ІНФОРМАТИКА, ОБЧИСЛЮВАЛЬНА ТЕХНІКА ТА АВТОМАТИЗАЦІЯ

УДК 681.511.42

В.Л. Баранов, д.т.н., с.н.с.
В.П. Фриз, ад'юнкт
Житомирський військовий інститут радіоелектроніки ім. С.П. Корольова

МОЖЛИВИЙ ПІДХІД ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ІСТОТНО НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ НА ОСНОВІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Проведено аналіз існуючих підходів до моделювання нелінійних систем. Пропонується один із можливих підходів до дослідження істотно нелінійних динамічних систем на основі диференціальних перетворень.

Постановка проблеми.

Відомо [1], що ряд елементів систем автоматичного управління та регулювання описуються *нелінійними* диференціальними рівняннями. До таких елементів, зокрема, відносяться гіроскопічні датчики [2] та електромаховичні двигуни космічних апаратів (КА), генератори струму та електродвигуни силових слідкувальних приводів антенних систем [3], [4] та ін. При цьому тільки при невеликих відхиленнях досліджуваних величин від номінальних значень такі системи можна умовно розглядати як лінійні. Крім того, в механічних системах у ряді випадків не враховуються такі принципово нелінійні явища, як сухе тертя і вплив зазорів, обмежень та упорів у пристроях передачі. Однак, при значних збурювальних впливах і більш детальному вивченні процесів, що відбуваються в цих системах, урахування нелінійних характеристик стає необхідним.

Традиційно нелінійні системи описуються нелінійними диференціальними рівняннями, але, на жаль, у даний час немає загальних методів розв'язання таких рівнянь [5]. Тому часто приходиться їх вирішувати чисельними, графічними чи наближеними методами, що призводить до великих труднощів у дослідженнях таких систем [3], [5], [6].

Аналіз останніх робіт [4], [7] із застосування інтегральних операційних методів для вивчення неперіодичних процесів у системах з нелінійними і перемінними параметрами показує, що розв'язання виникаючих задач стає можливим лише в квазілінійній постановці через складність переводу в область інтегральних зображень основної нелінійної операції – операції добутку оригіналів.

Багаторічна практика застосування операційних методів, заснованих на інтегральних перетвореннях, показала їхню високу ефективність тільки для дослідження систем, стан яких описується диференціальними рівняннями з постійними коефіцієнтами [6].

У зв'язку з цим *ціллю даної статті* є розробка загальних підходів до дослідження суттєво нелінійних систем.

Для цього пропонується використовувати математичний апарат диференціальних перетворень, запропонований академіком Пуховим Г.Є. Основна відмінність таких перетворень від інтегральних полягає в тому, що перехід від оригіналів до зображень проводиться диференціюванням оригіналів, а не їхнім інтегруванням [7], [8].

До того ж у теорії диференціальних перетворень є система правил і формул, що на практиці дозволяють складати рівняння в області зображень без диференціювання оригіналів. Зворотний перехід від зображень до оригіналів здійснюється на основі рядів Тейлора чи Фур'є.

Добутку функцій в області оригіналів відповідає порівняно проста операція в області диференціальних зображень – знаходження суми кінцевого числа парних добутків дискрет зображень (алгебраїчна згортка) множених функцій. Це дозволяє поширити ідеї інтегральних операційних методів на нелінійні системи у тих випадках, якщо можна знайти відповідне диференційне зображення.

У статті запропоновано підхід до моделювання істотно нелінійних динамічних систем, що базується на застосуванні математичного апарата диференціальних тейлорівських перетворень, орієнтованого на клас аналітичних функцій.

Диференціальними тейлорівськими перетвореннями називають функціональні перетворення виду [7], [8]:

$$X(k) = \frac{H^k}{k!}\left[\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right]_{t=0} \doteqdot x(t) = \sum_{k=0}^{k=\infty}\left(\frac{t}{H}\right)^k X(k), \qquad (1)$$

де $x(t)$ – оригінал, що являє собою безперервну диференційовану й обмежену разом зі своїми похідними функцію дійсного аргумента (наприклад, часу) t ;

$X(k)$ – диференціальне зображення оригіналу $x(t)$, що є дискретною функцією цілочисельного аргумента $k = 0,\ 1,\ 2, \dots$;

H – масштабна постійна, що має розмірність аргумента t, обирається рівною відрізкові $0 \le t \le H$, на якому розглядається функція $x(t)$;

$\overset{-}{\underset{-}{\bullet}}$ символ відповідності між оригіналом $x(t)$ та його диференціальним зображенням $X(k)$.

У виразі (1) ліворуч від символа $\overset{-}{\underset{-}{\bullet}}$ стоїть пряме перетворення, що дозволяє перейти від оригіналу $x(t)$ до його зображення $X(k)$, а праворуч – зворотне перетворення, що дозволяє перейти від зображення $X(k)$ до оригіналу $x(t)$ у формі степеневого ряду Тейлора з центром у точці $t = 0$.

Диференціальні зображення $X(k)$ називаються диференціальними Т-спектрами, а значення $X(k)$ при конкретних значеннях аргумента k – дискретами, наприклад, $X(0)$ – нульова дискрета, $X(1)$ – перша дискрета і т.д.

Виходячи з цього, пропонується наступний *підхід* до дослідження динамічних нелінійних систем.

1. Методом гармонійної лінеаризації істотно нелінійна ланка системи керування замінюється лінійною ланкою з еквівалентним коефіцієнтом підсилення [1].

2. Застосовуючи диференціальні перетворення, переводять математичну модель нелінійної системи із області оригіналів в область зображень і розраховують дискрети диференціальних спектрів X (k) за допомогою основної залежності ДТ-перетворень (1).

3. Вибирають структуру розв'язку у вигляді перших членів ряду Фур'є:

$$x(t) = a_0 + a_1 \cos\omega t + b \sin\omega t, \tag{2}$$

де a_0, a_1, b, ω – невідомі величини.

4. Переводять функцію (2) з часової області в область зображень, в результаті чого одержують диференціальні спектри:

$$X(k,\ a_0,\ a_1,\ b,\ \omega)\ ;$$
$$X(k,\ A)\ ,$$

де $A = (a_1, a_2, \dots, a_N)$.

5. Застосовуючи метод балансу диференціальних спектрів, одержують систему рівнянь:

$$X(k) = X(k, A), \partial \text{ де } k = 0,1,2,3,\dots a_{N-1}\ ;$$
$$A = (a_1, a_2, \dots, a_N)\ .$$

6. Розв'язують отриману систему рівнянь відносно невідомих

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_N)\ .$$

Розглянемо застосування запропонованого підходу на прикладі, що вирішений у [1] методом фазової площини.

Нехай дана релейна система керування КА (рис. 1), що складається з нелінійної та лінійної частин. Необхідно повернути КА навколо центра мас (ЦМ) на деякий кут Θ (рис. 2). Для цього на вхід системи подається одиничний імпульс $V_0 = 1\ (t)$, що відкриває заслінки реактивних двигунів. Характеристика нелінійного елемента (НЕ) представлена на рис 3. Передатна функція лінійної частини системи має вигляд $W_c(p) = \dfrac{1}{Jp^2}$.

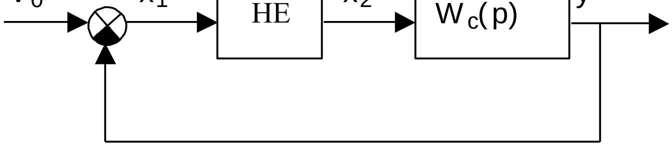

Рис. 1. Структурна схема нелінійної системи

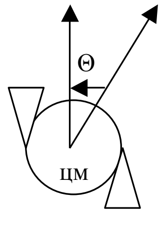

Рис. 2

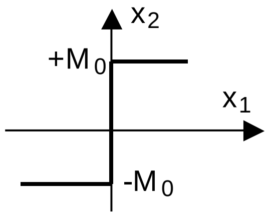

Рис. 3. Характеристика нелінійного елемента

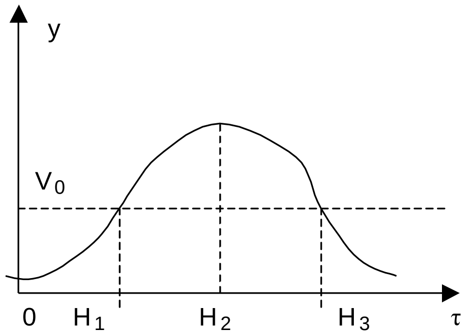

Рис. 4

Диференціальне рівняння для заданої передатної функції $W_c(p)$ має вигляд (рис. 1) [1]:

$$x_2 = J\frac{d^2y}{dt^2} = M_0 sign\ \ x_1, \tag{3}$$

де J – момент інерції КА відносно центра мас; M_0 – постійне значення моменту, який розвиває реактивний двигун системи керування КА.

Використовуючи вираз (3) і рис. 1, 3, запишемо систему диференціальних рівнянь у вигляді:

$$\frac{dx_1}{d\tau} = x_2,\ \frac{dx_2}{d\tau} = -1;$$
$$\frac{dx_1}{d\tau} = x_2,\ \frac{dx_2}{d\tau} = +1,$$

де $\tau = t\sqrt{\frac{M_0}{J}}$.

Розв'язок.

1. Замінимо методом гармонійної лінеаризації істотно нелінійну ланку лінійною ланкою з еквівалентним коефіцієнтом підсилення:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2(t);$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{4C}{\pi A} = -B.$$

2. Застосовуючи диференціальні перетворення, переведемо математичну модель системи із області оригіналів в область зображень:

$$\frac{k+1}{H} = X_1(k+1) = x_2;$$
$$\frac{k+1}{H} = X_2(k+1) = -B\text{Ъ}(k),$$

де $\text{Ъ}(k) = \begin{cases} 1, k = 0 \\ 0, k \geq 1 \end{cases}$,

при $k = 0$ $X_1(0) = 1;$ $X_2(0) = 0$;

при $k = 1$ $X_1(1) = 0$; $X_2(1) = -HB$;

при $k = 2$ $X_1(2) = \frac{-H^2B}{2}$ $X_2(2) = 0$.

3. Виберемо структуру рішення у вигляді перших членів ряду Фур'є:

$$X(k) = a_0 \text{Ъ}(k) + a_1 \frac{(\omega H)^k}{k!} \cos(\frac{\pi k}{2}) + b \frac{(\omega H)^k}{k!} \sin(\frac{\pi k}{2}) \; .$$

4. Одержимо диференціальні спектри:

$$X(0) = a_1;$$
$$X(1) = b\omega H;$$
$$X(2) = -a_1 \frac{(\omega H)^2}{2}.$$

5. Застосовуючи метод балансу диференціальних спектрів, одержимо систему рівнянь:

$$a_1 = 1;$$
$$b\omega H = 0;$$
$$-a_1 \frac{(\omega H)^2}{2} = -\frac{H^2 B}{2};$$
$$a_1 \omega^2 = B.$$

6. Розв’яжемо отримане рівняння відносно невідомих:

$$a_1 = 1;$$
$$b = 0;$$
$$\omega = \sqrt{\frac{B}{a_1}} = \sqrt{\frac{4C}{\pi A}} = \sqrt{\frac{4}{\pi}};$$
$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\pi} = 5{,}56 \quad c.$$

Отриманий результат τ = 5,56 с – це період автоколивань, які виникають у даній нелінійній системі. Він співпадає з результатами, отриманими в [1] методом фазової площини, що свідчить відносно легітимності запропонованого підходу.

Висновки.

1. Запропонований підхід дає можливість отримувати розв’язок як при нульових, так і при ненульових початкових умовах, що суттєво розширює клас вирішуваних задач.

2. Цей підхід не потребує чисельного інтегрування нелінійних диференціальних рівнянь і забезпечує точне моделювання нелінійних систем з аналітичними нелінійностями.

Така можливість досягається завдяки виключенням часового аргумента в області диференціальних спектрів. Проблема моделювання істотних нелінійностей вирішується методом гармонійного балансу, що допускає застосування математичного апарата диференціальних перетворень.

3. До достоїнств диференціальних перетворень відноситься, крім можливості поширення операційних методів дослідження станів фізичних систем на випадки систем з перемінними і нелінійними параметрами, ще й велика гнучкість відповідних диференціальних моделей, тому що часто та ж сама модель може бути основою чисельного, аналітичного та чисельно-аналітичного розв'язання задач.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Нетушил А.В.* Теория автоматического управления. – Москва: Высшая школа, 1983.–427 с.
2. *Бесекерский В.А., Иванов В.А., Самотокин Б.Б.* Орбитальное гирокомпасирование / Под ред. Б.Б. Самотокина – СПб.: Политехника, 1993. – 256 с.
3. *Башарин А.*В. *Башарин И.А*. Динамика нелинейных автоматических систем управления. – Л.: Энергия, 1974. – 196 с.
4. *Артюшин Л.М., Машков О.А., Сівов М.С.* Теорія автоматичного керування. – Київ: КІ ВПС, 2000. – 320 с.
5. *Артемьев В.М., Яшугин Э.А.* Основы автоматического управления системами радиоэлектронных средств. – Г.: Воениздат, 1994. – 456 с.
6. *Зайцев Г.Ф.* Теория автоматического управления и регулирования. – Киев: Выща школа, 1988. – 431 с.

7. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов. – Киев: Наукова думка, 1986. – 157 с.
8. *Баранов Г.Л., Баранов В.Л., Жуков І.А., Алєксєєва Л.О.* Диференціальні перетворення для комп'ютерного моделювання. – Київ: Графіка, 2003. – 104 с.

БАРАНОВ Володимир Леонідович – доктор технічних наук, старший науковий співробітник Житомирського військового інституту радіоелектроніки ім. С.П. Корольова.

Наукові інтереси:

– математичне моделювання.

ФРИЗ Володимир Петрович – ад’юнкт Житомирського військового інституту радіоелектроніки ім. С.П. Корольова.

Наукові інтереси:

– математичне моделювання нелінійних динамічних систем.

E-mail: fpv@zvir.zt.ua

Подано 18.10.2003

Баранов В.Л., Фриз В.П. Можливий підхід до дослідження істотно нелінійних динамічних систем на основі диференціальних перетворень

Баранов В.Л., Фриз В.П. Возможный подход к исследованию существенно нелинейных динамических систем на основе дифференциальных преобразований**.**

Baranov W.L., Frees W.P. The possible approach to research of essentially nonlinear dynamic systems on the basis of differential transformations.

УДК 681.511.42

Можливий підхід до дослідження істотно нелінійних динамічних систем на основі диференціальних перетворень / В.Л. Баранов, В.П. Фриз

Проведено аналіз існуючих підходів до моделювання нелінійних систем. Пропонується один із можливих підходів до дослідження істотно нелінійних динамічних систем на основі диференціальних перетворень.

УДК 681.511.42

Возможный подход к исследованию существенно нелинейных динамических систем на основе дифференциальных преобразований / В.Л. Баранов, В.П. Фриз

Проведен анализ существующих подходов к моделированию нелинейных систем. Предлагается один из возможных подходов к исследованию существенно нелинейных динамических систем на основе дифференциальных преобразований.

УДК 681.511.42

The possible approach to research of essentially nonlinear dynamic systems on the basis of differential transformations / W. L. Baranov, W. P.Frees.

The analysis of existing approaches to modelling nonlinear systems is lead. One of possible approaches to research of essentially nonlinear dynamic systems is offered on the basis of differential transformations.