

**ЙМОВІРНІСНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОЦІНОК СПЕКТРАЛЬНОЇ ПОТУЖНОСТІ**

*Проводиться порівняльний аналіз збіжності спектральних оцінок для методів періодограм і максимальної правдоподібності. Отримано прості формули для розрахунку ефективності оцінок від числа досліджуваних вибірок.*

В даний час для розв'язання задач спектрального оцінювання, поряд з використанням періодограм, широко застосовуються різноманітні методи підвищення роздільної здатності, засновані на критеріях максимальної правдоподібності [1], максимуму ентропії [2] та ін. При цьому важливе значення має швидкість збіжності оцінок до потенційного значення, що залежить від числа навчальних вибірок, кількості яких визначають час і вартість проведених робіт.

Незважаючи на різноманітність методів і ретельний аналіз ефективності, де особлива увага приділяється енергетичним критеріям у вигляді середніх значень і дисперсії оцінок, недостатньо досліджені закони розподілу ймовірностей оцінок. Облік ймовірнісних характеристик важливий при аналізі інтервальних оцінок у системах виявлення сплесків спектральної потужності при реєстрації аномальних процесів, установці граничного рівня спрацьовування вирішального пристрою для стабілізації ймовірності помилки.

У даній статті проводиться порівняльний аналіз збіжності спектральних оцінок, отриманих методами періодограм і максимальної правдоподібності.

**1. Оцінка періодограм**

Досліджується  $K$  незалежних комплексних вибірок  $X_i^T = (x_{i1}, \dots, x_{iN})$ ,  $i = \overline{1, K}$  розміром  $N$  вхідного процесу, розподіленого за нормальним законом з нульовим середнім і коваріаційною матрицею  $R = \overline{XX^T}$ . При використанні методу періодограм на основі дискретного перетворення Фур'є  $y_i = S^T X_i$  за  $K$  вибірками визначимо оцінку потужності на частоті  $\varphi$  у вигляді (1):

$$\hat{P}_1 = K^{-1} \sum_{k=1}^K y_k^2 = K^{-1} \sum_{k=1}^K |S^T X_k|^2 = S^T \hat{R} S, \tag{1}$$

де  $S^T = (1, \exp\{j\varphi\}, \dots, \exp\{j(N-1)\varphi\})$  – вектор розміром  $N$  опорного сигналу;

$\hat{R} = K^{-1} \sum_{k=1}^K X_k X_k^T$  – вибіркова комплексна коваріаційна матриця досліджуваного процесу, що підкоряється розподілу Уїшарта  $\omega(K, N, R)$  (2):

$$\omega(\hat{R}) = |\hat{R}|^{K-N} \exp\{-tr(R^{-1}\hat{R})\} / [\pi^{N(N-1)/2} |R|^K (K-1)! \dots (K-N)!]. \tag{2}$$

Оцінка  $\hat{P}_1$  являє собою суму квадратів  $K$  незалежних нормально розподілених комплексних величин і підкоряється  $\chi^2$ - розподілу з  $2K$  ступенями волі [3]. Досліджуємо властивості розподілу лінійно перетвореної оцінки (1), нормованої до потенційного значення  $\eta = \hat{P}/P$ . З огляду на те, що величина  $x = K \eta_1 = KS^T \hat{R} S / S^T R S$  розподілена за законом  $\chi^2$ , маємо:

$$\omega(x) = x^{K-1} \exp\{-x\} / (K-1)!, \tag{3}$$

отже щільність розподілу нормованої оцінки після лінійного перетворення  $\eta_1 = x/K$  має вигляд:

$$\omega(\eta_1) = K^K (\eta_1)^{K-1} \exp(-K \eta_1) / (K-1)!. \tag{4}$$

Середнє  $\bar{\eta}$  та дисперсія  $\sigma^2$  оцінки визначається виразами:

$$\bar{\eta} = \int \eta \omega(\eta) d\eta; \quad \sigma^2 = \int (\eta - \bar{\eta})^2 \omega(\eta) d\eta \tag{5}$$

і для методу періодограм складають:

$$\bar{\eta}_1 = 1; \quad \sigma_1^2 = K^{-1}. \tag{6}$$

З (6) випливає, що оцінка (1) має незміщене середнє, що не залежить від розміру вибірки  $N$ , а дисперсія зменшується пропорційно числу досліджуваних вибірок.

### 2. Оцінка максимальної правдоподібності

Одним з методів підвищення роздільної здатності спектрального оцінювання є застосування максимально правдоподібної оцінки спектра [3]:

$$P_2^{\hat{\epsilon}} = (S^{*T} R^{-1} S)^{-1}. \quad (7)$$

Для визначення ймовірнісних характеристик нормованої величини  $\eta_2 = \hat{P}_2 / P_2$ , відповідно до методики [4], спочатку знайдемо розподіл  $x_2 = \eta_2^{-1} = \widehat{SR}^{-1}S$ . Використовуючи позначення  $A = R^{-0.5}S$  і  $\widehat{M} = R^{-0.5}\widehat{R}R^{-0.5}$ , одержимо:

$$x_2 = A^{*T} \widehat{M}^{-1} A, \quad (8)$$

де  $\widehat{M} = (R^{-0.5})^{*T} \widehat{R} R^{-0.5} = I_0$  – середнє матриці  $\widehat{M}$ , яка підкоряється розподілу Уїшарта  $\omega(K, N, I_0)$ . Використовуючи нормування вектора за допомогою перетворення  $B = (A^{*T} A)^{-1/2} A$ , одержимо  $B^{*T} B = 1$ . Введемо унітарну матрицю  $U$ , перший стовпець якої відповідає вектору  $B = U E_1$ , де  $E_1^T = (1, 0, \dots, 0)$ . Після перетворень одержимо:

$$x_2 = A^{*T} \widehat{M}^{-1} A = B^{*T} \widehat{M}^{-1} B \cdot S^{*T} R^{-1} S = E_1^T U^{*T} \widehat{M}^{-1} U E_1 = E_1^T C^{-1} E_1 = c^{11} \quad (9)$$

де  $c^{11} = \{C^{-1}\}_{11}$  – скалярна величина, а матриця  $C = U^{*T} \widehat{M}^{-1} U$  також підкоряється розподілу Уїшарта  $\omega(K, N, I_0)$  із середнім  $\overline{C} = U^{*T} \overline{M} U = U^{*T} U = I_0$ . У [4] показано, що величина  $\eta_2 = x_2^{-1} = c^{11}$  – розподілена за законом  $\chi^2$  з  $2(K - N)$  ступенями волі. Проводячи лінійне перетворення нормованої величини:

$$\eta_2 = S^{*T} R^{-1} S / S^{*T} \widehat{R}^{-1} S = x / K; \quad (10)$$

аналогічно відповідно до (3)–(6), одержимо щільність розподілу, середнє  $\overline{\eta}_2$  і дисперсію  $\sigma_2^2$ :

$$\omega(\eta_2) = K^{K-N+1} (K \eta_2)^{K-N} \exp\{-K \eta_2\}; \quad \overline{\eta}_2 = \frac{K - N + 1}{K}; \quad \sigma_2^2 = \frac{K - N + 1}{K^2}. \quad (11)$$

На підставі отриманих ймовірнісних характеристик для методу періодограм (4) і (6) і для максимальної правдоподібності (11) проведемо порівняльний аналіз ефективності інтервальних оцінок і досліджуємо ймовірність виходу вибіркової оцінки за припустимий інтервал.

### 3. Аналіз інтервальних оцінок

Визначимо ймовірності перевищення граничного рівня вибірковою оцінкою для задачі спектрального виявлення викидів вимірів. Оскільки флуктуації потужності для методу періодограм залежать тільки від дисперсії, а методу максимальної правдоподібності – від вимірів середнього і дисперсії, то в загальному вигляді граничний рівень визначається з оцінок середнього і його флуктуацій:

$$G_i = \overline{\eta}_i + C \sigma_i, \quad (12)$$

де  $C$  – відносна гранична величина.

Ймовірність перевищення порога при спектральному виявленні є ознакою помилкового піка і визначається ймовірністю помилкової тривоги:

$$F_i = \int_{G_i}^{\infty} \omega(\eta_i) d\eta_i. \quad (13)$$

Для інтегрування (13) зручно використовувати визначення неповної гамма-функції Пірсона [3] у вигляді:

$$I(G, K) = \frac{1}{(K-1)!} \int_0^G x^{K-1} e^{-x} dx. \quad (14)$$

Провівши для обох оцінок зворотнє перетворення  $x = K \eta$ , одержимо, що граничні значення й ймовірності перевищення порога визначаються виразами:

$$G_1 = K + C \sqrt{K}; \quad \omega_1 = \frac{1}{(K-1)!} x^{K-1} e^{-x}; \quad F_1 = 1 - I(G_1, K); \quad (15)$$

$$G_2 = K - N + 1 + C\sqrt{K - N + 1}; \quad \omega_2 = \frac{1}{(K - N)!} x^{K-N} e^{-x}; \quad (16)$$

$$F_2 = 1 - I(G_2, K - N + 1).$$

Ефективність оцінок ілюструється залежностями середнього  $\eta$ , дисперсії  $\sigma$  від кількості навчальних вибірок, що представлені відповідно на рис. 1–2. Штриховою лінією позначені графіки для методу періодограм, а суцільними лініями – для методу максимальної правдоподібності. Наявність зростання  $\sigma_2$  у випадку  $K < 2N$  обумовлено перевагою зростання середнього щодо множника  $K^{-1}$ . На рис. 3 представлені залежності ймовірності помилкової тривоги  $F$  від відносного граничного рівня  $C$  при різному числі  $K = 10..40$  навчальних вибірок розміром  $N = 5$ .

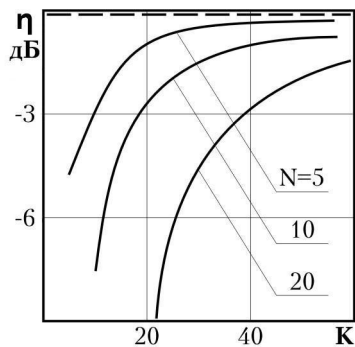


Рис. 1

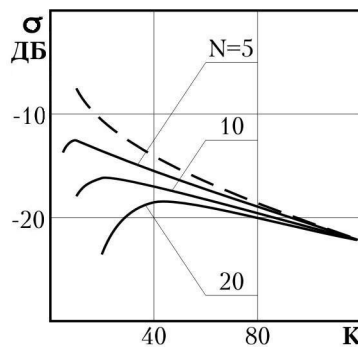


Рис. 2

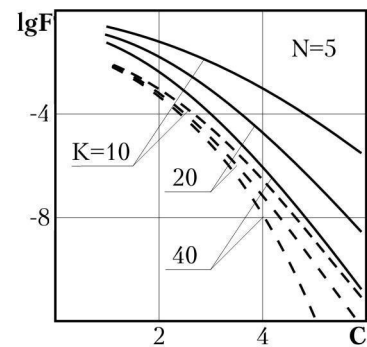


Рис. 3

Аналіз графіків показав, що для методу максимальної правдоподібності зсув середнього складає менше 3 дБ для числа вибірок  $K < 2N$ . Розходження дисперсії обох методів при невеликій кількості вибірок незначне, менше 4 дБ. При кількості вибірок більше 80 дисперсії майже збігаються досягаючи границі  $-20$  дБ і менше. З залежностей ймовірності помилки випливає, що метод періодограм забезпечує задану ймовірність помилкових викидів при меншому граничному рівні.

У цілому метод періодограм має кращу збіжність як за енергетичними характеристиками, так і за ймовірністю помилки. Однак при цьому варто враховувати його низьку роздільну здатність.

#### ЛІТЕРАТУРА:

1. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения: Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 584 с.
2. Монзинго Р.А., Миллер Т.У. Адаптивные антенные решетки: Введение в теорию: Пер. с англ. / Под ред. В.А. Лексаченко. – М.: Радио и связь, 1986. – 448 с.
3. Справочник по специальным функциям.: Пер. с англ. / Под ред. М.Абрамовица и И.Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
4. Reed I.S., Mallet J.D., Brennan L.E. Rapid convergence rate in adaptive arrays // IEEE Trans. – 1974. – AES-10. – № 6. – P. 853–863.

ОРЛОВ Володимир Вікторович – доцент кафедри комп'ютеризованих систем керування Одеського національного політехнічного університету.

Наукові інтереси:

– розробка адаптивних систем прийняття рішень.

Тел.: (048) 7-468-168.

E-mail: [vorlov@ukr.net](mailto:vorlov@ukr.net)

Подано 25.01.2004

**Орлов В.В.** Ймовірнісні характеристики оцінок спектральної потужності.  
**Орлов В.В.** Вероятностные характеристики оценок спектральной мощности.  
**Orlov V.V.** Probability characteristics of ratings of spectral capacity.

УДК 621.372.54

**Ймовірнісні характеристики оцінок спектральної потужності / В.В. Орлов**

Проводиться порівняльний аналіз збіжності спектральних оцінок для методів періодограм і максимальної правдоподібності. Отримано прості формули для розрахунку ефективності оцінок від числа досліджуваних вибірок.

УДК 621.372.54

**Вероятностные характеристики оценок спектральной мощности / В.В. Орлов**

Проводится сравнительный анализ сходимости спектральных оценок для методов периодограмм и максимального правдоподобия. Получены простые формулы для расчета эффективности оценок от числа исследуемых выборок.

УДК 621.372.54

**Probability characteristics of ratings of spectral capacity / V.V. Orlov**

The comparative analysis of convergence of spectral ratings for methods periodograms and the maximum likelihood is spent. Simple formulas for calculation of efficiency of ratings from number researched samples are received.