УДК 519.86:681.3.06

В.М. Мількевич, аспір.
Державний агроекологічний університет

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МАСОПЕРЕНОСУ НА НЕОДНОРІДНІЙ ПОВЕРХНІ В СЕРЕДОВИЩІ З УРАХУВАННЯМ ГРАНИЧНИХ ЗНАЧЕНЬ СТРУКТУРНОГО ПАРАМЕТРА

(Представлено проф. Шелудченко Б.А.)

В даній роботі отримана математична модель, яка описує процеси масопереносу на неоднорідній області з урахуванням механічного впливу граничних поверхонь і структури середовища на процес масопереносу

У науковій літературі існує значна кількість робіт, які описують різні задачі масопереносу. Вони вирішують широке коло проблем, пов'язаних із різними видами технічних завдань: проблеми підземного масопереносу, переносу домішок в атмосфері, поширення забруднення у водних об'єктах, задачі хімічної технології, масопереносу в композитних матеріалах тощо [1], [6]–[8], [10], [13], [15], [17], [18].

Всі задачі, що вирішують ці проблеми, можна поділити на дві групи.

1. Задачі масопереносу в фільтруючих матеріалах з урахуванням впливу структури середовища на параметри масопереносу і без врахування механічного впливу граничної поверхні руху на параметри масопереносу (така поверхня враховується лише як границя області масопереносу, де визначаються крайові умови для відповідної математичної задачі): підземний масоперенос — враховується структура середовища і масштаб усереднення, масоперенос відбувається за рахунок дифузії, механічної дисперсії і конвективного переносу (досить часто зустрічаються задачі без врахування середовища і конвективного переносу) [8], [10], [15], [17], [18]; масоперенос в непористих композитних матеріалах — враховується імовірнісний характер розподілу неоднорідностей середовища, масоперенос за рахунок дифузії [18].

2. Задачі масопереносу на поверхні, яка обмежує область масопереносу з урахуванням впливу структури поверхні на параметри масопереносу без врахування впливу масштабу усереднення неоднорідної поверхні й структури середовища в області масопереносу на параметри масопереносу: масоперенос в технологічних процесах, де використовуються багатофазні потоки, наприклад перенос дисперсної рідкої фази газовим потоком над поверхнею турбулентного потоку рідини — враховується вплив поверхні турбулентного потоку на паpамети руху газу (несучої фази) над такою поверхнею і роль поверхні в активності джерел речовини, рівномірно розподілених по поверхні [5]; поширення домішок в атмосфері — враховується вплив граничної поверхні на параметри потоку (зміни швидкості потоку несучої фази), масоперенос за рахунок процесів дифузії і конвективного переносу [1], [7], [13]; аналогічні підходи і в задачах поширення забруднень у водних об'єктах [6], задачі ерозії грунту [3], [16].

Врто зазначити, що дану групу задач об'єднує ще й те, що механічний вплив гарничної поверхні на параметри масопереносу враховується в основному через параметр швидкості, який формально відображається лише в рівняннях руху несучої фази і не має відображення безпосередньо в рівняннях масопереносу.

Однак існують задачі, формальна постановка яких не належить строго до вказаних груп задач [11]. Однією з таких актуальних на даний час проблем є задача горизонтального ландшафтного масопереносу. В межах проблеми характер процесу і області масопереносу вимагають врахування в одній моделі як умов масопереносу, властивих обом групам задач (врахування поверхні й структури середовища масопереносу одночасно), так і специфічних процесів, які виникають в даній області масопереносу і не були враховані в уже відомих моделях. Характерним для даної області масопереносу є те, що, змінюючи значення параметрів моделі, можна природно перейти до моделей зазначених груп задач, при цьому не змінюючи структуру вихідної моделі.

Завданням даного дослідження є:

1) отримання математичної моделі масопереносу на неоднорідній поверхні (з урахуванням механічного впливу на параметри масопереносу), яка є границею середовища масопереносу з параметром, що характеризує структуру (причому модель має враховувати всю область значень структурного параметра);

2) описати функцію джерел, використовуючи наступні механізми потрапляння речовини в потік несучої рідини (вода, повітря): розчинення речовини (фізико-хімічний процес), підняття в потік твердої фази за рахунок перепаду нормального тиску, механічного впливу на поверхню руху (процес механічної взаємодії потоку, граничної поверхні й середовища масопереносу).

Об'єктом дослідження є процеси масопереносу на неоднорідній поверхні в середовищі відповідної структури.

Результати досліджень

1. Постановка задачі

Область масопереносу

Визначимо характерні особливості області масоперносу (рис.1).

1. Існування у всій області масопереносу середовища (зі структурним параметром n_Ω), яке впливає на параметри цього процесу:

$$\Omega = \left\{ \Omega_i : n_\Omega = 0 \ldots 1;\ i = 1, 2, 3 \right\}.$$

2. На області масопереносу існують граничні поверхні з відповідною структурою, які впливають на параметри масопереносу:

$$\exists G \in \Omega, G = \left\{ G_i : n_G \geq 0;\ i = 1, 2, 3 \right\}.$$

Крім фізичного впливу множини G на параметри масопереносу за рахунок структурного параметра n_G, на G задаються крайові умови для відповідних математичних задач масопереносу на Ω_i.

3. Існує множина F джерел речовини, розподілених на Ω :

$$\exists F \in \Omega, F = \left\{ f_T, f_P : f_{T,P} = f\left(\Omega, G\right); f_T \in G_2; f_P \in G_i, \Omega_i;\ i = 2, 3 \right\},$$

де f_T – множина джерел твердої речовини;

f_P – множина джерел розчинної речовини.

4. На області Ω існує множина X і відображення g і h, які визначають на Ω множину C концентрації речовини і F відповідно:

$$\exists X \in \Omega, g : X \to C; h : X \to F; C = \left\{ c : c \in \Omega; c = c\left(\Omega, G, F\right) \right\},$$

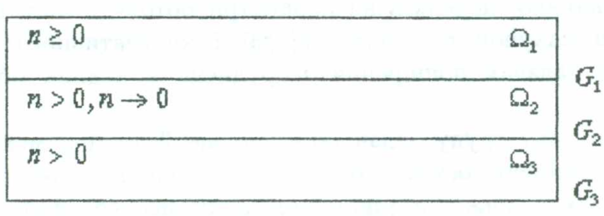

Рис. 1. Область масопереносу

Умови масопереносу на Ω

Розглянемо умови, які необхідно враховувати для розв'язку розглядуваної задачі.

1. Турбулентний характер руху. Враховується шляхом введення пульсацій швидкості і концентрації при усередненні області масопереносу. Механізм виникнення такої турбулентності добре описаний в літературі [5], [9]. В рівнянні балансу маси врахування турбулентного характеру руху визначається виникненням додаткової дифузійної складової $D_i \dfrac{\partial c}{\partial x_i}$ [1], [6], [10], [13], [15].

2. Додаткова турбулентність. Виникнення її пов'язане лише із наявним параметром $n_\Omega \neq 0$, який описує структуру середовища.

В літературі вказується на можливість турбулентного режиму фільтрації в пористому середовищі при відповідних значеннях параметра n_Ω [2], [4], [14]. На області масопереносу Ω в середовищі з різним n_Ω турбулентність обумовлюється як класичними причинами [1], [6], [10], [13], [15], так і додатковими пульсаціями швидкості й концентрації речовини на елементах середовища. Механізм таких пульсацій добре описаний в роботі [12].

3. Неоднорідність області масопереносу. Ця умова розкладається на дві: неоднорідність середовища і неоднорідність граничних поверхонь в області масопереносу.

Неоднорідність середовища в області масопереносу обумовлюється непостійністю величини n_Ω по об'єму усереднення, що пов'язане із існуванням періодичних порожнин в щільному середовищі або стрибків ущільнення фільтраційного середовища, де виникають відхилення швидкостей і концентрації речовини від середніх значень.

Неоднорідність граничних поверхонь в області масопереносу можна поділити на два типи:

а) вертикальна неоднорідність. Обумовлює виникнення пульсацій швидкості й концентрацій за рахунок кореляції із пульсаціями вертикальних параметрів граничних поверхонь (наприклад стрибки ухилу, щільності середовища граничної поверхні, мікрошорсткості тощо);

б) горизонтальна (просторова) неоднорідність. Обумовлює виникнення відхилень швидкості і концентрації речовини в області усереднення від середніх значень. Просторова неоднорідність пов'язана із частотою перетинів ліній току на області масопереносу, що істотно впливає на зміну параметрів потоку в такій області масопереносу.

4. Масштаб усереднення. В [10] вказувалося на необхідність введення поправок у рівняння масопереносу в неоднорідному середовищі, пов'язаних із масштабом усереднення. Збільшення масштабу усереднення в неоднорідному середовищі може призвести до збільшення ступеня неоднорідності і, відповідно, до збільшення величин відхилень (локальних) швидкостей і концентрацій від середніх значень.

В даному випадку є доцільним поширення врахування масштабу неоднорідності на сформульовану в задачі неоднорідну область масопереносу Ω.

5. Можливість набуття структурним параметром граничних значень $n_{\Omega,G} \to 0{,}1$. Врахування таких значень структурного параметра дає можливість розгляду в єдиній моделі ряду фізичних процесів, які відбуваються на G, що до цього розглядалося рядом різних моделей. Наприклад, врахування масопереносу з наявністю на G проникних і непроникних перепон, макрошорсткості.

Отже, задачу математичного моделювання масопереносу на неоднорідній поверхні в середовищі можна сформулювати такими чином. Враховуючи властивості (1–4), умови масопереносу на Ω і використовуючи рівняння балансу маси [5–7], [15]:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (cv) = f, \tag{1}$$

знайти відображення g на Ω і h на Ω.

2. Рівняння масопереносу

Для визначення усереднених величин у рівнянні (1) введемо до розгляду всереднені та пульсаційні значення концентрації і швидкості, причому усереднення будемо проводити одночасно за об'ємом і часом [7]:

$$\langle c \rangle = \frac{1}{2\Omega_A \Delta t} \int_{\Omega_A} \int_{2\Delta t} c \cdot d\Omega_A dt, \tag{2}$$

$$\langle v \rangle = \frac{1}{2\Omega_A \Delta t} \int_{\Omega_A} \int_{2\Delta t} v \cdot d\Omega_A dt, \tag{3}$$

де $\langle c \rangle$, $\langle v \rangle$ – усереднені за часом і об'ємом величини концентрації і швидкості;

Ω_A – об'єм, який займає речовина концентрації c;

t – час.

Враховуючи (2) і (3), запишемо:

$$c = \langle c \rangle + c', \tag{4}$$

$$v = \langle v \rangle + v',$$

Представимо пульсаційну складову в (4) як сукупність статистично незалежних пульсацій, виникнення яких обумовлене дією статистично незалежних подій, між якими немає кореляційного зв'язку:

$$\begin{aligned} c &= c_1' + c_2' + c_3', \\ v &= v_1' + v_2' + v_3', \end{aligned} \tag{5}$$

де c_1', v_1' — пульсаційні складові концентрації і швидкості, обумовлені звичайним механізмом виникнення турбулентності (умова 1);

c_2', v_2' — пульсаційні складові концентрації і швидкості, обумовлені наявністю структури середовища (умова 2);

c_3', v_3' — пульсаційні складові концентрації і швидкості, обумовлені вертикальною неоднорідністю граничних поверхонь (умова 3, а).

Враховуючи властивості усереднених величин [5], [7], [13] і (4), (5), запишемо:

$$\begin{aligned} \langle cv \rangle &= \left\langle \left(\langle c \rangle + c_1' + c_2' + c_3' \right)\left(\langle v \rangle + v_1' + v_2' + v_3' \right) \right\rangle = \\ &= \langle c \rangle \langle v \rangle + \langle c_1'v_1' \rangle + \langle c_1'v_2' \rangle + \langle c_1'v_3' \rangle + \langle c_2'v_1' \rangle + \langle c_3'v_1' \rangle \end{aligned} \tag{6}$$

Наявність лише шести складових в правій частині рівняння (6) можна пояснити наступним чином. Статистична незалежність складових в (5) і причин, які їх викликають, обумовлює наявність одностороннього кореляційного зв'язку компонентів c_2', v_2' і c_3', v_3' лише із компонентами c_1', v_1' і відсутність будь-якого кореляційного зв'язку між компонентами c_2', v_2' і c_3', v_3'.

Використаємо властивості об'ємного усереднення для врахування необхідних відхилень концентрації і швидкості. Як результат об'ємного усереднення маємо [10]:

$$\langle c \rangle \langle v \rangle = \langle c(x_0,t) \rangle \langle v(x_0,t) \rangle + \left\langle \left(\tilde{c}(x,t) + \delta\tilde{c} \right)\left(\tilde{v}(x,t) + \delta\tilde{v} \right) \right\rangle, \tag{7}$$

де $c(x_0,t)$ і $v(x_0,t)$ – відповідно середні значення концентрації і швидкості в точці x_0 - центрі ваги об'єму усереднення;

$\tilde{c}(x,t)$ і $\tilde{v}(x,t)$ – відповідно відхилення локального значення концентрації і швидкості в точці x, від їх середнього значення в цій точці. Дані величини обумовлюються неоднорідністю області масопереносу і збільшуються із збільшенням ступеня неоднорідності цієї області;

$\delta\tilde{c}$ і $\delta\tilde{v}$ – відповідно різниця між значеннями $\langle c, v \rangle$ в точках x_1 і x_0. $\delta\tilde{c}$ і $\delta\tilde{v}$ обумолюються масштабом усереднення і зі збільшенням масштабу усереднення збільшуються значення цих складових.

$\delta\tilde{c}$ Представимо додаткові відхилення як сукупності статистично незалежних відхилень, обумовлених властивостями середовища і граничних поверхонь області масопереносу.

$$\begin{aligned} \tilde{c} &= \tilde{c}_2 + \tilde{c}_3, \\ \tilde{v} &= \tilde{v}_2 + \tilde{v}_3, \\ \delta\tilde{c} &= \delta\tilde{c}_2 + \delta\tilde{c}_3, \\ \delta\tilde{v} &= \delta\tilde{v}_2 + \delta\tilde{v}_3, \end{aligned} \tag{8}$$

де $(\tilde{c},\tilde{v})_2, \delta(\tilde{c},\tilde{v})_2$ – відхилення, пов'язані з умовами середовища області масопереносу;

$(\tilde{c},\tilde{v})_3, \delta(\tilde{c},\tilde{v})_3$ – відхилення, пов'язані із умовами граничних поверхонь області масопереносу.

Попередньо припустивши, що пари $\tilde{c}$ і $\delta\tilde{v}$, $\delta\tilde{c}$ і $\tilde{v}$, $(\tilde{c},\tilde{v})_i$ і $(\tilde{c},\tilde{v})_j, \delta(\tilde{c},\tilde{v})_i$ і $\delta(\tilde{c},\tilde{v})_j$ є статистично незалежними. З врахуванням (7) і (8) рівняння (6) набуде вигляду:

$$\begin{aligned} \langle cv \rangle &= \langle c(x_0,t) \rangle \langle v(x_0,t) \rangle + \langle \tilde{c}_2\tilde{v}_2 \rangle + \langle \tilde{c}_3\tilde{v}_3 \rangle + \langle \delta\tilde{c}_2\delta\tilde{v}_2 \rangle + \langle \delta\tilde{c}_3\delta\tilde{v}_3 \rangle + \\ &+ \langle c_1'v_1' \rangle + \langle c_1'v_2' \rangle + \langle c_1'v_3' \rangle + \langle c_2'v_1' \rangle + \langle c_3'v_1' \rangle, \end{aligned} \tag{9}$$

Перепишемо (1) з урахуванням (9), причому, оскільки пульсації c_3' і v_3' є знакозмінні в області усереднення, то складовими $\langle c_1'v_3' \rangle$ і $\langle c_3'v_1' \rangle$ будемо нехтувати:

$$\frac{\partial \langle c \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\langle c \rangle \langle v \rangle \right) = -\nabla \cdot \left(\langle \tilde{c}_2 \tilde{v}_2 \rangle + \langle \tilde{c}_3 \tilde{v}_3 \rangle + \langle \delta\tilde{c}_2 \delta\tilde{v}_2 \rangle + \langle \delta\tilde{c}_3 \delta\tilde{v}_3 \rangle + \right. \\ \left. + \langle c_1'v_1' \rangle + \langle c_1'v_2' \rangle + \langle c_2'v_1' \rangle \right) + \langle f \rangle \quad (10)$$

В рівнянні (10) з'являються сім додаткових складових, які необхідно певним чином пов'язати з усередненими значеннями концентрацій і швидкостей. Представимо вказані складові наступним чином:

$$-\langle c_1'v_{i1}' \rangle = D_i \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial x_i}, \text{ [1], [6], [10], [13], [15]}, \quad (11)$$

$$-\langle c_2'v_{i1}' \rangle = D_{2_c i} \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial n_i}, \quad (12)$$

$$-\langle c_1'v_2' \rangle = D_{2_v i} \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial n_i}, \quad (13)$$

$$-\langle \tilde{c}_2 \tilde{v}_2 \rangle = D_{2i}' \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial n_i}, \quad (14)$$

$$-\langle \tilde{c}_3 \tilde{v}_3 \rangle = D_{3i}' \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial x_i}, \quad (15)$$

$$-\langle \delta\tilde{c}_3 \delta\tilde{v}_3 \rangle = -\frac{\partial \langle c \rangle}{\partial x_i} \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial x_j} \left[\left(x_{i\lambda_0} - x_{i\lambda} \right) \left(x_{j\lambda_0} - x_{j\lambda} \right) \right] = D_{3i}'' \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial x_i}, \quad (16)$$

$$-\langle \delta\tilde{c}_2 \delta\tilde{v}_2 \rangle = -\frac{\partial \langle c \rangle}{\partial n_i} \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial n_j} \left[\left(x_{in_0} - x_{in} \right) \left(x_{jn_0} - x_{jn} \right) \right] = D_{2j}'' \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial n_i}, \quad (17)$$

де D_i – коефіцієнт дифузії;

D_{ki}, D_{ki}', D_{ki}'' – коефіцієнт механічної дисперсії, k = 2, 3, 2c, 2v;

n – структурний параметр середовища (пористість); фізичний сенс градієнта швидкості $\frac{\partial \langle v \rangle}{\partial n}$ показано в роботі [12], аналогічну природу має і градієнт концентрації $\frac{\partial \langle c \rangle}{\partial n}$.

Для отримання (12)–(17) було використане припущення, що кореляції масопереносу компонент і компонент відхилень концентрації і швидкості прямо пропорційні градієнтам концентрації і швидкості; використали формулу Тейлора для функцій $\langle v(x,t) \rangle$, $\langle c(x,t) \rangle$ в околі точок x_{λ_0} (точка центру під області усереднення $\Omega_i^\lambda \in \Omega_i$) і x_{n_0} (точка центру під області усереднення $\Omega_i^n \in \Omega_i$) і обмежились лінійними складовими ряду.

Перепишемо (1), використовуючи (11)–(17):

$$\frac{\partial \langle c \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\langle c \rangle \langle v \rangle \right) = \nabla \cdot \left[\left(D_i + D_{3i}' + D_{3i}'' \right) \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial x_i} + \left(D_{2_c i} + D_{2i}' + D_{2i}'' \right) \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial n_i} + D_{2_v i} \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial n_i} \right] + \langle f \rangle. \quad (18)$$

Для завершеності моделі мають бути визначені граничні умови першого, другого і третього роду [1], [6]–[8], [10], [15]. Залежно від характеру підобласті масопереносу і специфічних умов на основі моделі (18) можуть бути поставлені різні математичні задачі.

3. Функція джерел речовини

З деякою мірою спрощення будемо вважати основним фізико-хімічним процесом потрапляння речовини в потік і звільнення її з потоку – процеси сорбції-десорбції. Такий процес можна описати таким чином [10], [15], [17]:

$$f_p' = D_p \left(c - c_S \right), \quad (19)$$

де f'_p – функція, яка описує фізико-хімічні процеси потрапляння речовини в потік, $\left[\frac{г}{м^2 с}\right]$;

D_p – коефіцієнт пропорційності, $\left[\frac{м}{с}\right]$;

c – концентрація речовини в потоці, $\left[\frac{г}{м^3}\right]$;

c_S – концентрація речовини на поверхні поділу фаз, $\left[\frac{г}{м^3}\right]$.

Для (19) можна записати:

$$f'_p = \begin{cases} (c - c_S) > 0, \; D_p = D_{p1} \text{ — a);} \\ (c - c_S) \le 0, \; D_p = D_{p2} \text{ — b),} \end{cases}$$

де a – процес адсорбції;

b – процес десорбції.

З огляду на розмірність вказаних величин можна зауважити, що якщо прийняти для D_p розмірність швидкості (що фізично пояснюється як швидкість направленого молекулярно-дифузійного переміщення речовини), то з'являється можливість використання (19) власне на всій неоднорідній області масопереносу. Така можливість пов'язана із введенням величини поверхні поділу фаз для визначення витрати речовини.

Запишемо:

$$f''_p = D_p (c - c_S) S_\Omega , \tag{20}$$

де f''_p – витрата речовини через поверхню поділу фаз, $\left[\frac{г}{с}\right]$;

S_Ω – величина поверхні поділу фаз, $\left[м^2\right]$.

Представимо S_Ω як суму двох складових — величину поверхні поділу фаз на множині G_i і величину поверхні поділу фаз на множині Ω_i: $S_\Omega = S_{G_i} + S_{\Omega_i}$. Досить складно визначити точно величини S_{G_i}, S_{Ω_i}. Тому припустимо, використовуючи певне спрощення, що S_{G_i}, S_{Ω_i} пропорційно залежать від деяких параметрів на G_i і Ω_i:

$$S_{G_i} = \alpha \frac{h}{l},$$

$$S_{\Omega_i} = \beta \left(1 - \frac{V_n}{V}\right),$$

де α, β – коефіцієнти пропорційності, $\left[м^2\right]$;

h – середня висота виступів мікрошорсткості на G_i, $[м]$;

l – середня відстань між виступами мікрошорсткості на G_i, $[м]$;

V_n – об'єм середовища, незайнятий твердою фазою, $\left[м^3\right]$;

V – весь об'єм середовища, $\left[м^3\right]$.

Позначивши $g = \frac{h}{l}$ і $\omega = \left(1 - \frac{V_n}{V}\right)$, запишемо (20) в такому вигляді:

$$f''_p = D_p \beta (c - c_S) \left(\frac{\alpha}{\beta} g + \omega\right).$$

Така форма для f_p'' зручна тим, що складова $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}g+\omega\right)$ є безрозмірною величиною, а $D_p\beta$ можна представити як новий дифузійний коефіцієнт із розмірністю $\left[\dfrac{м^3}{с}\right]$, який можна визначити з експериментальних даних.

Процес усереднення запишеться:

$$\left\langle f_p''\right\rangle=\frac{1}{2\Omega_A\Delta t}\int\limits_{\Omega_A}\int\limits_{2\Delta t}D_p\beta\left(c-c_S\right)\left(\frac{\alpha}{\beta}g+\omega\right)\cdot d\Omega_A dt=\left[D_p\beta\left(c-c_S\right)\left(\frac{\alpha}{\beta}g+\omega\right)\right]_{сер}. \qquad (21)$$

Для f_p' усереднене значення отримується аналогічним чином.

Для отримання функції джерела твердої речовини використаємо результати роботи [12] і підхід, прийнятий в [7] щодо визначення кількості твердої речовини, що піднімається в потік.

Рівняння руху двохфазного потоку (об'єднане для рідкої і твердої фаз) на заданій області масопереносу запишемо в такому вигляді:

$$\begin{aligned}&\rho(1-s)\left(\bar V\cdot\nabla\right)\bar V+\rho_s s\left(\bar V_s\cdot\nabla\right)\bar V_s+\rho\left[\bar V\left(\nabla\cdot K_{w_{11}}+\nabla\cdot K_{w_{12}}+\nabla\cdot K_{w_{21}}\right)\right]-\\&-\rho_s\left[\bar V_s\left(\nabla\cdot K_{s_{11}}+\nabla\cdot K_{s_{12}}+\nabla\cdot K_{s_{21}}\right)\right]=\rho(1-s)g+\rho_s sg-\nabla\cdot\Pi-\\&-\rho\left[\nabla\cdot T_{11}+\nabla\cdot T_{12}+\nabla\cdot T_{21}\right]-\rho_s\left[\nabla\cdot T_{s_{11}}+\nabla\cdot T_{s_{12}}+\nabla\cdot T_{s_{21}}\right]-\\&-\rho\left[A\bar V+BV^2-\frac{B}{\rho}\left(\sigma_{11i}+2\sigma_{12i}\right)\right],\end{aligned} \qquad (22)$$

де ρ, ρ_s — масова густина середовища і твердої фаз відповідно, $\left[\dfrac{г\cdot с^2}{м^4}\right]$;

s — об'ємна концентрація твердої фази;

$\bar v$, $\bar v_s$ — середня швидкість середовища (несучої рідини) і твердої фази відповідно, $\left[\dfrac{м}{с}\right]$;

∇ — оператор Гамільтона;

$\bar K_w$, $\bar K_s$ – пульсаційні вектори рідкої і твердої фази відповідно;

$\bar g$, $\bar\varepsilon$, $\bar\varepsilon_s$ – прискорення гравітаційних і негравітаційних (рідкої і твердої фази) сил відповідно, $\left[\dfrac{м}{с^2}\right]$;

Π — тензор молекулярних напружень;

T_{11}, T_{s11} — середні тензори додаткових напружень, які викликані перемішуванням рідких і твердих частинок;

T_{12}, T_{21}, T_{s12}, T_{s21} — середні тензори додаткових напружень, які викликані взаємодією рідких і твердих частинок із елементами структури середовища;

σ_{11i}, σ_{12i} — нормальні турбулентні напруження;

$$A=\alpha\frac{(1-n)^2}{d^2\left(n-\dot c_0\right)^2},\quad B=\beta\cdot\frac{1-n}{d\left(n-\dot c_0\right)},$$

де d – товщина елементів шорсткості;

n – просвітність;

$\left(n-\dot c_0\right)$ – ефективна просвітність;

α, β – коефіцієнти пропорційності.

Розглянемо плоский, квазістаціонарний, паралельний горизонтальній площині $y=0$ і однорідний вздовж осі x потік. Спроектуємо рівняння (22) на вісь y, прийнявши за умовою, що

$$w=v=w_s=v_s=0 \text{ і } \frac{\partial\Pi_{3k}}{\partial x_k}=\frac{\partial T_{3k}}{\partial x_k}=\frac{\partial T_{s_{3k}}}{\partial x_k}=0\text{, при } k=1,2.$$

Отримаємо:

$$\rho(1-s)g+\rho_s sg=\frac{\partial}{\partial y}\left[\Pi_{yy}+\rho\left(T_{11yy}+T_{12yy}+T_{21yy}\right)\right]+\rho_s\left(T_{s_{11yy}}+T_{s_{12yy}}+T_{s_{21yy}}\right)+$$
$$+B\left(T_{11yy}+T_{12yy}+T_{21yy}\right). \qquad (23)$$

Проінтегруємо (23) за y:

$$\int_0^y g\left(\rho_s-\rho\right)sdy=\int_0^y g\rho dy+\int_0^y\frac{\partial}{\partial y}\left[\Pi_{yy}+\rho\left(T_{11yy}+T_{12yy}+T_{21yy}\right)+\rho_s\left(T_{s_{11yy}}+T_{s_{12yy}}+T_{s_{21yy}}\right)\right]dy$$
$$+B\int_0^y\left[\left(T_{11yy}+T_{12yy}+T_{21yy}\right)\right]dy\ .$$

Позначимо $\Pi(y)$ перепад нормального молекулярного напруження в шарі $0\div y$ без врахування пульсацій в рідкій і твердій фазах:

$$\Pi(y)=\Pi_0-\Pi_{yy}-g\rho y\,.$$

Позначимо $\int_0^y g\left(\rho_s-\rho\right)sdy$, як це прийнято у [7], через $j(y)$, що є навантаженням потоку.

Таким чином, умови підйому твердих частинок можна записати:

$$j(y)=\Pi(y)-\left[\left(\rho+B_y\right)\left(T_{11yy}+T_{12yy}+T_{21yy}\right)+\rho_s\left(T_{s_{11yy}}+T_{s_{12yy}}+T_{s_{21yy}}\right)\right]>0 \qquad (24)$$

Щоб проаналізувати вплив елементів шорсткості на підйом твердих частинок у потік, тобто величину $j(y)$, порівняємо значення $j_1(y)$ для потоку, що не рухається в шарі шорсткості й $j_2(y)$ для потоку, що рухається в шарі шорсткості.

Представимо $j_1(y)$ в такому вигляді [7]:

$$j_1(y)=\Pi(x_3)-T_F(y)>0\,, \qquad (25)$$

де $T_F(y)$ – додаток до нормального тиску, викликаний діагональними складовими пульсаційних тензорів.

$$T_F(y)=\rho T_{yy}+\rho_s T_{s_{yy}}\,.$$

Запишемо другу складову правої частини виразу (24) у вигляді:

$$\left(\rho+B_y\right)\left(T_{11yy}+T_{12yy}+T_{21yy}\right)+\rho_s\left(T_{s_{11yy}}+T_{s_{12yy}}+T_{s_{21yy}}\right)=T_F(y)+T_H(y),$$

де $T_H(y)=\left(\rho+B_y\right)\left(T_{12yy}+T_{21yy}\right)+B_yT_{11yy}+\rho_s\left(T_{s_{12yy}}+T_{s_{21yy}}\right)$.

Вираз (24) набуде вигляду:

$$j_2(y)=\Pi(y)-T_F(y)-T_H(y)>0 \qquad (26)$$

Якщо маємо один і той самий потік, а $j_1(y)$ – навантаження потоку до його входження в шар шорсткості, а $j_2(y)$ – навантаження цього ж потоку після його входження в шар шорсткості, то очевидно, що: $j_1(y)>j_2(y)$.

Тобто нормальні турбулентні напруження $T_H(y)$, які виникають з появою шорсткості, зменшують навантаження потоку (або кількість речовини, яка потрапляє в потік).

Знайдемо екстремальне значення витрат твердої фази в умовах руху потоку на Ω. Скористаємося формулою (26). Оскільки потрібно вираховувати витрати твердої фази, то $j_2(y)$ перетворимо таким чином:

$$j_2(y)=\int_0^y g\left(\rho_s-\rho\right)dy=\left(1-\frac{\rho}{\rho_s}\right)\int_0^y\rho_s\mathrm{sgdy}=\left(1-\frac{\rho}{\rho_s}\right)j_{2_s}(y) \qquad (27)$$

Будемо вважати, як і в [7], що перепад нормального тиску обумовлений наявністю вихрового шару. Причому за наявності середовища з ненульовим структурним параметром, величина перепаду нормального тиску буде зменшуватись за рахунок взаємодії вихрового шару з елементами структури середовища (складова $T_H(y)$). Перепишемо (26), враховуючи вказане припущення і (27):

$$j_{2_S}(y) = \frac{1}{\left(1-\frac{\rho}{\rho_S}\right)}\left(\Pi(y) - T_F(y) - T_H(y)\right) = \frac{a_s\rho}{2\left(1-\frac{\rho}{\rho_S}\right)}\left[l_в \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{сер}\right]^2. \quad (28)$$

Градієнт швидкості на поверхні $y = 0$ можна представити як середній градієнт швидкості потоку через коефіцієнт пропорційності ξ [7]:

$$\xi \cdot \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_0 = \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{сер} \quad (29)$$

Можна записати, [7]:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_0 = \frac{\tau_{0s}}{\rho\nu(1+c_0)} \quad (30)$$

за умови $y = 0$.

З [12], зробивши попередньо деякі перетворення, можна отримати:

$$\frac{\tau_{0s}}{\rho} = \frac{\sqrt{\pi}\nu(1+c_\tau)\Delta u}{2\delta_e\sqrt{\ln\frac{h}{\delta_e} - \frac{8}{5}\psi\delta_e^2}}, \quad (31)$$

де τ_{0S} – дотичне напруження на граничній поверхні;

δ_e – ефективна шорсткість, $(1+c_\tau)c_s\delta = \delta_e$.

$$c_s = \sqrt{\frac{\tau_0 k}{\tau_{0_S}}\frac{a}{a_s}};$$

$$c_\tau = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\int_0^{\varphi_{2S}} c \cdot e^{-\varphi_{2S}}\, d\varphi_{2S}}{\operatorname{erf}\varphi_{2_S}};$$

c – функція, що залежить від концентрації твердої фази в потоці;

ψ – параметр, що залежить від структури середовища [12];

$$\varphi_{2S} = \frac{a_S u(y)}{v_*} + \frac{2}{5}\frac{\psi(n)}{v_* a_S};$$

a_S – деякий коефіцієнт;

v_* – динамічна швидкість.

Використовуючи (29)–(31), перепишемо (28) в наступному вигляді:

$$j_{2_S}(y) = \frac{a_s l_в^2 \xi^2 \left(u_h - u_{kph}\right)^2 \pi}{2\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_s}\right)\cdot\left(\left(2c_s\delta\sqrt{\ln\frac{h}{\delta_e} - \frac{8}{5}\psi c_s^2\delta^2(1+c_\tau)}\right)(1+c_0)\right)^2} = f_T', \quad (32)$$

де u_h – шидкість на висоті h;

u_{kph} – критична шидкість на висоті h;

f_T' – функція, яка описує потрапляння твердої речовини в потік, $\left[\frac{г}{м^2 c}\right]$.

$$f_T'' = f_T' \cdot S_{G_i} = f_T' \cdot \alpha \cdot g,$$

Де f_T'' – витрата твердої речовини через поверхню S_{G_i}, $\left[\frac{г}{c}\right]$.

Усереднене значення для f_T' і f_T'' отримуємо таким же чином, як і для $\left\langle f_p''\right\rangle$.

Висноки: отримана математична модель, яка описує процеси масопереносу на неоднорідній поверхні в середовищі із структурним параметром, який може набувати граничних значень; отримана функція джерела речовини для заданої області масопереносу.

Як ***перспектива подальших досліджень*** за результатами даної роботи логічно випливає необхідність проведення обчислювального експерименту для дослідження властивостей моделі.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Бызова Н.Л., Гаргер Е.К., Иванов В.Н.* Экспериментальные исследования атмосферной диффузии и расчёты рассеяния примеси. – Л.: Гидрометеоиздат, 1991. – 278 с.
2. *Бэр Я., Заславски Д., Ирмей С.* Физико-математические основы фильтрации воды. – М.: Мир, 1971. – 452 с.
3. *Гаршинев Е.А.* Противоэрозионная лесомелиорация и эволюция эрозионно-гидрологического процесса: Автор. Дис. На соиск. уч. степ. д.с/х.н. – Волгоград, 1995. – 47 с.
4. *Гольдберг В.М.* Взаимосвязь загрязнения подземных вод и природной среды. – Л.: Гидрометеоиздат, 1987. – 248 с.
5. *Дейч М.Е., Зарянкин А.Е.* Гидрогазодинамика. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 384 с.
6. *Дружинин Н.И., Шишкин А.И.* Математическое моделирование и прогнозирование загрязнения поверхностных вод суши. – Л.: Гидрометеоиздат, 1989. – 392 с.
7. *Дюнин А.К.* Механика деталей: вопросы теории проектирования снегорегулирующих средств. – Новосибирск: Издательство Сибирского отделения АН СССР, 1963. – 378с.
8. *Лаврик В.І., Булавацький В.М.* Математичне моделювання деяких нерівноважних процесів фільтраційно-конвективної дифузії // Доповіді Національної Академії Наук України, 2002. – № 2. – С. 68–72.
9. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. – Т. 4. – Гидродинамика. – М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1986. – 736 с.
10. *Ляшко С.И., Клюшин Д.А., Тригуб А.С.* Моделирование и оптимизация подземного масопереноса. – К.: Наукова думка, 1998 – 239 с.
11. *Мількевич В.М.* Загальна постановка задач кількісної оцінки горизонтального переносу речовини в ландшафті // Вісник Державного агроекологічного університету. – 2002. – № 2. – С. 164–167.
12. *Мількевич В.М.* Математичне моделювання руху двофазного потоку з врахуванням структури середовища // Вісник Житомирського Державного технологічного університету. – 2004. – № 2 (29) – С. 47–56
13. *Монин А.С., Яглош А.М.* Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. Часть 1. – М.: Наука, 1965. – 640 с.
14. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. – М.: Наука, 1977. – 664 с.
15. *Протодьяконов И.О., Люблинская И.Е., Рыжков А.Е.* Гидродинамика и массообмен в дисперсных системах жидкость–твёрдое тело. – Л.: Химия, 1987. – 336 с.
16. *Світличний О.О.* Кількісна оцінка характеристик схилового ерозійного процесу і питання оптимізації використання ерозійно-небезпечних земель: Автореф. дис. на здоб. наук. ступ. д.г.н. – Одеса, 1995. – 47 с.
17. *Циприс Д.Б., Саноян М.Г.* Двустороннее регулирование водного режима почв. Агрометеорологические аспекты / Под ред. Б.Б. Шуманова. – Л.: Гидрометеоиздат, 1978. – 184 с.
18. *Чернуха О.Ю.* Процеси дифузії в багатофазних випадково-неоднорідних тілах // Доповіді Національної Академії Наук України. – 2002. – № 3. – С. 74–79.

МІЛЬКЕВИЧ Віктор Миколайович – аспірант Державного агроекологічного університету.
Наукові інтереси:
- математичне моделювання масопереносу на неоднорідній області.

Тел.: (0412) 33-82-83 (д).

Подано 01.06.2004