прямим методом та на основі моделі з використанням жорсткості зв'язків зрушення. Встановлено, що розв’язок розглянутої задачі прямим методом обумовлений винятково пружними і геометричними параметрами основи і покриття та правдиве тільки для фіксованого значення коефіцієнта жорсткості зв'язків зрушення.

УДК 539.4

Изложены основы аналитического расчета упругих систем с двусторонним покрытием на основе задач механики и теории колебаний. Приведены решения прикладных задач расчета прямым методом, также на основе модели с использованием жесткости связей сдвига. Установлено, что решение рассмотренной задачи прямым методом обусловлено исключительно упругими и геометрическими параметрами основы и покрытия и действительно только для фиксированного значения коэффициента жесткости связей сдвига.

УДК 539.4

Bases of analytical calculation of elastic systems with a bilateral covering are stated on the basis of tasks of mechanics and the theory of fluctuations. Decisions of applied problems tasks of calculation are resulted by a direct method, also on the basis of model with use of rigidity of connections of shift. It is established, that the decision of the considered task a direct method is caused by extremely elastic and geometrical parameters of a basis and a covering and is valid only for the fixed value of factor of rigidity of connections of shift.