

С.І. Болобан, викл.
А.М. Вагапов, к.т.н., с.н.с.
В.М. Котенко, к.т.н., доц.

Житомирський військовий інститут радіоелектроніки ім. С.П. Корольова

ОЦІНКА ПАРАМЕТРІВ СИГНАЛІВ АЛГОРИТМАМИ НА БАЗІ ПРОЦЕДУРИ ОРТОГОНАЛІЗАЦІЇ ГРАМА-ШМІДТА

Показано, що обчислювальна схема, що ґрунтується на ортогоналізації елементів векторного процесу за допомогою алгоритму Грама-Шмідта, дозволяє знаходити лінійні оболонки сигнальних підпросторів у проєкційних алгоритмах. Модифікація класичних процедур дозволяє підвищити ефективність оцінок параметрів сигналів. Показано, що існує можливість виконання алгоритмів, що використовують обернення кореляційної матриці даних спостереження на основі процедури ортогоналізації Грама-Шмідта (ОГШ). Запропоновано алгоритм оцінки відношення сигнал-шум з використанням властивостей процедури ОГШ.

Для рішення задач підвищення частотного розрізнення близько розташованих по спектру складових сигналів в останні 10–20 років широко досліджується можливість практичного використання алгоритмів нелінійного спектрального аналізу (НСА).

Методів і алгоритмів НСА, підходів до рішення задач НСА на теперішній час відомо досить багато. Одним з класів алгоритмів НСА є проєкційні алгоритми [1]. Вони засновані на властивостях належності сформованої послідовності даних деякій лінійній оболонці в багатовимірному просторі.

Однією з ефективних процедур, на якій можлива побудова проєкційних алгоритмів НСА, є процедура, відома в теорії матричного аналізу як процедура ортогоналізації Грама-Шмідта (ОГШ) [2]. Дослідженню можливості використання цієї процедури в проєкційних алгоритмах НСА присвячено ряд робіт, наприклад [3]. Результати, що викладені в даній роботі, дозволяють говорити про можливість розширення сфери використання процедури ОГШ та підвищення її ефективності.

Мета роботи: дослідження можливостей та ефективності використання процедури ОГШ в проєкційних алгоритмах оцінювання параметрів сигналів.

Припустимо, що цифровий частотний аналізатор формує, на основі вхідної одномірної часової вибірки деякої комплексної функції $s(t)$, векторний інформаційний процес (ВІП) розмірністю K . Модель комплексного ВІП у детермінованій постановці описується виразом (1):

$$\vec{Z}_K(t_i) = \sum_{m=1}^M \vec{V}_K^m c_m(t_i), \quad (1)$$

де M – кількість вузькосмугових складових в $s(t)$ (вважається відомою); $c_m(t_i)$ – форма сигналу m -ої складової; t_i – моменти часу, в які взяті відліки векторного процесу; \vec{V}_K^m – частотні вектори, що подаються:

$$\vec{V}_K^m = \left\{ \exp(-j2\pi f_m \tau_k) \right\}_{k=1}^K, \quad \tau_k = \Delta t(k-1),$$

f_m – несуча частота m -ої складової, Δt – крок за часом між елементами окремого вектора ВІП. Вузькосмуговість розуміється як

$$\max_m(\Delta F_m) \ll \frac{c}{(\tau_K - \tau_1)}, \quad (2)$$

де ΔF_m – ширина спектру m -ої складової, c – швидкість поширення сигналу в системі.

Інформаційний процес (1) володіє низкою властивостей, що покладені в основу проєкційних алгоритмів багатосигнального НСА. Насамперед, ці процеси є лінійною комбінацією векторів \vec{V}_K^m . При $K > M$, виконанні умови (2), процес (1) може розглядатися, як алгебраїчне представлення для векторів $\vec{Z}_K(t_i)$, в афінному базисі $V_K^M = \left\{ \vec{V}_K^m \right\}_{m=1}^M$ K – мірного комплексного евклідового простору E^K . Повну множину лінійних комбінацій:

$$\Xi_K^M (V_K^M) = \{ \vec{Z}_K \in E^K \} \tag{3}$$

будемо називати M - мірною лінійною оболонкою (ЛО) з афінним базисом V_K^M . Таким чином, ВІП (1) має фундаментальну властивість приналежності лінійній оболонці (3).

Суть проєкційних алгоритмів НСА полягає в наступному [1]:

1. За результатами спостереження ВІП (1) знаходиться лінійна оболонка (3).

2. На підставі властивостей ВІП можуть бути знайдені M частотних векторів \vec{V}_K^m і відповідні їм частоти f_m сигналів. При цьому використовується взаємна однозначність перетворення $\vec{V}_K(f_m) \leftrightarrow f_m$.

У проєкційних алгоритмах НСА знаходження ЛО рівноцінно оцінці проєктора Λ_{KK}^M [1] у ЛО. Розглянемо узагальнений матричний підхід до оцінки проєктора Λ_{KK}^M в ЛО евклідового простору E^K , оснований на фундаментальній властивості перестановочних нормальних матриць [2].

Будь-які перестановочні нормальні матриці A_{KK} , B_{KK} мають загальну базисну систему ортонормованих власних векторів:

$$A_{KK} = \sum_k a_k \vec{h}_K^k \vec{h}_K^{k+}, \quad B_{KK} = \sum_k b_k \vec{h}_K^k \vec{h}_K^{k+}, \quad (\vec{h}_K^i, \vec{h}_K^j) = \delta_{ij}, \tag{4}$$

де a_k , b_k - власні числа матриць A_{KK} , B_{KK} ; \vec{h}_K^k - власні вектори матриць A_{KK} , B_{KK} , δ_{ij} - символ Кронекера.

Проєктор Λ_{KK}^M є нормальним (самоспряженим) з рангом M :

$$\Lambda_{KK}^{M+} = \Lambda_{KK}^M, \quad Rank \Lambda_{KK}^M = M, \\ \Lambda_{KK}^M = V_{KM} V_{KM}^- = \sum_{m=1}^M \vec{n}_K^m \vec{n}_K^{m+}, \quad V_{KM}^- = (V_{KM}^+ V_{KM}^-)^{-1} V_{KM}^+,$$

де $\{ \vec{n}_K^m \in \Xi_K^M : (\vec{n}_K^i, \vec{n}_K^j) = \delta_{ij} \}$ - довільний ортонормований базис ЛО Ξ_K^M , позначка "+" - ермітове спряження, Rank - ранг матриці, позначка "-" - псевдо обернена матриця. Тоді згідно з (4) для побудови проєктора Λ_{KK}^M досить по ВІП побудувати деяку нормальну матрицю $\Phi_{KK}^M \{ Z_K(t) \}$ з рангом M , яка б комутувала з проєктором Λ_{KK}^M :

$$\vec{Z}_K(t) \rightarrow \Phi_{KK}^M : \Phi_{KK}^M \Lambda_{KK}^M = \Lambda_{KK}^M \Phi_{KK}^M, \quad Rank \Phi_{KK}^M = M. \tag{5}$$

При цьому оцінка проєктора Λ_{KK}^M представляється у вигляді:

$$\Lambda_{KK}^M \{ \vec{Z}_K(t) \} = \sum_1^m \vec{h}_K^m \vec{h}_K^{m+},$$

де $\{ \vec{h}_K^m \}$ - сукупність M власних векторів матриці Φ_{KK}^M , що відповідають M не рівним нулю власним числам (можливо кратним). Як матриця Φ_{KK}^M природно виступає самоспряжена матриця скалярних добутків або автокореляційна матриця (АКМ) ВІП. Для АКМ можливо одержати наступне представлення [1]:

$$R_{KK}^M = V_{KM} S_{MM} V_{KM}^+, \quad S_{MM} = \overline{\vec{c}_M(t) \vec{c}_M^+(t)}^{w(t)}. \tag{6}$$

Легко перевірити, що АКМ (6) задовольняє умову комутації (5), при цьому до вагової функції $w(t)$ необхідно пред'явити додатково "рангову" умову:

$$w(t) : Rank S_{MM} = Rank \int \vec{c}_M(t) \vec{c}_M^+(t) w(t) dt = M. \tag{7}$$

Можна показати [1], що умова (7) виконується, зокрема для лінійно незалежних сигналів (за параметром t) з рівномірною ваговою функцією. Практично, усереднення проводиться за дискретним числом відліків, а як оцінка максимальної правдоподібності АКМ використовується вибіркова АКМ (ВАКМ).

Розглянемо довільну матрицю:

$$B_{KK} = V_{KM} D_{MK}, \quad Rank V_{KM} = Rank D_{KN} = M. \tag{8}$$

Згідно з (8) стовпці матриці B_{KK} , будучи лінійною комбінацією векторів \vec{V}_K^M , належать ЛО Ξ_K^M :

$$\vec{B}_{KK} = \sum_k \vec{V}_K^k D_{MK} [k, j] \in \Xi_K^M (\vec{V}_K^M).$$

Тому ортогональний базис ЛО можна одержати процедурою ортогоналізації Грама-Шмідта стовпців B_{KK} . АКМ та її цілечислені степені належать до класу матриць (8).

АКМ ВІП, будучи ермітовою матрицею, представляється через свої ненегативні власні числа λ_k й ортонормовані в евклідовому просторі власні вектори \vec{h}_K^k (алгебраїчне спектральне представлення АКМ):

$$R_{KK} = \sum_{m=1}^M \lambda_m \vec{h}_K^m \vec{h}_K^{m+}, \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_M \geq \lambda_{M+1} = \dots = \lambda_K = 0.$$

Тоді проектор у ЛО Λ_{KK}^M в евклідовому просторі подається сумою діад власних векторів АКМ:

$$\Lambda_{KK}^M = \sum_1^M \vec{h}_K^m \vec{h}_K^{m+}, \quad (\vec{h}_K^i, \vec{h}_K^j) = \delta_{ij}. \tag{9}$$

Пошуковий алгоритм оцінки частот сигналів на основі проектора (9) відомий під найменуванням MUSIC [4]. Проекційна структура алгоритму MUSIC, на відміну від багатьох інших алгоритмів, зберігається і при статистичному рішенні задачі НСА.

До недоліків алгоритмів типу MUSIC належить необхідність вирішувати нелінійні алгебраїчні характеристичні рівняння K -того степеня при обчисленні власних чисел і власних векторів АКМ. При цьому аналітичні рішення існують для степеня K не вище четвертого. У випадку $K > 4$ використовуються наближені ітераційні методи. Це – складна обставина, оскільки виникають питання про швидкість збіжності ітерацій при близьких власних числах, "реального масштабу часу" виконання обчислень, й можливості виникнення режимів "зациклення", коли за рахунок високих вимог до точності оцінок власних чисел АКМ процес збіжності істотно сповільнюється [5].

При цифровій обробці ВІП формується вибірковий ряд (1):

$$\vec{Z}_K(t_1), \vec{Z}_K(t_2), \dots, \vec{Z}_K(t_L). \tag{10}$$

Тоді є можливим побудувати ортонормований базис ЛО Ξ_K^M найбільш просто [3] - шляхом ортогоналізації Грама-Шмідта ряду (10):

$$\{\vec{Z}_K(t_l), \quad l = \overline{1, L}\} \rightarrow \{\vec{w}_K^m(t_l) : (\vec{w}_K^i, \vec{w}_K^j) = \delta_{i,j}, \quad i, j = \overline{1, M}\},$$

де \vec{w}_K^i – ортонормовані вектори, що отримані процедурою ОГШ.

Процедура ОГШ довільної сукупності M ненульових комплексних K -вимірних векторів $\{\vec{Z}_K^m, m = \overline{1, M}\}$, $M \leq K$ подана у вигляді [2]:

$$\begin{aligned} \vec{W}_K^1 &= \vec{Z}_K^1, \quad \vec{w}_K^1 = \vec{W}_K^1 / \|\vec{W}_K^1\|, \\ \vec{W}_K^2 &= \vec{Z}_K^2 - (\vec{Z}_K^2, \vec{w}_K^1) \vec{w}_K^1, \quad \vec{w}_K^2 = \vec{W}_K^2 / \|\vec{W}_K^2\|, \\ \vec{W}_K^3 &= \vec{Z}_K^3 - (\vec{Z}_K^3, \vec{w}_K^1) \vec{w}_K^1 - (\vec{Z}_K^3, \vec{w}_K^2) \vec{w}_K^2, \quad \vec{w}_K^3 = \vec{W}_K^3 / \|\vec{W}_K^3\|, \\ &\dots \\ \vec{W}_K^m &= \vec{Z}_K^m - \sum_{j=1}^{m-1} (\vec{Z}_K^m, \vec{w}_K^j) \vec{w}_K^j, \quad \vec{w}_K^m = \vec{W}_K^m / \|\vec{W}_K^m\|, \quad m = \overline{1, M}, \\ (\vec{w}_K^i, \vec{w}_K^j) &= \delta_{ij}, \end{aligned}$$

де $(\bullet, \bullet), \|\bullet\|$ – скалярний добуток двох векторів і норма вектора в евклідовому просторі. Якщо сукупність векторів $\{\vec{Z}_K^m\}$ належить M -вимірній лінійній оболонці ($M < K$), то незалежно від вибору першого вектора процедура ОГШ формує ортонормований базис цієї оболонки. Таким чином, обираючи як перший вектор послідовно M векторів із сукупності $\{\vec{Z}_K^m\}$, можна процедурою ОГШ одержати M різних ортонормованих базисів однієї і тієї ж лінійної оболонки, що пов'язані між собою унітарними перетвореннями повороту.

У випадку присутності нормальних внутрішніх шумів, обмеженої точності представлення числа при аналого-цифровому перетворенні, й інших причинах точність одержання базису в істинну частотну лінійну оболонку падає. Крім цього, при формуванні базису методом ОГШ ВІП, використовується тільки частина векторів ВІП, доступних для спостереження. Як показують дослідження, дисперсія оцінки частоти алгоритмів на базі класичної процедури ОГШ значно перевищує значення дисперсії оцінок проєкційних алгоритмів типу MUSIC. Далі розглядається ряд модифікацій алгоритму ОГШ, що дозволяють дещо перебороти недоліки класичної процедури.

При врахуванні шуму в трактах частотно-аналізуючого пристрою векторний інформаційний процес, сформований на його виході, подається у вигляді:

$$\vec{Z}_K(t_i) = \sum_{m=1}^M c_m(t_i) \vec{V}_K^m + \vec{\xi}_K(t_i). \quad (11)$$

Вплив шумової складової $\vec{\xi}_K(t)$ призводить до помилок одержання базису для побудови проєктора в ЛО. У першу чергу це відбувається внаслідок того, що в процедурі ОГШ можуть брати участь вектори з ВІП (11), що мають норму, близьку до норми векторів $\vec{\xi}_K(t)$. У такому випадку, при проведенні ОГШ, у першу чергу бажано використовувати ті вектори ВІП, що мають найбільшу норму.

Як попередній етап ОГШ, у зв'язку зі сказаним вище, може бути запропоноване наступне. Серед усіх векторів (10) необхідно вибрати ті K , норма яких в евклідовому просторі максимальна. Проведене впорядкування по нормі дає нам K векторів з наступною властивістю:

$$\|\vec{Z}_K^{(1)}\| \geq \|\vec{Z}_K^{(2)}\| \geq \dots \geq \|\vec{Z}_K^{(K)}\|. \quad (12)$$

Як перший вектор в ортонормованому базисі ЛО приймається вектор

$$\vec{w}_K^{(1)} = \frac{\vec{Z}_K^{(1)}}{\|\vec{Z}_K^{(1)}\|}. \quad (13)$$

Далі виконується класична процедура ОГШ, у якій як вектори, що ортогоналізуються, використовуються вектори (12).

Запропонована модернізована процедура ОГШ по суті близька до процедури ОГШ з вибором «ведучого вектора», що використовується при розв'язанні систем лінійних рівнянь [6]. Вона не позбавлена недоліків. Основним з них є те, що серед векторів з максимальною нормою (12) можуть виявитися вектори ВІП, що мають високий коефіцієнт взаємної кореляції:

$$\rho_{ij} = \left| \left(\vec{Z}_K^{(i)}, \vec{Z}_K^{(j)} \right) \right|. \quad (14)$$

Ця властивість упорядкованого ряду векторів (12) призведе до недостатньої точності одержання оцінки проєктора. У зв'язку з цим можна запропонувати процедуру ОГШ, в якій на кожному етапі обчислення координат чергового ортонормованого вектора базису ЛО проводиться пошук вектора з перетвореного набору (12). При цьому шукається вектор, що має найменші коефіцієнти (14) із вже отриманими на попередніх етапах векторами базисного набору. У загальному випадку пошук може проводитися із усієї сукупності L векторів ВІП (10). Запропонована модифікована процедура ОГШ складається з декількох взаємозалежних етапів.

На першому етапі проводиться формування упорядкованої сукупності векторів (12) і оцінка першого вектора ортонормованого базису відповідно до (13).

На другому етапі серед сукупності векторів $\vec{Z}_K^{(l)}$, $l = 2, K$, для формування другого базисного вектора, відбирається один $\vec{Z}_K^{(2)}$, такий, що має з $\vec{w}_K^{(1)}$ найменший коефіцієнт кореляції:

$$\left| \left(\vec{Z}_K^{(l)}, \vec{w}_K^{(1)} \right) \right| = \min_l \Rightarrow \vec{Z}_K^{(2)}. \quad (15)$$

Вектор (15) дозволяє одержати координати другого ортонормованого базисного вектора відповідно до

$$\bar{w}_K^{(2)} = \frac{\left(\bar{Z}_K^{(2)'} - \left(\bar{Z}_K^{(2)'}, \bar{w}_K^{(1)} \right) \bar{w}_K^{(1)} \right)}{\left\| \bar{Z}_K^{(2)' - \left(\bar{Z}_K^{(2)'}, \bar{w}_K^{(1)} \right) \bar{w}_K^{(1)} \right\|} = \frac{\left(\bar{Z}_K^{(2)' - \bar{P}r_{\bar{w}_K^{(1)}} \left(\bar{Z}_K^{(2)'} \right) \right)}{\left\| \bar{Z}_K^{(2)' - \bar{P}r_{\bar{w}_K^{(1)}} \left(\bar{Z}_K^{(2)'} \right) \right\|},$$

де $\bar{P}r_{\bar{w}_K^{(1)}} \left(\bar{Z}_K^{(2)'} \right)$ – вектор-проекція $\bar{Z}_K^{(2)'}$ на $\bar{w}_K^{(1)}$.

На наступних m -тих ($m = \overline{3, M}$) етапах для формування чергового базисного вектора ЛО з ряду (12) відбираються вектори, що мають найменшу величину проекції на гіперплощину утворену базисними векторами отриманими на попередніх етапах:

$$\bar{P}r_{\bar{w}_K^{(1)}, \dots, \bar{w}_K^{(m-1)}} \left(\bar{Z}_K^{(m)'} \right) - \min_l \Rightarrow \bar{Z}_K^{(m)'}. \tag{16}$$

Вектори (16) дозволяють одержати повну базисну систему векторів ЛО і побудувати проєктор:

$$\bar{w}_K^{(m)} = \frac{\left(\bar{Z}_K^{(m)'} - \bar{P}r_{\bar{w}_K^{(1)}, \dots, \bar{w}_K^{(m-1)}} \left(\bar{Z}_K^{(m)'} \right) \right)}{\left\| \bar{Z}_K^{(m)'} - \bar{P}r_{\bar{w}_K^{(1)}, \dots, \bar{w}_K^{(m-1)}} \left(\bar{Z}_K^{(m)'} \right) \right\|},$$

$$\Lambda_{KK}^M = \sum_{m=1}^M \bar{w}_K^m \bar{w}_K^{m+}. \tag{17}$$

Проєктор (17) дозволяє формувати алгоритми багатосигнального оцінювання параметрів сигналів. Описана процедура може бути поширена на всю сукупність векторів ВПІ.

Дослідження характеристик класичної процедури ОГШ і запропонованої модифікованої процедури ОГШ (МОГШ) проводилося методом статистичного імітаційного моделювання на ЕОМ. Моделювалася ситуація, коли на вході частотного аналізатора присутні три вузькосмугові складові сигналу. Розмірність ВПІ $K = 8$. Кількість векторів ВПІ $L = 128$. Оцінювалася середньоквадратична помилка (СКП) визначення несучих частот складових сигналів при різних відношеннях сигнал-шум (ВСП). Усереднення проводилося за 100 іспитам. Для порівняння на рисунку представлено середньоквадратичну помилку оцінювання алгоритмом MUSIC та нижню інформаційну границю Рао-Крамера для досліджуваного випадку. З аналізу залежностей можна зробити такі висновки: середньоквадратична помилка оцінювання алгоритмом MUSIC значно менша СКП класичної та модифікованої процедур ОГШ ВПІ; похибка оцінювання алгоритму на базі модифікованої процедури ОГШ приблизно в 2,5 рази менша СКП класичної процедури ОГШ. Дослідження показують, що перевага модифікованої процедури ОГШ залишається при ортогоналізації стовпців ВАКМ, при цьому СКП МОГШ та СКП MUSIC стають близькими за значенням, а СКП класичної ОГШ в 1,5 рази більше.

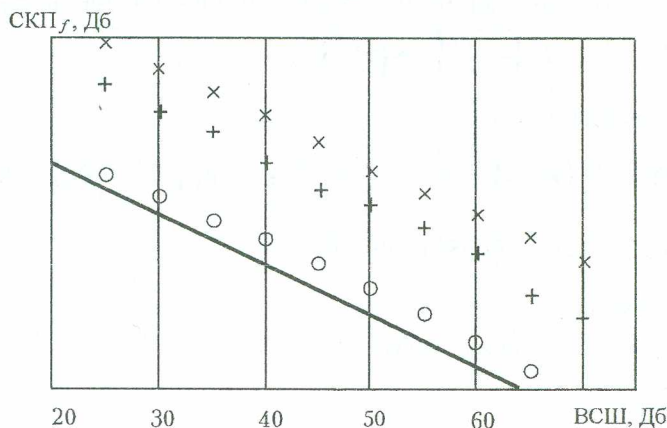


Рис. 1. Середньоквадратична помилка оцінки частоти
 — границя Рао-Крамера, × – класична процедура ОГШ,
 + – модифікована процедура ОГШ, о – алгоритм MUSIC

Одними з відомих класів алгоритмів НСА є алгоритми на базі піднесення до довільного степеня зворотної ВАКМ [7]. Проводячи порівняння алгоритмів типу [7] з алгоритмами на основі ОГШ, можна помітити їхній глибокий зв'язок. Справді, ермітово-спряжена зворотна ВАКМ збігається із спряженою ВАКМ, стовпці якої біортогональні (в евклідовій метриці) до стовпців ВАКМ і знаходяться процедурою ОГШ. Звідки випливає, що формування зворотної матриці можливо процедурою ОГШ зі спряженої ВАКМ. Покажемо цю можливість.

Вектори-стовпці ВАКМ

$$R_{KK} = (\bar{R}_K^1, \bar{R}_K^2, \dots, \bar{R}_K^K) \tag{18}$$

є лінійно-незалежними і при цьому афінним базисом евклідового векторного простору E^K . Для будь-якого довільного базису простору E^K існує єдиний біортогональний базис [2]:

$$(\bar{R}_K^{11}, \bar{R}_K^{12}, \dots, \bar{R}_K^{1K}) = R_{KK}^\perp, \tag{19}$$

такий, що

$$(\bar{R}_K^i, \bar{R}_K^{1j}) = \delta_{ij}. \tag{20}$$

Матрицю R_{KK}^\perp в (19) будемо називати біортогональною ВАКМ (БВАКМ).

Скалярний добуток комплексних векторів у евклідовому векторному комплексному просторі за визначенням [2] є

$$(\bar{A}_K, \bar{B}_K) = \sum_k \alpha_k b_k^* = \bar{B}_K^+ \bar{A}_K, \tag{21}$$

де \bar{A}_K і \bar{B}_K довільні вектори-стовпці. Враховуючи (21), скалярний добуток (20) переписеться у вигляді:

$$(\bar{R}_K^i, \bar{R}_K^{1j}) = \bar{R}_K^{1j+} \bar{R}_K^i = \delta_{ij}, \quad i = \overline{1, K}, \quad j = \overline{1, K}. \tag{22}$$

В матричному записі (22) прийме вигляд

$$R_{KK}^{1+} R_{KK} = I_{KK},$$

де I_{KK} – одинична матриця. Звідки легко зробити висновок, що для зворотної ВАКМ вірна рівність:

$$R_{KK}^{-1} = R_{KK}^{1+}. \tag{23}$$

Отже для знаходження зворотної до ВАКМ матриці досить знайти будь-яким способом БВАКМ і застосувати до неї операцію ермітового спряження.

Найбільш зручним і швидким способом знаходження БВАКМ вважається процедура ОГШ. На першому етапі побудуємо перший вектор з біортогонального набору (19). Цей вектор у першу чергу повинен задовольняти умову:

$$\bar{R}_K^{11} \perp \{\bar{R}_K^2, \bar{R}_K^3, \dots, \bar{R}_K^K\} = \Xi_K^{K-1} \{\bar{R}_K^i, i = \overline{2, K}\}. \tag{24}$$

Вектор, що задовольняє умову (24), позначимо $\tilde{\bar{R}}_K^{11}$. За допомогою процедури ОГШ легко побудувати з векторів (24) ортонормований базис лінійної оболонки $\Xi_K^{K-1}(\bar{R}_K^i, i = \overline{2, K})$:

$$\{\bar{R}_K^2, \bar{R}_K^3, \dots, \bar{R}_K^K\} \xrightarrow{\text{ОГШ}} \{\bar{u}_K^2, \bar{u}_K^3, \dots, \bar{u}_K^K\}, \tag{25}$$

за допомогою якого знайдемо $\tilde{\bar{R}}_K^{11}$:

$$\tilde{\bar{R}}_K^{11} = \bar{R}_K^1 - \sum_{i=2}^K (\bar{R}_K^1, \bar{u}_K^i) \bar{u}_K^i, \quad \text{де } \sum_{i=2}^K (\bar{R}_K^1, \bar{u}_K^i) \bar{u}_K^i = \text{Pr}_{\Xi_K^{K-1}}(\bar{R}_K^1). \tag{26}$$

В останню чергу проводимо нормування $\tilde{\bar{R}}_K^{11}$:

$$\bar{R}_K^{11} = \mu_1 \tilde{\bar{R}}_K^{11} \tag{27}$$

з метою того, щоб \bar{R}_K^{11} задовольняв умову:

$$(\bar{R}_K^{11}, \bar{R}_K^1) = 1.$$

Коефіцієнт μ_1 знаходиться з рівняння:

$$\mu_1 \left(\tilde{R}_K^{11}, \bar{R}_K^1 \right) = 1 \Rightarrow \mu_1 = \frac{1}{\left(\tilde{R}_K^{11}, \bar{R}_K^1 \right)} \quad (28)$$

Проведення ще $K - 1$ разів процедур (25)–(28) з векторами $\bar{R}_K^i, i = \overline{2, K}$ дозволить сформулювати БВАКМ.

У такий спосіб знаходження зворотної ВАКМ зводиться до безітераційної K -етапної процедури ОГШ, що описана вище, з наступним ермітовим спряженням БВАКМ і може бути використане в алгоритмах типу [7] для оцінки параметрів сигналів.

У ході досліджень характеристик та показників проекційних алгоритмів з формуванням проектора процедурою ОГШ було виявлене явище, що дозволяє оцінити значення відношення сигнал-шум на етапі формування проекторів у ЛО процедурою ОГШ.

При оцінці параметрів сигналів алгоритмом ОГШ проводився контроль точності ортогоналізації векторів базисів лінійних сигнальної і шумової оболонок в E^K :

$$W_{KK} : \{ \bar{w}_K^1, \bar{w}_K^2, \dots, \bar{w}_K^K \} \quad (29)$$

при різних значеннях відношення сигнал-шум.

Матриця W_{KK} (29) є унітарною ([2]). Тоді для неї характерна властивість:

$$W_{KK}^+ = W_{KK}^{-1} \Rightarrow W_{KK} W_{KK}^+ = I_{KK} \quad (30)$$

Властивість (30) може бути покладена в основу формування міри точності проведення ортогоналізації Грама-Шмідта векторів ВП. Така міра була прийнята у вигляді:

$$\mu_{\text{ОГШ}} = \frac{\|W_{KK} W_{KK}^+ - I_{KK}\|}{\|I_{KK}\|} \quad (31)$$

Дослідження поведінки міри (31) при різних відношеннях сигнал-шум проводилося методом імітаційного статистичного моделювання на ЕОМ. Умови експериментів аналогічні умовам описаним раніш при дослідженнях СКП оцінок різними алгоритмами. Графіки залежності параметра (31) від ВСШ представлені на рис. 2. Аналіз графіків показує, що при обчисленнях з одинарною і подвійною точностями та при 32-х бітному представленні чисел з фіксованою комою, в діапазоні відношення сигнал-шум 10–90 Дб (крива 1) параметр (31) має лінійну залежність. При проведенні обчислень з фіксованою комою та представленні чисел у вигляді 8 та 16 біт лінійність характеристики зберігається, але в меншому діапазоні ВСШ. Дане явище дозволяє запропонувати функцію (31) як алгоритм оцінки відношення сигнал-шум на вході пристрою, що проводить оцінку параметрів сигналу на етапі формування проекторів у проекційних алгоритмах НСА.

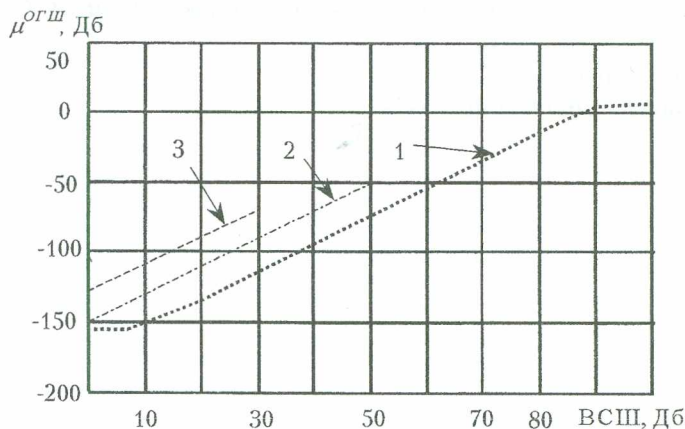


Рис. 2. Точність ОГШ при проведенні обчислень:

1 – з подвійною точністю та з плаваючою комою; 2 – з 16-бітними числами з фіксованою комою, 3 – з 8-бітними числами з фіксованою комою

Висновки

На базі узагальненого матричного підходу до формування проекторів у проекційних алгоритмах запропонований ряд модифікованих алгоритмів, знаходження сигнальних лінійних оболонок з використанням базової процедури ОГШ.

Показано глибокий взаємозв'язок алгоритмів, заснованих на оберненні ВАКМ із процедурою ОГШ.

Запропоновано алгоритм оцінки відношення сигнал-шум на основі аналізу точності побудови ортонормованого базису сигнальної ЛО процедурою ОГШ.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Ваганов А.М. Оценки максимального правдоподобия пеленгов и формы линейно-независимых сигналов // Радиотехника и электроника. – 1989. – Т. 34. – № 10. – С. 2094–2102.
2. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
3. Ратынский М.В., Черемисин О.П., Кузин С.С., Пушин А.Е., Комов А.А. Эффективные алгоритмы обработки стохастических сигналов на основе схемы ортогонализации Грама-Шмидта // Радиотехника и электроника. – 1995. – Т. 40. – № 1. – С. 66–73.
4. Марпл-мл. С.А. Цифровой спектральный анализ и его приложения / Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 584 с.
5. Лоусон Ч., Хенсон Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов / Пер. с англ. – М.: Наука, 1986. – 232 с.
6. Райс Дж. Матричные вычисления и математическое обеспечение / Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 264 с.
7. Гершман А.Б., Ермолаев В.Т., Флакман А.Г. Анализ сверхразрешения некоррелированных источников излучения в адаптивных антенных решетках // Изв. Вузов / Радиофизика. – 1988. – Т. 31. – № 11. – С. 1374.

БОЛОБАН Сергій Іванович – викладач Житомирського військового інституту радіоелектроніки ім. С.П. Корольова.

Наукові інтереси:

– просторово-часова обробка сигналів.

ВАГАПОВ Арслан Мингазович – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник Житомирського військового інституту радіоелектроніки ім. С.П. Корольова.

Наукові інтереси:

– просторово-часова обробка сигналів.

КОТЕНКО Володимир Миколайович – кандидат технічних наук, доцент, начальник кафедри Житомирського військового інституту радіоелектроніки ім. С.П. Корольова.

Наукові інтереси:

– теорія складних сигналів;
– просторово-часова обробка сигналів.

Подано 4.03.2004