УДК 681.51:519.95

В.Л. Баранов, д.т.н., пров. н.с.
О.Г. Фролова, аспір.
Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України

ВАРІАЦІЙНА МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ КЕРУВАННЯ НА ОСНОВІ ЗМІЩЕНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Запропоновано модель оптимальних процесів керування, побудовану за допомогою методів варіаційного числення та зміщених диференціальних перетворень, що дозволяють підвищити точність моделювання. Одержана модель не потребує інтегрування двоточкової граничної задачі та є адаптованою до дії зовнішніх збурень.

Постановка проблеми. До керування динамічними об'єктами та процесами досить часто пред'являються вимоги реалізації процесу оптимального керування в реальному часі, а також у прискореному часі з метою попередження зіткнень рухомих об'єктів. На практиці задачі оптимального керування виникають під час траєкторного керування аеродинамічними та аерокосмічними об'єктами, де вимагається висока точність керування, під час керування різноманітними видами транспорту, швидкоплинними динамічними процесами та ін.

Аналіз досліджень і публікацій. Для розв'язку задач оптимального керування широко застосовуються методи, які грунтуються на варіаційному численні, принципі максимуму Понтрягіна та динамічному програмуванні. Але вказані методи не у всіх випадках задовольняють вимогам оптимального керування швидкісними рухомими об'єктами в реальному часі. Варіаційні методи та принцип максимуму Понтрягіна дозволяють чисельно моделювати процес оптимального керування лише у формі програмного керування, що не дає стійкості до дії зовнішніх збурень на об'єкт керування. Однак під час замикання програмного оптимального керування в контур керування вноситься значне запізнювання, оскільки доводиться розв'язувати складну в обчислювальному відношенні двоточкову граничну задачу, до якої приводить застосування варіаційних методів або принципу максимуму Понтрягіна. Методи, які грунтуються на динамічному програмуванні, дозволяють моделювати замкнений процес оптимального керування, але при цьому перетворюють задачу оптимального керування у ще більш складну задачу інтегрування диференціальних рівнянь у часткових похідних. Відомі також методи оптимізації за цільовим функціоналом узагальненої роботи А.А. Красовського [1], але їх використання так само призводить до розв'язку диференціальних рівнянь у часткових похідних.

З метою усунення недоліків відомих методів у [2] для моделювання процесу оптимального керування застосовувався метод диференціальних перетворень [3]. Застосування даного методу дозволило уникнути чисельного інтегрування нелінійних диференціальних рівнянь та перетворити проблему моделювання процесу оптимального керування у задачу розв'язку системи кінцевих рівнянь. У вказаній роботі застосовувались основні диференціальні перетворення, у яких центр розкладу оригіналу в степеневий ряд Тейлора розташовувався у початковій точці часового аргумента $t = 0$. Таке розташування точки розкладу оригіналу суттєво обмежувало довжину інтервалу часу, на якому розв'язувалась задача оптимального керування. Обмеження на довжину інтервалу часу визначається радіусом збіжності ряду Тейлора, що апроксимує процеси оптимального керування.

Мета роботи. В даній роботі пропонується використовувати для моделювання процесу оптимального керування комбінований метод, що грунтується на методах варіаційного числення та зміщених диференціальних перетвореннях [3], в яких точка розкладу в ряд Тейлора переноситься із нульової точки $t = 0$ у зміщену точку $t = t_\nu$. При цьому досягається розширення часового інтервалу оптимізації або збільшується точність моделювання, а також зникає проблема інтегрування двоточкової граничної задачі, що і є метою даної роботи.

Побудова варіаційної моделі оптимальних процесів керування. Розглянемо математичну модель задачі оптимального керування [4]. Динаміка руху об'єкта керування описується диференціальним рівнянням:

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

де $x = x(t)$ – n-вимірний вектор стану; u – m-вимірний вектор керування ($m \le n$); f – неперервна і неперервно диференційована за сукупністю змінних t, x, u вектор-функція узагальненої сили; $t \in [t_0, T]$ – час, граничне значення якого вважається заданим. Якість процесу керування оцінюється функціоналом:

$$I = S[x(T)] + \int_0^T \varphi(t, x, u)dt, \tag{2}$$

де задані функції S та φ мають неперервні часткові похідні по x та u. Вважаємо, що обмеження на вектори стану та керування враховані в процесі вибору вигляду функціоналу (2). Потрібно моделювати процес оптимального керування із зворотним зв'язком

$$u = u(x, t), \tag{3}$$

який у кожний момент часу t використовує інформацію про поточний стан $x(t)$ динамічного об'єкта та забезпечує досягнення оптимального значення функціоналом (2). Замкнений закон оптимального керування (3) реагує на зміну поточного стану $x(t)$ об'єкта керування (1) в результаті дії зовнішніх збурень і тому дозволяє компенсувати дію збурюючих факторів, чим відрізняється від програмного керування.

Методика моделювання замкнутого процесу оптимального керування (3) складається із наступних етапів.

На першому етапі задача оптимального керування (1), (2) методами варіаційного числення або принципом максимуму Понтрягіна перетворюється у двоточкову граничну задачу, яка у векторно-матричній формі має наступний вигляд [4]:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u), \quad x(t_0) = x_0, \tag{4}$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)' \lambda - \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \lambda(T) = \frac{\partial S[x(T), T]}{\partial x(T)} \tag{5}$$

,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)' \lambda + \frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0, \tag{6}$$

де штрих позначає операцію транспонування. Система $2n$ диференціальних рівнянь (4), (5) з $2n$ граничними умовами описує двоточкову граничну задачу, розв'язок якої визначає n-вимірні вектори $x(t)$ та $\lambda(t)$. Рівняння (6) дозволяє знайти m-вимірний вектор оптимального керування $u(t)$.

На другому етапі моделювання застосуємо зміщені диференціальні перетворення [3] до системи рівнянь (4)–(6). Зміщені диференціальні перетворення часової функції $x(t)$ у довільній точці t_ν представимо у двох формах:

$$\bar{X}(k, t_\nu) = \frac{(-H_1)^k}{k!}\left[\frac{d^k x(t_\nu - \tau)}{d\tau^k}\right]_{\tau=0}, \tag{7}$$

$$X(k, t_\nu) = \frac{H_2^k}{k!}\left[\frac{d^k x(t_\nu + \tau)}{d\tau^k}\right]_{\tau=0}, \tag{8}$$

де $\bar{X}(k, t_\nu)$ та $X(k, t_\nu)$ – дискретні функції цілочисельного аргумента k = 0,1,2,3,...; τ – локальний часовий аргумент, значення якого вибирається у межах $H_1 \ge \tau \ge 0$ та $H_2 \ge \tau \ge 0$; H_1 та H_2 – відрізки часового аргумента, на яких розглядаються відповідно функції $x(t_\nu - \tau)$ та $x(t_\nu + \tau)$. Вирази (7) та (8) визначають перетворення часових функцій $x(t_\nu - \tau)$ та $x(t_\nu + \tau)$ у диференціальні спектри $\bar{X}(k, t_\nu)$ та $X(k, t_\nu)$ відповідно, які для кожного цілочисельного значення k = 0, 1, 2, 3, ... називаються дискретами.

Перехід із області зображень у часову область виконується оберненими диференціальними перетвореннями у вигляді рядів Тейлора:

$$x(t_\nu - \tau) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\tau}{H_1}\right)^k \bar{X}(k, t_\nu), \tag{9}$$

$$x(t_\nu + \tau) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\tau}{H_2}\right)^k X(k, t_\nu). \tag{10}$$

Математична модель двоточкової граничної задачі (4)–(6) перетворюється зміщеними диференційними перетвореннями (7) та (8) в область зображень у формі рекурентних виразів:

$$\bar{X}(k+1, t_\nu) = -\frac{H_1}{k+1} F[\bar{\Theta}(k, t_\nu), \bar{X}(k, t_\nu), \bar{U}(k, t_\nu)], \tag{11}$$

$$\bar{\Lambda}(k+1, t_\nu) = \frac{H_1}{k+1}\left[\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)'} \times \bar{\Lambda}(k, t_\nu) + \overline{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)}\right], \tag{12}$$

$$\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)'} \times \bar{\Lambda}(k,t_\nu) + \overline{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)} = 0\,, \tag{13}$$

$$X(k+1,t_\nu) = \frac{H_2}{k+1} F[\Theta(k,t_\nu),\, X(k,t_\nu), U(k,t_\nu)]\,, \tag{14}$$

$$\Lambda(k+1,t_\nu) = -\frac{H_2}{k+1}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)' \times \Lambda(k,t_\nu) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\right], \tag{15}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)' \times \Lambda(k,t_\nu) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = 0\,, \tag{16}$$

$$\bar{X}(0) = X(0) = x(t_\nu) = x_\nu,\quad \bar{\Lambda}(0) = \Lambda(0) = \lambda(t_\nu) = \lambda_\nu,\quad \bar{U}(0) = U(0) = u(t_\nu) = u_\nu\,, \tag{17}$$

де F – зображення функції f; $\bar{\Theta}(k,t_\nu)$ та $\Theta(k,t_\nu)$ – зображення часового аргумента відповідно на інтервалах $[0, H_1]$ та $[0, H_2]$; риска знизу є символом диференціальних перетворень (7), (8), а риска зверху над частковими похідними у рівняннях (12), (13) позначає диференційні зображення цих часткових похідних на інтервалі $[0, H_1]$; символ × позначає операцію множення в області зображень.

Рекурентні вирази (11)–(13) дозволяють, послідовно надаючи значення цілочисельному аргументу $k = 0, 1, 2, \ldots$, знайти в області зображень диференціальні спектри векторів $x(t_\nu-\tau)$, $\lambda(t_\nu-\tau)$ та $u(t_\nu-\tau)$ на відрізку $H_1 = t_\nu - t_0$. Виконуючи обчислення в аналітичному вигляді від початкових умов (17), одержимо диференціальні спектри у вигляді:

$$\bar{X}(k,t_\nu,x_\nu,\lambda_\nu,u_\nu)\,,\ \bar{\Lambda}(k,t_\nu,x_\nu,\lambda_\nu,u_\nu)\,,\ \bar{U}(k,t_\nu,x_\nu,\lambda_\nu,u_\nu)\,,\ k = 0, 1, 2, \ldots\,.$$

Аналогічно, за виразами (14)–(16) від початкових умов (17) знаходимо диференціальні спектри векторів $x(t_\nu+\tau)$, $\lambda(t_\nu+\tau)$ та $u(t_\nu+\tau)$ на відрізку $H_2 = T - t_\nu$ у вигляді:

$$X(k,t_\nu,x_\nu,\lambda_\nu,u_\nu)\,,\ \Lambda(k,t_\nu,x_\nu,\lambda_\nu,u_\nu)\,,\ U(k,t_\nu,x_\nu,\lambda_\nu,u_\nu)\,,\ k = 0,1,2,\ldots\,.$$

Обернені перетворення (9) при $\tau = H_1 = t_\nu - t_0$ та (10) при $\tau = H_2 = T - t_\nu$ дозволяють виразити граничні умови (4), (5) у вигляді системи двох n-вимірних векторних рівнянь, які разом з m-вимірним векторним рівнянням (6) у точці t_ν складають систему для визначення значень x_ν, λ_ν та u_ν:

$$x(t_0) = x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{X}(k,t_\nu,x_\nu,u_\nu,\lambda_\nu)\,, \tag{18}$$

$$\frac{\partial S[x(T),T]}{\partial x(T)} = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda(k,t_\nu,x_\nu,u_\nu,\lambda_\nu)\,, \tag{19}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)' \lambda(t_\nu) + \frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0\,. \tag{20}$$

Система $2n + m$ рівнянь (18)–(20) дозволяє у довільний момент часу t_0 знайти значення векторів $x_\nu(t_\nu, t_0, x_0)$, $\lambda_\nu(t_\nu, t_0, x_0)$ та $u_\nu(t_\nu, t_0, x_0)$, $t_\nu \in (t_0, T)$. Підстановка цих векторів у вирази для дискрет диференціального спектра $\bar{U}(k,t_\nu,x_\nu,\lambda_\nu,u_\nu)$ та потім у формулу обернених перетворень (9) дає можливість при $\tau = H_1 = t_\nu - t_0$ знайти оптимальний вектор керування $u(t_0, x_0)$:

$$u(t_0,x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{U}(k,t_\nu,t_0,x_0)\,. \tag{21}$$

Таким чином, на третьому етапі моделювання замкненого процесу оптимального керування потрібно розв'язати систему кінцевих рівнянь (18)–(20), розв'язки якої при підстановці у вираз (21) дозволяють знайти вектор оптимального керування $u(t_0, x_0)$. Оскільки момент часу t_0 був обраний довільно, то, вважаючи $t_0 = t$, $t \in [0, t_\nu]$, $t_\nu \in (0, T)$ та обираючи крок $H_1 = t_\nu - t$, розв'язки системи кінцевих рівнянь (18)–(20) разом з виразом (21) будуть визначати у кожний поточний момент часу t оптимальне керування із зворотним зв'язком $u(t, x(t))$, адаптоване до дії зовнішніх збурень. Якщо обирати точку t_ν кожний раз у центрі відрізка $[t, T]$, то тоді крок $H_1 = H_2 = (T-t)/2$.

Оскільки моделювання процесу оптимального керування було виконано на основі необхідних умов оптимальності функціоналів, то одержану систему потрібно перевірити методами комп'ютерного моделювання відносно оптимальності та стійкості керування рухомим об'єктом.

Дослідимо ефективність застосування зміщених диференціальних перетворень у порівнянні з основними, застосованими в [2]. Зміщені диференціальні перетворення, як і основні, дозволяють аналітично точно виконувати математичні операції в області зображень. Похибка розв’язку задачі з’являється при використанні обмеженої кількості дискрет диференціального спектра в процесі обернених перетворень (9), (10) в область часу. Якщо в рядах Тейлора (9), (10) обмежити кількість членів, що враховуються, то похибка, викликана відкиданням членів вищого порядку, оцінюється залишками цих рядів. Нехай в (9) враховується r_1 членів ряду, а в (10) – r_2 членів. Тоді залишки рядів Тейлора (9) і (10) точно виражаються у формах Лагранжа та Ейлера-Лагранжа [5]:

$$R_c = \frac{H^{r_1+1}}{(r_1+1)!} x^{(r_1+1)}(t_c^*) = \frac{H^{r_1+1}}{r_1!} \int_0^1 (1-\Theta)^{r_1} x^{(r_1+1)}(t_\nu + \Theta H) d\Theta, \tag{22}$$

$$\bar{R}_c = \frac{(-H)^{r_2+1}}{(r_2+1)!} x^{(r_2+1)}(\bar{t}_c^*) = \frac{(-H)^{r_2+1}}{r_2!} \int_0^1 (1-\Theta)^{r_2} x^{(r_2+1)}(t_\nu - \Theta H) d\Theta, \tag{23}$$

де $t_c^* \in [t_\nu, T]$, $\bar{t}_c^* \in [t_0, t_\nu]$, $1 \ge \Theta \ge 0$.

Аналогічним чином представляється в основних обернених перетвореннях, які мають вигляд:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{H_0} \right)^k X(k), \tag{24}$$

залишок ряду Тейлора при врахуванні тільки r членів цього ряду:

$$R_0 = \frac{H_0^{r+1}}{(r+1)!} x^{(r+1)}(t^*) = \frac{H_0^{r+1}}{r!} \int_0^1 (1-\Theta)^r x^{(r+1)}(\Theta H_0) d\Theta, \tag{25}$$

де $t^* \in [0, T]$, $1 \ge \Theta \ge 0$.

Ефективність зміщених перетворень оцінюється відношенням залишку (25) до залишків (22) та (23). У загальному випадку оцінку ефективності застосування зміщених перетворень можна одержати тільки наближено. В часткових випадках за виразами (22), (23) та (25) можна знайти точну оцінку ефективності зміщених перетворень.

Наприклад, вважаємо, що $r = r_1 = r_2$, функція $x(t)$ на інтервалі $[0, T]$ описується степеневим многочленом $r + 1$-го порядку. Оберемо крок за часом основних перетворень так, що $H_0 = 2H = T$. Такому вибору кроку зміщених перетворень $H = T/2$ відповідає точка зміщення $t_\nu = T/2$. Оскільки функція $x(t)$ описується степеневим многочленом $r + 1$-го порядку, а $r = r_1 = r_2$, то похідна порядку $r + 1$ від функції $x(t)$ вироджується у постійну величину, яка однакова у всіх інтегралах (22), (23) та (25). У цьому випадку значення всіх визначених інтегралів (22), (23) та (25) однакові. Тому одержимо точну оцінку ефективності застосування зміщених диференціальних перетворень у порівнянні з основними перетвореннями:

$$\frac{|R_0|}{|R_c|} = \frac{|R_0|}{|\bar{R}_c|} = 2^{r+1}.$$

Звідси випливає, що для степеневого многочлена $r + 1$-го порядку застосування зміщених перетворень дозволяє зменшити похибку основних перетворень у 2^{r+1} раз, де r – кількість дискрет диференціального спектра, що враховуються при переході з області зображень в область часу.

Якщо врахувати, що степеневі многочлени широко використовуються на практиці для апроксимації широкого класу функцій $x(t)$, то можна очікувати, що одержана оцінка ефективності зміщених перетворень буде не набагато відрізнятися від реальної оцінки.

Висновки та перспективи подальших досліджень. Таким чином, побудовано модель оптимальних процесів керування із зворотним зв'язком на основі зміщених диференціальних перетворень двоточкової граничної задачі. Запропонований метод моделювання дозволяє уникнути чисельного інтегрування, оскільки перетворює задачу оптимального керування у задачу розв'язку $2n + m$ кінцевих рівнянь. Застосований при цьому математичний апарат зміщених диференціальних перетворень дозволяє у порівнянні з основними диференціальними перетвореннями підвищити точність розв'язку або розширити часовий інтервал оптимізації, а також отримати потрібну точність, використовуючи меншу кількість дискрет. До недоліків зміщених диференціальних перетворень можна віднести збільшення кількості невідомих у системі кінцевих рівнянь на n компонент вектора $x(t_\nu) = x_\nu$.

Подальші дослідження у напрямку, розглянутому в роботі, стосуються розв'язку задач оптимального керування із врахуванням обмежень на вектори керування та стану динамічного об'єкта.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Красовский А.А.* Неклассические целевые функционалы и проблемы теории оптимального управления (обзор) // Техническая кибернетика. – 1992. – № 1. – С. 3–41.
2. *Уруский О.С., Баранов В.Л.* Синтез замкнутых законов терминального управления на основе дифференциальных преобразований // Электрон. моделирование. – 1996. – 18, № 3. – С. 3–8.

3. *Пухов Г.Е.* Приближенные методы математического моделирования, основанные на применении дифференциальных Т–преобразований. – Киев: Наук. думка, 1988. – 216 с.
4. *Брайсон А., Хо Ю-ши.* Прикладная теория оптимального управления. – М.: Мир, 1972. – 544 с.
5. *Трухаев Р.И.* Методы инфлюентного анализа высоких порядков. – Ленинград: Наука, 1987. – 257 с.

БАРАНОВ Володимир Леонідович – доктор технічних наук, провідний науковий співробітник Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України.

Наукові інтереси:
– моделювання;
– оптимізація;
– керування;
– диференціальні перетворення.

Тел. (044)248-31-69.

ФРОЛОВА Олена Геннадіївна – аспірантка Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України.

Наукові інтереси:
– моделювання;
– оптимізація;
– керування;
– диференціальні перетворення.

Тел. (044)450-41-99;
E-mail frolov@alfacom.net

Подано 01.07.2003

Баранов В.Л., Фролова В.П. Варіаційна модель оптимальних процесів керування на основі зміщених диференціальних перетворень

Баранов В.Л., Фролова Е.Г. Вариационная модель оптимальных процессов управления на основе смещенных дифференциальных преобразований

Baranov V.L., Frolova E.G. Variation model of optimum control process on the basis of displacement differential transforms

УД**К 681.51:519.95**

Варіаційна модель оптимальних процесів керування на основі зміщених диференціальних перетворень // В.Л. Баранов, В.П. Фролова

Запропоновано модель оптимальних процесів керування, побудовану за допомогою методів варіаційного числення та зміщених диференціальних перетворень, що дозволяють підвищити точність моделювання. Одержана модель не потребує інтегрування двоточкової граничної задачі та є адаптованою до дії зовнішніх збурень.

УДК 681.51:519.95

Вариационная модель оптимальных процессов управления на основе смещенных дифференциальных преобразований // В.Л. Баранов, Е.Г. Фролова

Предложена модель оптимальных процессов управления, построенная с помощью методов вариационного исчисления и смещенных дифференциальных преобразований, которые позволяют повысить точность моделирования. Полученная модель не требует интегрирования двухточечной краевой задачи и является адаптированной к действию внешних возмущений.

УДК 681.51:519.95

Variation model of optimum control process on the basis of displacement differential transforms // V.L. Baranov, E.G. Frolova

The model of optimum control process is proposed. It is constructed with the help of calculus of variations methods and displacement differential transforms, which allow increasing the precision of simulation. The obtained model does not demand integration of a two-point boundary problem and is adapted to influence of external disturbances.