УДК 51:330.115

М.В. Костикова, доц.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет
А.В. Панішев, д.т.н., проф.
Д.Д. Плечистий, аспір.
Житомирський державний технологічний університет

ВУЗЛОВІ ПИТАННЯ ЗАДАЧІ КОМІВОЯЖЕРА. 2

Розглянуто точні та наближені методи розв'язання задачі комівояжера, їх властивості, переваги та недоліки.

2.1. Вступ

В [1] розглянуто чисельні постановки проблеми комівояжера. Без сумнівів можна стверджувати, що задача комівояжера (ЗК) є майже єдиною проблемою, до якої звертаються для демонстрації працездатності практично кожного методу комбінаторної оптимізації, який отримав визнання. Алгоритмічні властивості ЗК, які викликають аномальні диспропорції між довжиною її входу та часом побудови точного розв'язку, стримують в реальних умовах застосування універсальних обчислювальних схем та стимулюють розробку швидкодіючих алгоритмів з допустимими відхиленнями від оптимуму. Коротко характеризуючи методи розв'язування ЗК, будемо переважно дотримуватись огляду [6] та тих найбільш цікавих робіт, які з'явились після його опублікування. Розрізняють точні та наближені (в тому числі евристичні) методи розв'язання ЗК.

2.2. Точні методи розв'язання ЗК

1) Метод динамічного програмування. Особливості його застосування для розв'язання загальної ЗК викладено, наприклад, в [2].

Нехай S – підмножина точок множини V, $|V| = n$, $f(S, j)$ – найменша сумарна вага простого шляху, що починається у фіксованій вершині 1, проходить через всі точки S та закінчується у вершині $j \in S$. Тоді згідно з принципом оптимальності Беллмана отримаємо функціональне рівняння:

$$f(S, j) = \min_{i \in S \setminus j} \{d_{ij} + f(S \setminus j, i)\}$$

з початковими умовами

$$f(0,0) = 0.$$

На останній ітерації отримаємо

$$f^* = \min_{i \in V \setminus 1} \{d_{i1} + f(V, i)\},$$

де f^* – вага оптимального маршруту (туру або обходу).

Перевагою методу є його нечутливість до введення додаткових обмежень, яка використовувалась при розв'язанні ЗК з вибором та ЗК з виділеними вершинами [8]. До важливих недоліків методу слід віднести великі вимоги до пам'яті, що складається з $O(n2^n)$ комірок, та експоненційну працеємність, яка характеризується як $O(n^2 2^n)$ операцій додавання та порівняння.

2) Метод гілок та меж (ГМ). ГМ можна застосовувати до широкого класу задач комбінаторної природи, але з'явився як спеціальний алгоритм для розв'язування загальної ЗК [9]. Ідея ГМ полягає в розбитті множини розв'язків, представлених вершиною, на підмножини, що попарно не перетинаються. Кожна підмножина розбиття, яка називається відгалуженням, розглядається як нащадок вихідної вершини. Дерево варіантів, яке породжується розгалуженням, має алгоритм для обчислення нижньої границі вартості будь-якого розв'язку в даній підмножині. Для знаходження наближеного розв'язку необхідно мати спосіб обчислення верхньої оцінки, за допомогою якого можна перевірити, чи задовольняє побудований розв'язок заданому значенню цільового функціонала [10].

Процес відгалуження в ЗК можна виконати різними способами. Перерахуємо найбільш відомі з них.

Спосіб, запропонований в [9] для розв'язання загальної ЗК, полягає в розбитті простору розв'язків кожний раз на дві підмножини, в залежності від того, входить або не входить дуга в обхід, що розглядається. За умов такого способу розгалуження зменшення часу пошуку оптимуму поперед всього пов'язано з підвищенням точності нижніх оцінок.

Нижні оцінки в ГМ є більш точними при використанні ефективного точного алгоритму для задачі про призначення (ЗП), яку можна розглядати як задачу невизначеної кількості комівояжерів [2], [3], [4]. Мінімум цільового функціоналу ЗП дає нижню межу вартості ЗК. Крім того, якщо розв'язок ЗП є обходом, то він є і розв'язком ЗК. У протилежному випадку отримаємо цикл меншої довжини, ніж n, тобто підобхід, якому відповідає послідовність $(\pi[1],\pi[2],...,\pi[i],...,\pi[k],\pi[1])$. В ЗК всі дуги $(\pi[i],\pi[i+1])$, $1 \le i \le k-1$, $(\pi[k],\pi[1])$ не можуть належати обходу $(\pi[1],\pi[2],...,\pi[n])$. Звідси випливає, що простір розв'язків можна розбити на k підмножин, виключаючи кожен раз із підобходу одну із дуг. Для виключення дуги достатньо замінити її вагу в матриці вартостей на дуже велике число. В результаті отримаємо k нащадків для вершини, що відповідає підобходу, та k задач про призначення, розв'язок яких дасть нову нижню межу в кожній вершині.

ЗП по відношенню до ЗК є релаксованою: вона відрізняється від ЗК лише тим, що оптимальний розв'язок ЗП π^* не обов'язково є циклічною перестановкою.

До числа релаксованих задач ЗК, які розв'язуються алгоритмами поліноміальної складності, відноситься задача побудови мінімального остовного дерева.

Нехай задано повний граф $G=(V,E)$ з матрицею відстаней $[d_{ij}]_n$, $|V|=n$. Тоді 1-деревом називається граф, отриманий деревом на множині вершин $\{2,...,n\}$ плюс два ребра, що інцидентні вершині 1. Оскільки кожний з обходів є 1-деревом, а мінімальна вартість 1-дерева знаходиться за поліноміальний час, то її можна взяти в якості нижньої границі вартості [11].

З численними методами отримання нижніх оцінок, що сьогодні використовуються, можна ознайомитися у [8].

3) Метод множників Лагранжа. Метод, перш за все, є одним із загальних способів отримання близьких до оптимуму нижніх оцінок. Їх джерелами є вісім постановок ЗК у вигляді задач лінійного та цілочисельного лінійного програмування, наведених у [7], а також пов'язані з ними ефективно розв'язувані релаксовані задачі. Наприклад, однією з постановок є наступна: знайти мінімум

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_{ij} . \tag{2.1}$$

при обмеженнях

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 , j=\overline{1,n} ; \tag{2.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 , i=\overline{1,n} ; \tag{2.3}$$

$$x_{ij} = 0 \vee 1 , i, j=\overline{1,n} ; \tag{2.4}$$

граф $G=(V,E)$, де $e(i,j)\in E_1$, якщо $x_{ij}=1$, є зв'язним. (2.5)

При знаходженні нижніх оцінок ЗК обчисленням мінімальної вартості 1-дерева не враховуються обмеження (2.2) та (2.3). Їх можна урахувати за допомогою множників Лагранжа наступним чином.

Перетворимо ЗК шляхом заміни її матриці $[d_{ij}]_n$ матрицею $[d_{ij}+\mu_i+\mu_j]_n$ для деяких чисел μ_i, $i=\overline{1,n}$. Оскільки в кожну вершину обходу входить лише одне ребро та із кожної вершини виходить також лише одне ребро, вартість кожного обходу зросте на $2\sum_{i=1}^{n}\mu_i$. Але таке перетворення не порушує відносне впорядкування вартостей обходів та залишає незмінною оптимальну циклічну перестановку. З іншого боку, оптимальне 1-дерево зміниться. Його вартість дорівнює $\sum_{i=1}^{n}\delta_i\mu_i + d$, де δ_i – ступінь вершини i, а d – вартість 1-дерева відносно вихідної матриці $\left[d_{ij}\right]_n$.

Нехай D^* – вартість оптимального обходу, F – множина всіх 1-дерев. Тоді

$$D^* + 2\sum_{i=1}^{n}\mu_i \geq \min_F\left(d + \sum_{i=1}^{n}\delta_i\mu_i\right)$$

або

$$D^* \geq V(\mu),$$

де

$$V(\mu) = \min_F\left[d + \sum_{i=1}^{n}(\delta_i - 2)\mu_i\right].$$

Нижню межу $V(\mu)$ можна уточнити, розв'язуючи далі задачу максимізації $V(\mu)$ відносно множників Лагранжа $\mu_i, i = \overline{1,n}$ методами, запропонованими, наприклад, в [12], [13].

4) Методи відсікаючих площин. Одне з восьми формулювань ЗК, наведених в [7], містить цілі змінні та змінні, які приймають довільні дійсні значення. Така задача називається змішаною задачею цілочисельного лінійного програмування (ЦЛП). Відповідна задача без обмежень на цілочисельність, яка називається послабленням задачі ЦЛП, очевидно, є легшою, ніж ЗК. Зрозуміло, що якщо розв'язок послабленої задачі ЦЛП є цілочисельним, то він одночасно є розв'язком відповідної задачі ЦЛП. У протилежному випадку отриманий оптимум являє собою нижню межу для вартості дискретного оптимуму.

Важливий момент у застосуванні алгоритмів відсікаючих площин полягає в тому, що якщо в умови задачі ЦЛП додати обмеження, яке не виключає ціль чисельних допустимих точок, то розв'язок не зміниться. У такому випадку стратегія пошуку розв'язку ЗК визначається так: в умови задачі вводяться лінійні обмеження, які зберігають цілочисельні точки, до тих пір, поки розв'язок послабленої ЦЛП не стане цілочисельним. Оптимум ЗК забезпечує остаточний розв'язок послабленої ЦЛП з доданими обмеженнями [2].

Алгоритми відсікаючих площин успішно застосовуються для розв'язання симетричної ЗК, яка має наступну цілочисельну постановку:

$$\sum_{i=j+1}^{n}\sum_{j=1}^{n-1} d_{ij}x_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{i<j} x_{ij} + \sum_{j<i} x_{ij} = 2,$$

$$0 \leq x_{ij} \leq 1,\ i < j,$$

$$\sum_{i\in S}\sum_{j\in S} x_{ij} \leq |S| - 1,\ \forall S \subseteq V,\ 2 \leq |S| \leq n,$$

$$x_{ij} \in \{0,1\},\ i < j.$$

Із [8] відомо, що викладена стратегія розв'язання задач ЦЛП отримала розвиток в алгоритмах для узагальнень ЗК, а конкретно – для задач p комівояжерів та маршрутизації.

5) Композитні алгоритми. Композитними називаються алгоритми, що містять елементи декількох основних методів. Наприклад, композитним алгоритмом є наступний алгоритм динамічного програмування з вбудованими в нього процедурами обчислення нижніх оцінок та розгалуження.

Звернемося до $f(S,j)$ – найменшої сумарної ваги елементарного ланцюга, що починається у вершині 1, проходить через всі вершини множини S та закінчується у вершині j. Позначимо $\tilde{c} = D(\tilde{c})$ сумарну вагу обходу $\tilde{c}$, побудованого за допомогою деякої евристики, тобто верхню оцінку розв'язку ЗК. Позначимо нижню оцінку $l(S,j)$, пов'язану з підмножиною S та станом (S,j). Наприклад, для симетричної ЗК в якості нижньої оцінки можна взяти мінімальну вартість 1-дерева на вершинах $V\setminus\{S\setminus j\}$, причому два ребра беруться у вершині, що відрізняється від 1 та j. В результаті отримаємо наступний критерій відсікання.

Якщо $f(S,j)+l(S,j)\geq\hat{u}$, то стан (S,j) є безперспективним та може бути виключеним із подальшого розгляду.

Із критерію відсікання випливає наступний наслідок.

Якщо всі стани (S,j), для яких $|S|=k$, $k<n$, $j\in S$ є безперспективними, то $\hat{\tau}$ – оптимальний розв'язок ЗК.

Викладені ідеї отримали розвиток у методі корекції функції стану, що є відомим також як метод Зарецького [8]. Алгоритм Зарецького легко адаптується для розв'язання задач маршрутизації та має гарні обчислювальні характеристики.

Потрібно відмітити, що перераховані методи не вичерпують перелік точних алгоритмів розв'язання ЗК. х особливістю є або зручні ємнісні властивості, або задовільні часові залежності від розмірності задачі. Не викликає заперечень обмеженість використання точних методів розв'язання ЗК у системах реального часу, наприклад, у таких, як системи оперативного управління транспортним процесом. З іншого боку, очевидна перевага використання точних методів у системах, де необхідно отримати найкращий можливий розв'язок, тоді як витрати на розрахунки не є пріоритетними або мають вторинну важливість. У такому випадку прикладом може бути будь-яка система автоматизованого проектування.

2.3. Наближені методи розв'язання ЗК

Якість розв'язку τ_A, отриманого не гарантуючим оптимум алгоритмом А, будемо оцінювати нерівністю:

$$\left(D(\tau_A)-D(\tau^*)\right)/D(\tau^*)\leq\varepsilon(n),$$

де τ^* – оптимальний розв'язок; n – розмірність задачі.

При $n\to\infty$ алгоритм з $\varepsilon(n)\to 0$, очевидно, «краще» алгоритму з $\varepsilon=\text{const}$, який, у свою чергу, «краще» алгоритму з $\varepsilon(n)\to\infty$. Якщо $\varepsilon=\text{const}$, то ефективний алгоритм називається ε-наближеним.

Відомо, що надія на побудову ε-наближеного алгоритму для загальної ЗК така ж, як і надія на побудову ефективного точного алгоритму, клас ε-наближених процедур отримано для ЗК з нерівністю трикутника, а значення константи ε залежить від працеємності знаходження розв'язку. Перерахуємо найбільш розповсюджені алгоритми з оцінками для метричної ЗК.

Спочатку розглянемо наближені процедури, які працюють за простим правилом, яке реалізує стратегію нарощування ланцюга обходу, що шукається.

За алгоритмом «найближчого сусіда» (NN) за початкову вершину обирається будь-яка вершина графа. В якості наступної обирається найближча до останньої обраної серед всіх невідвідуваних вершин. Точність алгоритму NN характеризується нерівністю:

$$D(\tau_{NN})/D(\tau^*)\leq\left(\lceil\log_2 n\rceil+1\right)/2,$$

звідси витікає, що процедура NN не належить до ε-наближених.

Алгоритм «додавання найближчого міста» (NT) обирає за першу вершину також довільну вершину. Нова вершина, що додається на кожному кроці, обирається з вершин, що досі не ввійшли до маршруту, як найближча до деякої вершини, що належить маршруту. Вершина, що додається, стає наступною після найближчої до неї вершини маршруту. Похибка алгоритму NT характеризується асимптотично неполіпшуваною оцінкою

$$D(\tau_{NT})/D(\tau^*)\leq 2\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Алгоритм «найбільш дешевого додавання» (MC) відрізняється від попереднього алгоритму тільки тим, що при додаванні в маршрут нової вершини обирається не найближча, а та, що забезпечує мінімальне збільшення довжини вже побудованого циклу. В якості такої вершини береться вершина k, котрій відповідає найменше значення $d_{ik}+d_{kj}-d_{ij}$, де $\{i,j\}$ – ребро, що входить в маршрут. Довжину маршруту τ_{MC} обмежує оцінка

$$D(\tau_{MC})/D(\tau^*)<2.$$

Працеємність розглянутих процедур обмежується величиною $O(n^2)$.

В перерахованих алгоритмах використовується градієнтний або «жадібний» підхід до побудови розв'язку. Для метричної ЗК відомі ε-наближені алгоритми, в яких «жадібний» спосіб досягнення результату застосовується в конструкції з ефективними процедурами розв'язання задач на графах. До них відносяться алгоритми MST та алгоритм Крістофідеса (ММ).

В алгоритмі MST спочатку для повного графа G з матрицею вартостей $\left[d_{ij}\right]_n$ знаходиться остовне дерево T з найменшою сумою ваг ребер (МОД). Потім шляхом подвоєння кожного ребра T будується ейлерів мультиграф T', тобто зв'язний мультиграф, в якому всі n вершин мають парний ступінь. В T' завжди існує ейлерів цикл – цикл, який проходить по кожному ребру T' рівно один раз. Алгоритм закінчує роботу після виконання простої процедури побудови гамільтонового циклу, яка полягає в знаходженні ейлеревого циклу та вибору в ньому по одному входженню кожної вершини із T'. Складність алгоритму MST визначається працеємністю побудови МОД. Задача побудови МОД ефективно розв'язується «жадібним» алгоритмом за час $O\left(n^2\right)$. Для алгоритму MST $\varepsilon=1$, тобто

$$D\left(\tau_{MST}\right) \le 2D\left(\tau^*\right),$$

та існують приклади, для яких наведена оцінка асимптотично досяжна.

Алгоритм ММ є неперевершеним за точністю, яка досягається технікою паросполучень в комбінації з фрагментами алгоритму MST. Паросполученням повного графа з матрицею вартостей $\left[d_{ij}\right]_{2k}$ називається k ребер, які не мають спільних вершин. Для такого графа відомий алгоритм знаходження паросполучень мінімальної вартості з працеємністю $O\left(n^4\right)$, $n=2k$. В алгоритмі ММ, як і в MST, знаходиться МОД T, в якому всі вершини мають парний ступінь. Кількість таких вершин парна. Далі в повному графі, що складається з помічених вершин, знаходиться паросполучення M мінімальної вартості і будується мультиграф з n вершинами, який містить всі ребра в T і M. До отриманого мультиграфа застосовується процедура побудови гамільтонового циклу із алгоритму MST. Алгоритм ММ є S-наближеним. Його працеємність оцінюється величиною $O\left(n^4\right)$. Верхня оцінка довжини гамільтонового циклу, побудованого алгоритмом ММ,

$$D\left(\tau_{MM}\right) \le \frac{3}{2} D\left(\tau^*\right)$$

є асимптотично досяжною.

Слід відмітити алгоритми М.М. Ковальова–В.М. Котова з $\varepsilon=5/8$ [14].

За останнє десятиріччя отримано декілька цікавих результатів по вивченню ЗК на максимум, відомої з [15] застосуванням до аналізу послідовностей ДНК та компресії даних. В [16], [17] доведено, що ЗК на максимум NP-складна. Тому основний напрямок у її вивченні полягає в побудові та аналізі наближених поліноміальних алгоритмів з оцінками точностей розв'язків [17].

Будемо говорити, що алгоритм розв'язання ЗК на максимум має оцінку точності ρ, якщо відношення вартості знайденого маршруту комівояжера до вартості оптимального маршруту не менше ρ. Таким чином, точність розв'язку зростає із зростанням ρ, $\rho \to 1$.

Для ЗК на максимум з довільними невід'ємними дійсними елементами матриці вартостей $\left[d_{ij}\right]_n$ отримано ефективні алгоритми з наступними оцінками: $1/2$ [18], $4/7$ [19], $38/63$ [15].

Відмітимо результативність досліджень ЗК на максимум, орієнтованих на її спеціальні класи, наприклад, такі як напівметрична, метрична, симетрична ЗК. В [5] доведено, що

1) напівметрична ЗК на максимум може бути розв'язана за час $O\left(n^3\right)$ з оцінкою точності $\rho=3/4$;

2) метрична ЗК на максимум може бути розв'язана за час $O\left(n^3\right)$ з оцінкою точності $\rho=5/6$.

Для симетричної ЗК на максимум побудовані поліноміальні алгоритми з оцінками точності $2/3$ [18], $13/18$ [20], $5/7$ [21]. Найкращий за точністю результат цієї задачі отримано А.І. Сердюковим [22];

3) симетрична ЗК на максимум розв'язується за час $O(n^3)$ з оцінкою точності $\rho = 3/4$.

Для знаходження наближення 3) застосовуються розв'язки двох задач, які отримуються з працеємністю $O(n^3)$: задачі знаходження в графі G паросполучення максимальної ваги та задачі відшукання 2-фактора максимальної ваги. Підмножина $E' \subset E$ ребер неорієнтованого графа G називається 2-фактором, якщо кожна вершина $v \in V$ інцидентна точно двом ребрам в E'. Неважко побачити, що друга задача є ЗП на максимум з симетричною матрицею $\left[d_{ij}\right]_n$, розв'язок якої можна представити як μ маршрутів комівояжерів, які в сукупності містять всі вершини графа G. Множина ребер у розв'язках обох задач за допомогою ітеративної процедури доповнюється ребрами до гамільтонового циклу.

При розв'язанні різновидів ЗК великої розмірності $(n \geq 100)$ застосування розглянутих алгоритмів обмежене завдяки великим розходженням між $D(\tau_A)$ та $D(\tau^*)$ [23], [24]. Побудований розв'язок τ_A потребує поліпшення. Для зменшення $D(\tau_A)$ розроблені евристичні процедури, які виконують за невеликий час перестановку вершин в початковому маршруті τ_A. За приклад такого методу опишемо один з алгоритмів розв'язання метричної ЗК [25].

1. Побудувати опуклу оболонку множини вершин. Вершини, що належать опуклій оболонці та можуть бути пройденими по ній в порядку сусідства, взяти за вихідний частковий розв'язок τ^0.

2. Для кожної вершини k, що не ввійшла до τ^0, знайти в τ^0 суміжні вершини i та j, для яких величина $d_{ik} + d_{kj} - d_{ij}$ є мінімальною.

3. З усіх трійок (i, j, k), отриманих на кроку 2, обрати таку (i^*, j^*, k^*), для якої величина $\left(d_{i^*k^*} + d_{k^*j^*}\right)/d_{i^*j^*}$ є мінімальною.

4. Додати вершину k^* в τ^0 між вершинами i^* та j^*.

5. Повторити кроки 2–4 до побудови гамільтонова циклу.

Суттєвим внеском у розв'язання проблеми точності алгоритмів ЗК є цикл робіт І.Х. Сігала, в котрих n є настільки великим, що застосування прийомів фільтрації типу „гілок та меж" здається практично неможливим [24], [26–29].

Підхід І.Х. Сігала полягає в програмній реалізації наступних основних етапів: послідовне розбиття задачі на підзадачі суттєво меншої розмірності та формування маршруту із розв'язків підзадач у відповідності до побудованого дерева підзадач.

На першому етапі конструюється алгоритм, що розбиває точки множини V на задане число підмножин, що не перетинаються так, щоб вершини, які належать одній підмножині, були близькими відносно одна одної в сенсі заданого критерію. Потужність кожної підмножини обмежена знизу числом $n_{\min}$ та повинна бути суттєво менше $|V|$.

Строго кажучи, на цьому етапі розв'язується наступна задача кластеризації: розбити V на $k \geq 2$ підмножин $S_1,...,S_k$ так, щоб

$$\bigcup_{i=1}^{k} S_i = V\ ,\ S_i \bigcap S_j = \varnothing\ ,\ i \neq j\ , i, j = \overline{1,k}\ ; |S_i| \geq n_{\min}\ ,\ kn_{\min} \leq n\ , i = \overline{1,k}\ .$$

Кожному розбиттю $S = (S_1,...,S_k)$ поставимо у відповідність значення функції $\varphi(S) = \varphi(S_1,...,S_k)$, яке характеризує якість розбиття. Наприклад, такою функцією $\varphi(S)$ може бути $\varphi(S_1,...,S_k) = \sum_{i=1}^{k} g(S_i)$, $g(S_i)$ – міра близькості точок із S_i. Необхідно знайти розбиття $S^0 = \left(S_1^0,...,S_k^0\right)$, при якому $\varphi(S)$ набуває мінімального значення $\varphi\left(S^0\right)$.

Очевидно, що поставлену задачу можна розв'язати за поліноміальний час лише наближено.

Другий етап виконується в процесі розв'язання задачі кластеризації наступним чином. Спочатку до підмножин $S_1,...,S_k$ додаються k пар (i, j), які відповідають k мінімальним значенням d_{ij}. Кожна із точок $j \in V$, що залишились, додається в одну з підмножин $S_1,...,S_k$ у відповідності до значень $g(S_i)$, які визначають міру близькості точок, що належать одній підмножині. Таке додавання виконується за мінімальним значенням міри близькості з урахуванням обмежень у вигляді $|S_i| \ge n_{\min}$, $kn_{\min} \le n$, $i = \overline{1,k}$. Множині V відповідає початкова (корінна) вершина дерева, яка утворює множину підзадач першого рівня. Після розподілу всіх точок V по підмножинах $S_1,...,S_k$ закінчується формування k підзадач вихідної задачі на другому рівні. Підмножини третього рівня утворюються з тих підмножин другого рівня, для яких $|S_i| > 2n_{\min}$ і т.д. Якщо деяка підмножина S_t не може бути розбитою на k підмножин, оскільки $2n_{\min} \le |S_t| < kn_{\min}$, то визначається максимальна кількість підмножин $k = \bar{k}$, при якій $2n_{\min} \le \bar{k}n_{\min} \le |S_t|$, встановлюється $k = \bar{k}$, та процес розбиття продовжується. Він закінчується, якщо отримані такі множини, що $n_{\min} \le |S_i| < 2n_{\min}$, $i = \overline{1,k}$. Цим підмножинам відповідають кінцеві (висячі) вершини дерева підзадач.

Далі розв'язуються ЗК на підмножинах, і компонується розв'язок задачі на множині V за допомогою спеціальної процедури, яка формує розв'язок підзадач на кожному рівні дерева, починаючи з висячих вершин.

Обчислювальні дослідження евристичних алгоритмів викладеного підходу дозволяють зробити висновок про високу точність та швидкість розв'язання метричної ЗК. Для розв'язання напівметричної ЗК можна скористатися цими ж евристичними процедурами наступним чином.

Нехай A – алгоритм розв'язання метричної ЗК. Розглянемо два маршрути $\tau = (\tau[1], \tau[2], \tau[3], ..., \tau[n-1], \tau[n])$, $\hat{\tau} = (\tau[1], \tau[n], \tau[n-1], ..., \tau[3], \tau[2])$. Наступний алгоритм $\widehat{A}$ назвемо напівметричною версією алгоритму A [43].

1. Обчислити матрицю вартостей $\left[\widetilde{d_{ij}}\right]_n = \left[d_{ij}\right]_n + \left[d_{ij}\right]_n^T$.

2. Розв'язати метричну ЗК з матрицею $\left[\widetilde{d_{ij}}\right]_n$ алгоритмом A. Знайти τ_A та $\widetilde{D}(\tau_A)$ – вартість маршруту τ_A для матриці $\left[\widetilde{d_{ij}}\right]_n$.

3. З двох маршрутів τ_A і $\hat{\tau}_A$ обрати маршрут з меншою вартістю по матриці $\left[d_{ij}\right]_n$.

Фактично алгоритм A на кроку 2 знаходить пару маршрутів τ і $\hat{\tau}$ з

$$\widetilde{D}(\tau_A) = D(\tau_A) + D(\hat{\tau}_A).$$

Обговоримо прийоми підвищення точності розв'язків загальної ЗК великої розмірності. Відокремимо два підходи, що заслуговують практичного використання: застосування високоточних евристик побудови маршрутів для метричної ЗК та локальний пошук.

Перший підхід приводить до позитивних результатів після етапу еквівалентного перетворення матриць вартостей [25].

Нехай $\left[d_{ij}\right]_n$ – матриця вартостей ЗК, $S = (\tau_1, \tau_2, ..., \tau_r)$ – множина всіх її розв'язків, причому $D(\tau_1) \le D(\tau_2) \le ... \le D(\tau_r)$. ЗК з матрицею вартостей $\left[\hat{d}_{ij}\right]_n$ еквівалентна ЗК з матрицею $\left[d_{ij}\right]_n$, якщо $\widehat{D}(\tau_1) \le \widehat{D}(\tau_2) \le ... \widehat{D}(\tau_r)$. Якщо при цьому для будь-якого $\tau \in S$

$$\widehat{D}(\tau) = d_1 D(\tau) + d_2,$$

де d_1, d_2 $(d_1 > 0)$ – дійсні константи, то матриця $\left[\hat{d}_{ij}\right]_n$ отримана із матриці $\left[d_{ij}\right]_n$ еквівалентним лінійним перетворенням (ЕЛП). Умова константності для різних класів ЗК полягає в існуванні такого набору чисел $\{u_1, u_2, ..., u_n, v_1, v_2, ..., v_n\}$, що

$$d_{ij} = u_i + v_j,\ i, j = \overline{1,n},\ i \ne j. \qquad (2.6)$$

У випадку симетричної ЗК достатньо n чисел $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ таких, що

$$d_{ij} = d_{ji} = u_i + u_j,\ i, j = \overline{1,n},\ i \ne j. \qquad (2.7)$$

Таким чином, перетворення (2.6) та (2.7) залишають упорядкування маршрутів незмінними. При цьому вартість маршруту для несиметричної ЗК змінюється на величину $\sum_{i=1}^{n}(u_i + v_i)$, а для симетричної – на величину $2\sum_{i=1}^{n} u_i$.

Для застосування евристичних алгоритмів розв'язання метричної ЗК попередньо виконується ЕЛП, яке називається метризацією. Метризація несиметричної неметричної матриці $\left[d_{ij}\right]_n$, в якій можливо деякі $d_{ij} \le 0$, полягає в проведенні ЕЛП:

$$d'_{ij} = d_{ij} + u_i + v_j\,,\ i, j = \overline{1,n}\,,\ i \ne j\,,$$

так, щоб виконувались умови:

$$d'_{ij} \ge 0\,,\ i, j = \overline{1,n}\,,\ d'_{ij} + d'_{jk} \ge d'_{ik}\,,\ i \ne k\,, i, j, k = \overline{1,n}\,.$$

Ці умови дають:

$$u_i + v_j \ge -d_{ij}\,,\ i, j = \overline{1,n}\,, i \ne j\,;\quad u_i + v_j \ge \max\left\{d_{ik} - d_{ij} - d_{jk}\,\middle|\, i, k, i \ne k\right\}.$$

Якщо поставити вимогу, щоб

$$\sum_{i=1}^{n}\left(u_i + v_i\right) \to \min\,,$$

отримаємо задачу, що є подвійною до ЗП на максимум з матрицею $\left[d_{ij}\right]_n$, в якій діагональні елементи дорівнюють $d_{jj} = \max\left\{d_{ik} - d_{ij} - d_{jk}\,\middle|\, i, k, i \ne k\right\}$.

Метризація потребує $O\left(n^3\right)$ операцій.

Коротко охарактеризуємо другий підхід, який отримав розвиток на основі класичних визначень глобально- і локально-оптимальних розв'язків [2], [30].

Глобальним оптимальним або просто оптимальним розв'язком загальної ЗК є такий гамільтонів контур τ^* на множині всіх гамільтонових контурів T, що $D\left(\tau^*\right) \le D(\tau)$ для всіх $\tau \in T$.

Локальний оптимальний розв'язок індивідуальної ЗК визначається відносно довільного маршруту $\tau \in T$ (допустимої точки) на множині $N(\tau)$ точок, які у відомому сенсі близькі до даної точки τ. Множина $N(\tau)$ називається системою околів (*рос.* окрестностей) або окільною функцією. Для загальної ЗК окільною функцією є k-заміна, яка визначається наступним чином:

$N_k(\tau) = \{\omega \,|\, \omega \in T$ і ω можна отримати видаленням із τ k та заміною їх k дугами $\}$.

Розв'язок $\omega^0 \in T$ називається локальним відносно $N_k(\tau)$, якщо $D\left(\omega^0\right) \le D(\omega)$ для всіх $\omega \in N_k(\tau)$.

Нехай дана задача оптимізації з допустимою множиною T і системою околів N. Якщо будь-яка точка $\tau \in T$, локально-оптимальна відносно N, буде глобально-оптимальною, кажуть, що система околів N є точною. В ЗК розмірності n N_k, $k < n$, не є точним, а N_n – точний окіл.

Розв'язки ЗК, локально-оптимальні відносно системи околів N_k, називаються k-оптимальними. Ідея побудови k-оптимальних розв'язків є максимально простою: по вихідному допустимому маршруту τ будується маршрут $\omega^0 \in N_k(\tau)$. Якщо $D\left(\omega^0\right) \ge D(\tau)$, то τ – k-оптимальний маршрут, інакше k-заміною поліпшується розв'язок ω^0.

Ця ідея отримала алгоритмічну та програмну реалізації. У вигляді процедур 2- і 3-оптимізації допустимого маршруту в симетричній ЗК з різними способами вибору ребер для видалення та заміни [25]. Наприклад, до таких способів належить операція інвертування. В процедурі 2-оптимізації з інвертуванням для вихідного маршруту послідовно, починаючи з ланцюгів, що починаються у вершині 1, потім 2 і т.д., інвертуються всі ланцюги, що складаються з $1, 2, \ldots, \lceil n/2 \rceil$ ребер. Якщо вартість маршруту зменшується, то ланцюг залишається в маршруті в інвертованому вигляді, інакше ланцюг залишається незмінним. Один із варіантів процедури 3-оптимізації виконується наступним чином. На кроку l, $l = \overline{1,r}$, $r \le \lceil n/2 \rceil$, поліпшення вихідного маршруту τ всі ланцюги, що складаються з l вершин, що йдуть одна за одною, видаляються для включення по черзі між рештою вершин та залишаються там, де зменшення вартості τ від такого включення є максимальним [25].

Для висновку відмітимо, що викладені результати не претендують на повноту освітлення, але характеризують стан та визначають напрямок досліджень не лише проблеми комівояжера, але і цілого класу задач комбінаторної оптимізації.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Панішев А.В., Плечистий Д.Д., Скачков В.О.* Вузлові питання задачі комівояжера. 1 // Вісник Житомирського державного технологічного університету. – 2004. – № 29. – С. 198–204.
2. *Пападимитриу Х., Стайглиц К.* Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. – М.: Мир, 1985. – 510 с.
3. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – М.: Мир, 1982. – 416 с.
4. *Панішев А.В., Данильченко О.М., Скачков В.О.* Вступ до теорії складності дискретних задач. – Житомир: ЖДТУ, 2004. – 326 с.
5. *Гимади Э.Х., Сердюков А.И.* О некоторых результатах для задачи коммивояжера на максимум // Дискретный анализ и исследование операций. – Новосибирск, 2001. – Серия 2. – Том 8. – № 1. – С. 22–39.
6. *Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х.* Задача коммивояжера. Вопросы теории // Автоматика и телемеханика. – 1989. – № 9. – С. 3–33.
7. *Артынов А.П., Ембулаев В.Н., Пупышев А.В., Скалецкий В.В.* Автоматизация управления транспортными системами. – М.: Наука, 1984. – 271 с.
8. *Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х.* Задача коммивояжера. Точные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. – 1989. – № 10. – С. 3–29.
9. *Little J.D.C., Murty K.G., Sweeny D.W., Karel C.* An Algorithm for the Traveling Salesman Problem // Oper. Res. – 1963. – 11. – P. 972–989.
10. Компьютер и задачи выбора / Автор предисл. Ю.И. Журавлёв. – М.: Наука, 1989. – 208 с.
11. *Held M., Karp R.M.* The Traveling Salesman Problem and Minimum Spanning Trees // Oper. Res. – 1970. – 18. – P. 1138–1162.
12. *Сергиенко И.В., Киспшицкая М.Ф.* Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. – Киев: Наукова думка, 1981. – 288 с.
13. *Шор М.З.* Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. – Киев: Наукова думка, 1979. – 199 с.
14. *Ковалёв М.М., Котов В.М.* Серии эвристик: «30 Int. Wiss. Kolloq., Ilmenau, 21-25okt., 1985, Hoft. S. Vortragst.F."» – Ilmenau, 1985. – P. 256–279.
15. *Kosaraju S.R., Park I.K., Stein C.* Long tours and shot superstrings // 35th Annual IEEE Symposium on Foundation of Computer Science. – Los Alamitos, SA: Comput. Soc. Press. – 1994. – P. 166–177.
16. *Barvinok A.I.* Two algorithmic results for traveling salesman problem // Math. Oper. Res. – 1996. – Vol. 21. – № 1. – P. 65–84.
17. *Papadimitriu C.H., Yannakakis M.* The traveling salesman problem with distance one and two // Math. Oper. Res. – 1993. – Vol. 18. – № 1. – P. 1–11.
18. *Fisher M.L., Nemhauser G.L., Wolsey L.A.* An analysis of approximations for finding a maximum weight Hamiltonian circuit // Oper. Res. – 1979. – Vol. 27. – № 6. – P. 799–809.
19. *Ковалев М.М., Котов В.М.* Оценки погрешности серий приближенных алгоритмов // Вестн. Белорус. ун-та. – 1986. – Вып. 3(1). – С. 44–50.
20. *Ковалев М.М., Котов В.М.* Субоптимальные алгоритмы для решения задачи коммивояжера // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. физика, математика, механика. – 1982. – № 1. – С. 1–31.
21. *Hassin R., Rubinstein S.* An approximation algorithm for the maximum traveling salesman problem // Inform. Process. Lett. – 1998. – Vol. 67. – № 3. – P. 125–130.

22. *Сердюков А.И.* Асимптотически точный алгоритм для задачи коммивояжера на максимум // Управляемые системы: Сб. науч. тр. – Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1984. – Вып. 25. – С. 80–86.
23. *Сигал И.Х.* Алгоритм приближенного решения задачи коммивояжера большой размерности на плоскости // ЖВМ и МФ. – 1988. – Т. 28. – № 8. – С. 1258–1272.
24. *Владимирова Н.Ю., Сигал И.Х.* Параметризация при решении некоторых классов задач дискретной оптимизации большой размерности. – М.: Вычислительный центр РАН, 2001. – 79 с.
25. *Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х.* Задача коммивояжера. Приближенные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. – 1989. – № 11. – С. 3–26.
26. *Сигал И.Х.* Дискретные модели и методы решения задачи типа коммивояжера большой размерности: исследование, комбинаторные алгоритмы, вычислительный эксперимент, применение. Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук. – М., 1990. – 33 с.
27. *Сигал И.Х.* Алгоритм приближенного решения задачи коммивояжера большой размерности и его вычислительная реализация // ЖВМ и МФ. – 1987. – Т. 27. – № 8. – С. 1145–1153.
28. *Сигал И.Х.* Задача коммивояжера большой размерности. – М.: ВЦ АН СССР, 1986. – 23 с.
29. *Сигал И.Х.* Последовательность применения алгоритмов приближенного решения в комбинированном алгоритме решения задачи коммивояжера // ЖВМ и МФ. – 1989. – Т.29. – № 11. – С. 1714–1721.
30. *Кармен С.* Математические методы в теории игр, программировании и экономике. – М.: Мир, 1964. – 840 с.

КОСТИКОВА Марина Володимирівна – доцент Харківського національного автомобільно-дорожнього університету.

Наукові інтереси:
– теорія розкладів;
– дискретна оптимізація.

ПАНІШЕВ Анатолій Васильович – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри інформатики та комп'ютерного моделювання Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:
– теорія розкладів;
– комбінаторна оптимізація.

ПЛЕЧИСТИЙ Дмитро Дмитрович – магістр комп'ютерних наук, аспірант Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:
– комп'ютерно-інформаційні технології;
– комбінаторна оптимізація.

Подано 2.06.2004