

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РУХУ ДВОФАЗНОГО ПОТОКУ  
З ВРАХУВАННЯМ СТРУКТУРИ СЕРЕДОВИЩА**

(Представлено проф. Шелудченко Б.А.)

*В даній роботі отримана математична модель, яка описує рух двофазного потоку нестискуваної в'язкої рідини в середовищі змінної структури. Модель враховує турбулентний характер руху, наявність твердої фази в потоці, зміну параметрів руху потоку в неоднорідному середовищі. Побудовані профілі швидкостей для чистого і двофазного потоку.*

У практиці досить часто зустрічаються задачі, пов'язані з тими чи іншими видами математичних моделей, фізичну основу яких складають різні прояви руху нестискуваної в'язкої рідини в середовищі певної щільності. Більшу частину таких задач складають задачі підземного масопереносу і ерозії ґрунту [1], [2], [4], [7], [10]–[13].

Можна виділити два класи математичних моделей, які вирішують вказані задачі: емпіричні та теоретичні [9], [11]. Переважаюча кількість математичних моделей задач підземного масопереносу побудована на основі рівняння конвективної дифузії і має в своїй основі глибоке теоретичне підґрунтя [1], [7], [10]. Математичні моделі задач ерозії ґрунту, навпаки, переважно більшістю представлені емпіричними моделями і теоретичними моделями зі значною кількістю емпірично визначених параметрів [2], [11], [13]. Практично для вирішення вказаних задач існує значна кількість математичних моделей, які, як правило, мають індивідуальну структуру, адаптовану для вирішення конкретних проблем, причому таку структуру досить важко (або взагалі неможливо) використати для вирішення задач, відмінних від первинної.

На даний час актуальною є проблема математичного моделювання ландшафтного масопереносу [8], де питання математичного моделювання руху двофазного потоку в середовищі зі змінною структурою є ключовим завданням у вирішенні цієї проблеми. В [8], [9] було показано, що ландшафтний масоперенос є складним динамічним процесом, що проходить в досить неоднорідному середовищі, яке формується сукупністю ландшафтних умов. Це вимагає залучення різних математичних моделей для описання цих процесів (їх можна подати як сукупність задач, аналогічних задачам підземного масопереносу і ерозії ґрунту).

З погляду на сучасний рівень досліджень, практичну доцільність і можливість створення теоретичної бази для описання ландшафтного масопереносу є досить незручним досліджувати ландшафтний масоперенос дискретно математичними моделями різної структури, які описують генетично єдині ландшафтні процеси. Тому актуальним є створення математичної моделі, що мала б єдину структуру, в межах якої при відповідних граничних умовах вирішувалися б різні відомі задачі ландшафтного масопереносу. Ключове місце описання процесів руху нестискуваної в'язкої рідини в моделюванні ландшафтного масопереносу та існування ландшафтною товщі у вигляді неоднорідного середовища змінної щільності обумовлюють можливість вирішення цієї задачі шляхом математичного моделювання руху двофазного потоку з врахуванням структури середовища.

**Завданням** даного дослідження є отримання математичної моделі, яка описує рух двофазного потоку нестискуваної в'язкої рідини в середовищі відповідної структури, яка визначає щільність середовища і параметри руху рідини в такому середовищі. Модель має враховувати турбулентний характер руху і наявність твердої фази в потоці.

**Об'єктом** дослідження є процеси руху двофазних потоків нестискуваної в'язкої рідини в середовищі неоднорідної структури.

**Результати досліджень****1. Постановка задачі**

Використаємо для розглядання процесів, які нас цікавлять, відоме рівняння руху двофазного потоку, яке представимо в такому вигляді [4]:

$$\rho(1-s)\left[\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v}\right] + \rho_s s \left[\frac{\partial \bar{v}_s}{\partial t} + (\bar{v}_s \cdot \nabla) \bar{v}_s\right] - \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \bar{K}_w - \bar{v} \nabla \cdot \bar{K}_w\right) + \rho_s \left(\frac{\partial}{\partial t} \bar{K}_s - \bar{v}_s \nabla \cdot \bar{K}_s\right) = \rho(1-s)(\bar{g} + \bar{\varepsilon}) + \rho_s s(\bar{g} + \bar{\varepsilon}_s) - \nabla \cdot \Pi - \rho \nabla \cdot T - \rho_s \nabla \cdot T_s, \quad (1)$$

де  $\rho, \rho_s$  – масова густина середовища і твердої фази відповідно,  $\left[\frac{g \cdot c^2}{M^4}\right]$ ;

$s$  – об'ємна концентрація твердої фази;

$\bar{v}, \bar{v}_s$  – середня швидкість середовища (несучої рідини) і твердої фази відповідно,  $\left[\frac{M}{c}\right]$ ;

$\nabla$  – оператор Гамільтона;

$\bar{K}_w, \bar{K}_s$  – пульсаційні вектори рідкої і твердої фази відповідно;

$\bar{g}, \bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}_s$  – прискорення гравітаційних і негравітаційних (рідкої і твердої фаз) сил відповідно,  $\left[\frac{M}{c^2}\right]$ ;

$\Pi$  – тензор молекулярних напружень;

$T, T_s$  – середні тензори додаткових напружень, які викликані переміщенням рідких і твердих частинок.

Зробимо наступні припущення:

1. Конвективні члени рівнянь залежать лише від сил, які спонукаються консервативними ландшафтними умовами – фактори, що визначаються лише неоднорідністю ландшафту в просторі й мало змінюються в часі (певне той проміжок часу, який займає елементарний акт масопереносу) [9]. Тобто такі елементи, як тиск, тертя, ступінь турбулентності, обумовлені умовами рельєфу та станом поверхні.

2. Локальна частина рівнянь  $\left[\frac{\partial \bar{V}}{\partial t}\right]$  визначається такими динамічними ландшафтними факторами, як інтенсивність опадів та інфільтрації. Тобто зміна інтенсивності опадів та інфільтрації з часом, інтенсивності інфільтрації в просторі, а також в окремих випадках (для умов весняного стоку), просторовим розподілом запасів снігу обумовлюють зміну швидкості потоку з часом в окремій фіксованій точці.

Враховуючи викладені припущення, є справедливим розгляд окремо зміни швидкості потоку, яка обумовлена конвективними складовими рівняння (1) з наступним врахуванням локальної зміни швидкості потоку.

Розглянемо фактори, що визначають зміну швидкості потоку і твердої фази в елементарній ландшафтній області і які необхідно врахувати в рівняннях (1) (причому, переписуючи рівняння (1) для даного випадку, не будемо враховувати локальні складові). Можна виділити основні фактори, що визначають зміну швидкості в ландшафті: а) ухил; б) шорсткість; в) глибина потоку; г) регулярність і масштаб регулярності рельєфу. Як видно з рівнянь (1), майже всі вони є відображеними через об'ємні та поверхневі сили. Але слід зауважити, що існують процеси, які не відображені в цих рівняннях, і які суттєво впливають на процес зміни швидкості потоку зокрема, і на характер руху і величини масопереносу в цілому [12], [13]: при наявності густої дернини процес поверхневого стоку переходить в процес фільтрації із зміною кількісних і якісних характеристик потоку, зміна таких характеристик під впливом регулярності рельєфу в співвідношенні з його масштабом.

Наявність густої дернини, елементів шорохуватості різного масштабу вираховувалася за допомогою відповідних коефіцієнтів, додаткових рівнянь, які описують подолання потоком перешкод різної величини і просвітності. Таким підходом можна ввести поправки на величини зміни швидкості при проходженні потоку на поверхні з відповідною шорсткістю, описати профілі швидкості до і за перешкодою, а також ввести відповідні поправки у величини масопереносу. Аналіз літературних джерел засвідчив, що до цього часу не розглядався сам механізм і процес руху в фільтраційному середовищі (мається на увазі фільтрація всередині елементів шорсткості), а розглядали фільтраційне середовище лише як шорсткості (без врахування руху в ній) або як перепону, тобто поняття середовища руху відповідної структури

огинає його і за рахунок сил тертя, які виникають між рідиною і елементами шорсткості, зменшує свою швидкість. Це спонукає зменшити швидкість об'єму  $v_2$  за рахунок тертя з об'ємом  $v_1$ . Таким чином, на ділянці  $x_2$  маємо співвідношення швидкостей  $u_1 < u_2 < u_3$ . Різниця між швидкостями  $u_1$  на ділянках  $x_1$  і  $x_2$  (точка D) буде тим більшою, чим більше коефіцієнт в'язкості і чим більша площа елемента шорсткості. Величина цієї різниці визначить величину пульсації повздовжньої компоненти швидкості потоку. Якщо відстань  $x_3$  від даного елемента шорсткості до іншого досить значна, то на ділянці  $x_3$  зіштовхуються об'єми  $v_1, v_2, v_3$ , які мають різні швидкості. Очевидно, що частота повздовжніх пульсацій збільшуватиметься із зростанням швидкості і щільності розміщення елементів шорсткості, але, певне, до деякої межі, коли  $n' \rightarrow 0$  пульсації швидкості повинні гаситися елементами шорсткості. Варто зазначити, що пульсації швидкості, які характерні для зони з  $n' = 1$ , також мають гаситися при  $n' \rightarrow 0$ ; також в зоні з  $n' < 1$  повинні мати місце взаємне гасіння пульсацій, характерних для зон з  $n' = 1$  і  $n' < 1$ , починаючи з деякого значення параметра. Аналогічний механізм виникнення мають і поперечні пульсації швидкості.

Таким чином, шляхом внесення структурних змін до рівнянь (1) повинна бути побудована модель, яка має відповідати таким умовам:

- а) враховує структуру середовища фільтрації (параметр  $n'$ );
- б) при прагненні параметра  $n'$  до нуля рівняння (1) зберігають свою структуру руху двофазного середовища без фільтрації в шарі шорсткості;
- в) зі зростанням параметра  $n'$  рівняння переходять в рівняння фільтрації в пористому середовищі, причому при досить великих  $n'$  змінені рівняння (1) описують закон Дарсі;
- г) при досить великих  $n'$  в рівнянні повинні змінюватися величини пульсацій швидкості й об'єму (ефективного об'єму), середньої швидкості і об'єму, величини дотичних і нормальних напружень;

д) зі зростанням  $n'$  змінюється профіль швидкості таким чином, що при  $n' \rightarrow 0$   $\frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow 0$ .

е) аналіз кінцевої моделі має показати зміни умов масопереносу (умови підняття твердої фази в потік).

Такий підхід щодо пояснення процесу руху нестискуваної в'язкої рідини (власне води або повітря в ландшафті) по певній поверхні в неоднорідному середовищі з параметром  $n$  дозволяє отримати математичну модель відповідної структури, що описує розглянуті процеси. Особливістю такої моделі є те, що вона, не змінюючи своєї структури, може вирішувати ряд задач (які до того розв'язувалися різними моделями (моделями із різною структурою):

- 1) умови руху рідини і масопереносу в шарі шорсткості із змінним параметром  $n'$ , зокрема коли цей параметр досить незначний (виникає фільтрація в шарі дернини);
- 2) кількісний перехід від руху з великим  $n'$  до руху з  $n'$ , близьким до того, що характерний для ґрунту, причому можна розглядати умови і параметри внутрішньогрунтового руху рідини і масопереносу;
- 3) модель дозволяє не розглядати окремо проникні перепони і їх вплив на масоперенос, а дозволяє розглядати перепони як шар шорсткості з відповідним  $n'$  і масштабом (пульсацій).

## 2. Розробка моделі для чистого і двофазного потоку.

Для більшої простоти розглянемо таку модель для чистого потоку з наступним її розширенням на випадок турбулентного руху двофазного середовища.

При русі рідини в шарі шорсткості, і якщо шорсткість є ізотропною, то сили опору присутні не тільки поблизу поверхні, але і розподілені по об'єму потоку, який знаходиться в межах елементів шорсткості. Вплив таких сил опору представимо у вигляді деякої зовнішньої об'ємної сили, направленої в кожній точці проти напрямку руху рідини і за величиною пропорційної швидкості фільтрації в шарі шорсткості; компоненти такої сили вздовж координат

осей рівні (в приведенні до одиниці маси):  $\frac{-\lambda}{m}u$ ;  $\frac{-\lambda}{m}v$ ;  $\frac{-\lambda}{m}w$ .

Тоді рівняння Нав'є-Стокса можна записати у такому вигляді:

$$(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \vec{F} - \frac{\lambda}{m\rho} \vec{V} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{V}, \quad (2)$$

де  $V$  – швидкість;

$F$  – об'ємна сила;

$p$  – тиск;

$\nabla$  – оператор Гамільтона;

$\Delta$  – оператор Лапласа.

Встановимо значення параметра  $\lambda$ . Для цього запишемо (2) для координати  $x$  (попередньо вважатимемо, що маємо плоский потік):

$$-u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} + F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\lambda}{m\rho} u. \quad (3)$$

Розглядувана схема руху за своїми властивостями відображає кількісний закон фільтрації, тому рівняння (3) має бути еквівалентним закону Дюпюї-Форхгеймера. Враховуючи це, можна записати [1]:

$$gJ = -g\varphi; \quad -F_x + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = g\varphi_x; \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\beta}{D'} u^2 = \beta u^2 \cdot \frac{1-n}{d(n-c_0)};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\alpha}{D'^2} u = -\alpha u \cdot \frac{(1-n)^2}{d^2(n-c_0)^2}, \quad (4)$$

де  $g$  – прискорення сили тяжіння;

$\varphi$  – п'єзометричний напір;

$d$  – товщина елементів шорсткості;

$D'$  – простір між елементами шорсткості;

$n$  – просвітність;

$(n-c_0)$  – ефективна просвітність;

$\alpha, \beta$  – коефіцієнти пропорційності.

Розглянемо ліву частину рівняння (3):

$$-u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} + F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0,$$

можна записати:

$$-g\varphi_x = -v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y};$$

враховуючи (4), отримаємо:

$$-g\varphi_x = \alpha u \cdot \frac{(1-n)^2}{d^2(n-c_0)^2} + \beta u^2 \cdot \frac{1-n}{d(n-c_0)};$$

або

$$\alpha u \cdot \frac{(1-n)^2}{d^2(n-c_0)^2} + \beta u^2 \cdot \frac{1-n}{d(n-c_0)} + g\varphi_x = 0; \quad (5)$$

підставимо (5) у (3) і розв'яжемо відносно  $\lambda$ :

$$m\rho \left[ \alpha \frac{(1-n)^2}{d^2(n-c_0)^2} + \beta u \cdot \frac{1-n}{d(n-c_0)} + \frac{1}{u} g\varphi_x \right] = \lambda. \quad (6)$$

Підставимо (6) у (2) і розглянемо по координатах для плоского потоку:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \left[ \alpha \frac{(1-n)^2}{d^2(n-c_0)^2} + \beta u \cdot \frac{1-n}{d(n-c_0)} \right] u;$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \gamma F_y - \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + v \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \left[ \alpha \frac{(1-n)^2}{d^2(n-c_0)^2} + \beta v \cdot \frac{1-n}{d(n-c_0)} \right] v, \quad (7)$$

де  $\gamma$  – деякий коефіцієнт.

Розглянемо рівняння (7) для турбулентного потоку, враховуючи додаткові пульсації швидкості, викликані елементами шорсткості. Будемо вважати, що пульсаційна складова швидкості  $(u', v')$  розпадається на дві складові: перша  $(u'_1, v'_1)$  властива потоку, який не рухається в шарі шорсткості (середовище з параметром  $n' = 1$ ), друга  $(u'_2, v'_2)$  – властива

поток, який рухається в шарі шорсткості (середовище з параметром  $n' < 1$ ), причому ця складова викликана суто наявністю елементів шорсткості. Таким чином, пульсаційну складову істинної швидкості можна записати:  $u' = u'_1 + u'_2$ ;  $v' = v'_1 + v'_2$ . Для потоку в середовищі з параметром  $n' < 1$   $u'_2 \neq 0$  і  $v'_2 \neq 0$ , для потоку в середовищі з параметром  $n' = 1$   $u'_2 = 0$ ,  $v'_2 = 0$ .

Перейдемо від істинних значень швидкостей рівняннях (7) до їх середніх величин шляхом введення наступних замінів:

$$\begin{aligned} \overline{uv} &= \overline{(u + u'_1 + u'_2)(v + v'_1 + v'_2)} = \overline{uv} + \overline{u'_1 v'_1} + \overline{u'_1 v'_2} + \overline{u'_2 v'_1} + \overline{u'_2 v'_2}; \\ \overline{u^2} &= \overline{(u + u'_1 + u'_2)^2} = \overline{u^2} + \overline{u'_1^2} + \overline{u'_2^2} + 2\overline{u'_1 u'_2}; \quad \overline{v^2} = \overline{(v + v'_1 + v'_2)^2} = \overline{v^2} + \overline{v'_1^2} + \overline{v'_2^2} + 2\overline{v'_1 v'_2}. \end{aligned}$$

Після цього рівняння (7) набудуть такого вигляду:

$$\begin{aligned} \rho \left[ \overline{u} \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{v} \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \right] &= -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \mu \Delta \overline{u} - \rho \left[ \frac{\partial \overline{u_1^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u_2^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'_1 v'_1}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'_2 v'_2}}{\partial y} + \right. \\ &+ 2 \frac{\partial \overline{u'_1 u'_2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'_1 v'_2}}{\partial y} + \left. \frac{\partial \overline{u'_2 v'_1}}{\partial y} \right] - \left[ A \overline{u} + B \overline{u^2} + B (\overline{u_1^2} + \overline{u_2^2} + 2\overline{u'_1 u'_2}) \right] \\ \rho \left[ \overline{u} \frac{\partial \overline{v}}{\partial x} + \overline{v} \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} \right] &= F_y - \frac{\partial \overline{p}}{\partial y} + \mu \Delta \overline{v} - \rho \left[ \frac{\partial \overline{u'_1 v'_1}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'_1 v'_2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'_2 v'_1}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'_2 v'_2}}{\partial x} + \right. \\ &+ \frac{\partial \overline{v_1^2}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v_2^2}}{\partial y} + 2 \frac{\partial \overline{v'_1 v'_2}}{\partial y} \left. \right] - \left[ A \overline{v} + B \overline{v^2} + B (\overline{v_1^2} + \overline{v_2^2} + 2\overline{v'_1 v'_2}) \right] \end{aligned} \quad (8)$$

де

$$A = \alpha \frac{(1-n)^2}{d^2 (n-c_0)^2}, \quad B = \beta \cdot \frac{1-n}{d(n-c_0)}.$$

Надамо рівнянням (8) іншого вигляду, використовуючи позначення:

$$\begin{aligned} \sigma_{11x} &= -\rho \overline{u_1^2}; & \sigma_{22x} &= -\rho \overline{u_2^2}; & \sigma_{11y} &= -\rho \overline{v_1^2}; & \sigma_{22y} &= -\rho \overline{v_2^2}; & \sigma_{12x} &= -\rho \overline{u'_1 u'_2}; \\ \sigma_{12y} &= -\rho \overline{v'_1 v'_2}; & \tau_{T11} &= -\rho \overline{u'_1 v'_1}; & \tau_{T22} &= -\rho \overline{u'_2 v'_2}; & \tau_{T12} &= -\rho \overline{u'_1 v'_2}; & \tau_{T21} &= -\rho \overline{u'_2 v'_1}; \end{aligned}$$

і враховуючи, що  $\overline{u'_2 v'_2} = 0$ ,  $\overline{u_2^2} = 0$ ,  $\overline{v_2^2} = 0$ , оскільки ці величини є статистично незалежними і між ними немає кореляції:

$$\begin{aligned} \overline{u} \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{v} \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial (\tau_L + \tau_{T11} + \tau_{T12} + \tau_{T21})}{\partial y} \right] + \\ &+ \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\sigma_{11x} + 2\sigma_{12x})}{\partial x} - \left[ A \overline{u} + B \overline{u^2} - \frac{B}{\rho} (\sigma_{11x} + 2\sigma_{12x}) \right] \\ \overline{u} \frac{\partial \overline{v}}{\partial x} + \overline{v} \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial (\tau_{T11} + \tau_{T12} + \tau_{T21})}{\partial x} \right] + \\ &+ \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\sigma_{11y} + 2\sigma_{12y})}{\partial y} - \left[ A \overline{v} + B \overline{v^2} - \frac{B}{\rho} (\sigma_{11y} + 2\sigma_{12y}) \right] \end{aligned} \quad (9)$$

Рівняння нерозривності матиме вигляд:

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} = 0. \quad (10)$$

Як видно з рівнянь (9), вони відрізняються від звичайних рівнянь, які описують турбулентний рух (наприклад осереднені рівняння Нав'є-Стокса [3]) тим, що в рівняннях (9) з'являються чотири додаткових турбулентних напруження, пов'язаних із впливом структури середовища на турбулентний потік. Тому для замикання системи (9)–(10) необхідні співвідношення, які пов'язують такі додаткові турбулентні напруження із середніми значеннями швидкостей.

Розглянемо потік в'язкої нестискуваної рідини в середовищі з  $n' < 1$  (шарі шорсткості). Охарактеризуємо середовище через параметр  $n$  — об'ємна щільність елементів шорсткості. В реальному середовищі значення  $n$  не є рівномірно розподілене в просторі; тому, щоб надати йому властивостей гладкої функції, яку можна диференціювати, необхідно скористатися об'ємним осередненням. Візьмемо довільний об'єм  $V$  середовища, яке містить дану шорсткість, об'єм  $V$  повинен бути досить великим, щоб відхилення дискретних значень  $n_i$  від середнього значення  $n$  в цьому об'ємі мали найменше значення. Тоді введемо середнє значення  $n$  в об'ємі  $V$ :

$$n = \frac{1}{V} \int_V n_i dV.$$

Припустимо, що в шарі шорсткості швидкість залежить тільки від  $n$ , тобто  $u(n)$ . Нехай в точці С (рис. 1, а) швидкість мала значення  $u(n - \Delta x)$ , в точці D —  $u(n)$  різниця цих швидкостей буде являти собою пульсацію швидкості:  $\Delta u(n) = u(n - \Delta x) - u(n)$ . Розкладемо  $u(n - \Delta x)$  в ряд Тейлора в околі точки  $n_x$ , обмежимося лінійними складовими:

$$\Delta u(n) = \Delta x \frac{\partial u}{\partial n}. \tag{11}$$

Аналогічним чином, розглядаючи схему виникнення пульсацій  $v'_2$  (рис. 1, б), отримаємо вираз (11). Величину  $\Delta x$  можна охарактеризувати як товщину елемента шорсткості  $d$ , при зростанні  $d$  має зростати величина пульсацій швидкості, також величина пульсацій швидкості залежить від параметра  $n$ . Таким чином, (11) можна переписати:

$$\sqrt{u'^2} = |u'_2| = dn \frac{\partial u}{\partial n}. \tag{12}$$

Використовуючи (12), запишемо значення додаткових турбулентних напружень, які виникають при проходженні потоку в середовищі зі структурою, яку характеризують параметри  $d$  і  $n$ , а також  $D'$  (формула 4):

$$\begin{aligned} \tau_{T_{12}} &= -\rho \overline{u'_1 v'_2} = -\rho k R l \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \cdot dn \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = -\rho b l \, dn \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial \bar{u}}{\partial n}; & \tau_{T_{21}} &= -\rho \overline{u'_2 v'_1} = -\rho b l \, dn \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial \bar{u}}{\partial n}; \\ \sigma_{12_x} &= -\rho \overline{u'_1 u'_2} = -\rho b l \, dn \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial \bar{u}}{\partial n}; & \sigma_{12_y} &= -\rho \overline{v'_1 v'_2} = -\rho b l \, dn \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial \bar{u}}{\partial n}, \end{aligned}$$

де  $k$  — коефіцієнт пропорційності;

$R$  — коефіцієнт кореляції;

$b = R \cdot k$ ;

$l$  — шлях змішування,  $l = 0,4y$  [3].

З рівняння (9) можна легко отримати рівняння руху двофазного потоку шляхом введення наступних додаткових параметрів (аналогічних в рівнянні (1)):  $s$  — об'ємна концентрація твердої фази,  $(1-s)$  — об'ємна концентрація рідкої фази.

Граничні умови для рівняння (9) на випадок двофазного потоку можна визначити наступним чином: на площині  $y = 0$  і при  $n = 0$   $v = u = v_s = u_s = 0$ .

### 3. Профілі швидкостей чистого і двофазного потоку.

Розглянемо профіль середніх швидкостей чистого і двофазного потоків при проходженні його в шарі шорсткості.

Використаємо рівняння (9) з умовою плоского потоку, в середньому стаціонарного і однорідного вздовж осі  $x$ , за умови деякого спрощення останньою складовою правої частини рівняння будемо нехтувати. Спроєкуємо рівняння (9) на вісь  $x$ :

$$\frac{\partial u}{\partial y} (v + v^T) + 2bl \, dn \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = \frac{\tau_0}{\rho} = \omega_x^2, \tag{13}$$

де  $v$  — коефіцієнт кінематичної в'язкості;

$v^T$  — коефіцієнт турбулентної в'язкості;

$\omega_x$  — динамічна швидкість.

Зробимо наступні спрощення:

1) будемо вважати, що дана область потоку ізотропна за параметром  $n$ , і по всій області градієнт швидкості  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}$  має постійне значення. Тому для даної області можна записати:

$$b \frac{\partial u}{\partial n} = \psi(n) = \text{const};$$

2) коефіцієнт кінематичної в'язкості має суттєвий вплив на дуже незначній відстані від підстилаючої поверхні, при збільшенні висоти вплив коефіцієнта кінематичної в'язкості суттєво зменшується, тому параметром  $\nu$  можна знехтувати;

3)  $v_{ik}^T \approx \Delta u \cdot l$ , тому можна записати  $v_{ik}^T = 2a_s^2 \Delta v_i \cdot l_k$  або для даного випадку  $v_{ik}^T = 2a^2 y \Delta u$  [4], [6], де  $l$  – деякий масштаб;

$a_s, a$  – деякі безрозмірні величини, причому  $a_s$  залежить від концентрації твердої фази в потоці.

Враховуючи такі припущення, запишемо (13) в такому вигляді:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} (2a^2 y \Delta u) + 2 \cdot 0,4 \cdot y \psi(n) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \omega^2. \tag{14}$$

Інтеграл рівняння (14) буде мати вигляд:

$$u(y) = \frac{-2\psi(n) + \sqrt{4\psi^2(n) + 25a^2 \ln(y)\omega^2}}{5a^2}. \tag{14a}$$

Корисним буде отримати вираз для градієнта швидкості. Застосуємо припущення  $\Delta u = ku + \text{const}$ ;  $v_*^2 = k\omega_*^2$ ;  $v_* = \text{const}$  [4] до (14), причому не будемо нехтувати параметром  $\nu$ :

$$\frac{\partial \Delta u}{\partial y} (2a_s^2 y \Delta u + \nu) + 2 \cdot 0,4 \cdot y \frac{\partial \Delta u}{\partial y} \psi(n) = v_*^2. \tag{15}$$

Інтеграл (15) буде мати вигляд:

$$y = \delta \cdot \exp \varphi_1 \cdot \text{erf} \varphi_2 \cdot \exp \varphi_3; \tag{16}$$

$$\delta = \frac{\nu \sqrt{\pi}}{2v_* a}; \quad \varphi_1 = \frac{4 \psi^2(n)}{25 v_*^2 a^2}; \quad \varphi_2 = \frac{a u(y)}{v_*} + \frac{2 \psi(n)}{5 v_* a}; \quad \varphi_3 = \frac{u(y) \left[ a^2 u(y) + \frac{4}{5} \psi(n) \right]}{v_*^2}.$$

При деякому віддаленні від підстилаючої поверхні, коли  $\text{erf} \varphi_2 \rightarrow 1$ , представимо (16) у вигляді:

$$u = \sqrt{\left( \frac{2\psi}{5a^2} \right)^2 + \frac{v_*^2}{a^2} \ln \frac{y}{\delta \exp \varphi_1}} - \frac{2\psi}{5a^2}. \tag{17}$$

З (17) видно, що  $\delta$  являє собою розмір виступів мікрошорсткості в шарі макрошорсткості. На рівні  $\delta$  параметр  $\psi = 0$ , тому, як і в вільних потоках, при  $y \approx \delta$  швидкість рівна нулю. Величина  $\delta \exp \varphi_1 = \delta_{me}$  являє собою ефективну величину виступу шорсткості для потоку, який рухається в шарі макрошорсткості. Зі зростанням  $\psi$  зростає  $\delta_{me}$  і відповідно висота  $y$ , на якій швидкість потоку рівна нулю.

Градієнт швидкості чистого потоку можна записати:

$$\frac{\partial \Delta u}{\partial y} = \frac{v_*^2}{\nu} \cdot \frac{1}{1 + \delta \left[ 2a^2 \Delta u + 2 \cdot 0,4 \psi(n) \right] \exp \varphi_1 \cdot \text{erf} \varphi_2 \cdot \exp \varphi_3}.$$

Отримаємо профіль швидкості й вираз для градієнта швидкості в двофазному потоці, що рухається в шарі шорсткості.

Представимо (15) у вигляді:

$$\frac{\partial \Delta u}{\partial y} (2a_s^2 y \Delta u + \nu(1+c)) + 2 \cdot 0,4 \cdot y \psi(n) \frac{\partial \Delta u}{\partial y} = \frac{\tau_{0s}}{\rho}, \tag{18}$$

де  $c$  – функція, що залежить від концентрації твердої фази в потоці. Якщо прийняти, як і в [4], що  $c = c(\Delta u)$ , тоді інтеграл (18) буде мати вигляд:

$$y = (1+c_s) c_s \delta \exp \varphi_{1s} \cdot \text{erf} \varphi_{2s} \cdot \exp \varphi_{3s}; \tag{19}$$

$$c_s = \sqrt{\frac{\tau_0 k}{\tau_{0s}} \frac{a}{a_s}}; \tag{20}$$

$$c_r = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\int_0^{\varphi_{2s}} c \cdot e^{-\varphi_{2s}} d\varphi_{2s}}{\operatorname{erf} \varphi_{2s}}. \tag{21}$$

Якщо прийняти в (16) і (18)  $\delta$  – розмір виступів мікросорсткості на поверхні руху рідини в шарі сорсткості, то добуток  $(1 + c_r) c_s \delta = \delta_e$  можна охарактеризувати як ефективну сорсткість, причому  $\delta \neq \delta_e$  [4].

Використаємо (18) і (19) і запишемо градієнт швидкості рідини із вмістом твердої фази при проходженні потоку в шарі сорсткість:

$$\frac{\partial \Delta u}{\partial y} = \frac{\tau_{0s}}{\rho \nu (1 + c)} \cdot \frac{1}{1 + [2 \cdot a_s^2 \cdot \Delta u + 2 \cdot 0.4 \cdot \psi(n)] (1 + c_r) c_s \delta \exp \varphi_{1s} \cdot \operatorname{erf} \varphi_{2s} \cdot \exp \varphi_{3s}} \tag{22}$$

Із (19) при  $v_{kp} = 0$  і  $\operatorname{erf} \varphi_{2s} \rightarrow 1$  наближене значення для  $u(y)$ :

$$u = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\tau_{0s}}{\rho}} \sqrt{\ln \frac{y}{\delta e} - \frac{2\psi}{5a^2}}. \tag{23}$$

Або у іншому вигляді:

$$u = \sqrt{\left(\frac{2\psi}{5a^2}\right)^2 + \frac{v_*^2}{a^2} \ln \frac{y}{(1 + c_r) c_s \delta_{me}}} - \frac{2\psi}{5a}. \tag{24}$$

Профілі швидкості залежно від різних значень  $\psi(n)$  зображені на рис. 2.

З рис. 2 видно, що профілі швидкості (як чистого, так і двофазного потоків) прагнуть до вирівнювання (зменшується градієнт швидкості) при збільшенні параметра  $\psi(n)$ , що спостерігається в реальних умовах – при русі нестискуваної в'язкої рідини в ґрунті (крайні максимальні значення параметра  $\psi(n)$ ) градієнт швидкості майже рівний нулю [1], [7].

При збільшенні параметра  $\psi(n)$  сповільнення потоку, що обумовлене, очевидно, додатковими турбулентними напруженнями в середовищі з  $n' < 1$ , причому, якщо не нехтувати в рівняннях (13) і (18) останньою складовою правої частини рівняння (9), то сповільнення швидкості матиме ще більше значення, що викликане додатковою об'ємною силою, яка виникає в середовищі з  $n' < 1$ .

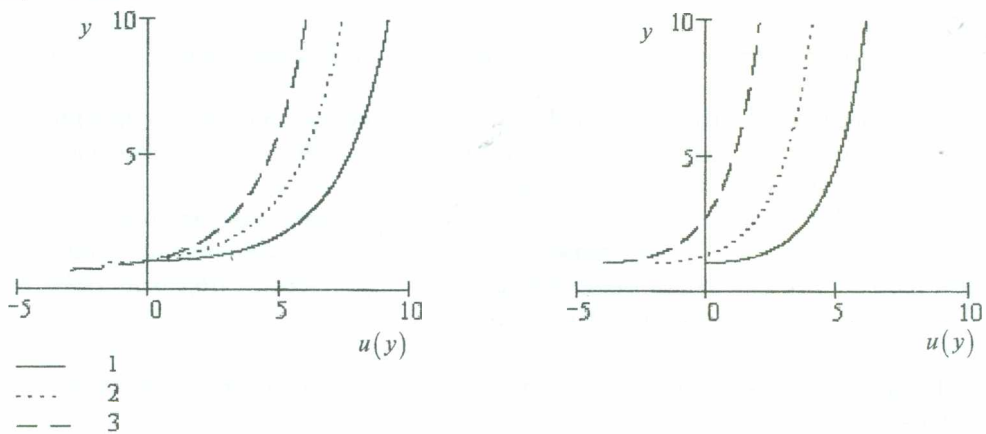


Рис. 2. Профілі швидкості для чистого і двофазного потоку залежно від параметра  $\psi(n)$ :

- а) профілі швидкості для чистого потоку, побудовані за формулою (14, а);
- б) профілі швидкості для двофазного потоку, побудовані за формулою (23).

1.  $\psi(n) = 0$ ; 2.  $\psi(n) = 10$ ; 3.  $\psi(n) = 20$



Аналіз формули (24) та графіків на рис. 2, б засвідчує існування властивостей потоку, притаманних лише потокам, які рухаються в середовищі з наявною структурою (де  $n' < 1$ ): зростання параметра  $\psi(n)$  призводить до збільшення швидкості зростання ефективної порсткості (тобто висоти  $y$ , де швидкість рівна нулю) у двофазних потоках порівняно із чистими. При поступовому зменшенні щільності структури середовища висота, на якій швидкість двофазового середовища потоку рівна нулю, поступово наближається до висоти виступів мікропорсткості.

**Висновки.** Отримана математична модель, яка описує рух двофазного потоку нестискуваної в'язкої рідини в середовищі з параметром  $\Psi(n)$ , який відображає структуру цього середовища. Модель враховує турбулентний характер руху, наявність твердої фази в потоці, зміну параметрів руху потоку в неоднорідному середовищі змінної структури.

Як **перспектива подальших досліджень** є необхідність розглядання впливу структури середовища руху нестискуваної в'язкої рідини на величини масопереносу.

#### ЛІТЕРАТУРА:

1. Бэр Я., Заславски Д., Ирмей С. Физико-математические основы фильтрации воды. – М.: Мир, 1971. – 452 с.
2. Гаршинев Е.А. Противозерозионная лесомелиорация и эволюция эрозионно-гидрологического процесса: Автор. дис. на соиск. уч. степ. д.с/х.н. – Волгоград, 1995. – 47 с.
3. Дейч М.Е., Зарянкин А.Е. Гидрогазодинамика. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 384 с.
4. Дюнин А.К. Механика метелей: вопросы теории проектирования снегорегулирующих средств. – Новосибирск: Издательство Сибирского отделения АН СССР, 1963. – 378 с.
5. Исаченко А.Г. Ландшафтоведение и физико-географическое районирование: Учеб. пособ. – М.: Высш. шк., 1991. – 366 с.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. – Т. VI. – Гидродинамика. – М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1986. – 736 с.
7. Ляшко С.И., Ключин Д.А., Тригуб А.С. Моделирование и оптимизация подземного масопереноса. – К.: Наукова думка, 1998. – 239 с.
8. Мількевич В.М. Загальна постановка задач кількісної оцінки горизонтального переносу речовини в ландшафті // Вісник Державного агроєкологічного університету. – 2002. – № 2. – С. 164–167.
9. Мількевич В.М. Локальна модель горизонтального масопереносу з урахуванням ландшафтних умов // Вісник Державного агроєкологічного університету. – 2003. – № 2. – С. 224–231.
10. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. – М.: Наука, 1977. – 664 с.
11. Світличний О.О. Кількісна оцінка характеристик схилового ерозійного процесу і питання оптимізації використання ерозійно-небезпечних земель: Автореф. дис. на здоб. наук. ступ. д.г.н. – Одеса, 1995. – 47 с.
12. Усков И.Б. Управление элементами микроклимата среды обитания растений. – Автореф. дис. на соиск. уч. степени д-ра ф.-м. наук. – Ленинград, 1989. – 48 с.
13. Эрозионные процессы. Географическая наука практике / Под ред. Н.И. Маккавеева и Р.С. Чалова. – М.: Мысль, 1984. – 256 с.

МІЛЬКЕВИЧ Віктор Миколайович – аспірант Державного агроєкологічного університету.  
Наукові інтереси:

– математичне моделювання масопереносу на неоднорідній області.

Тел.: (0412) 33-82-83 (д).

Подано 02.03.2004