УДК 621.391

І.А. Пількевич, к.т.н., доц.
Відокремлений підрозділ Європейського університету у м. Житомирі

РІВНЯННЯ РОЗПОДІЛУ ДИПОЛІВ У ХМАРІ ДИПОЛЬНИХ ВІДБИВАЧІВ ТА ЇХНЄ ВИКОРИСТАННЯ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ КОРЕЛЯЦІЙНОЇ МАТРИЦІ ПЕРЕШКОД

У статті запропоновано математичну модель хмари дипольних відбивачів, яка маскує радіолокаційні цілі поза атмосферою, у вигляді суцільного середовища, що описується двома параметрами – полем щільності просторової концентрації диполів та полем швидкостей їхнього поступального руху. Для цих параметрів отримано рівняння в довільній криволінійній системі координат, що описують поводження відповідних полів у часі і просторі. На основі апріорно-відомого еліптичного характеру траєкторій диполів у безповітряному просторі в центральному полі земного тяжіння побудована спеціальна система координат, в якій рівняння полів щільності та швидкості допускають прості аналітичні розв'язки. Ці розв'язки використовуються для оцінювання елементів кореляційної матриці перешкод у багатоканальній РЛС. Викладається методика оцінювання.

Відомо [1], що кореляційна матриця перешкод визначає, по-перше, алгоритм оптимальної вагової обробки сигналів у багатоканальній РЛС із *ФАР*, і, по-друге, якість цієї обробки (зокрема, коефіцієнти використання та виграшу). Під час локації цілей, що маскуються хмарами дипольних відбивачів (ХДВ), у приймальних каналах РЛС спостерігається перешкода з просторовою та часовою кореляцією. У свою чергу, просторово-часові кореляційні властивості перешкоди визначаються розподілом диполів в ХДВ за простором та швидкістю. Таким чином, моделюванням просторово-швидкісного розподілу диполів розв'язується задача дослідження можливостей та якості оптимальної обробки сигналів у присутності такого роду перешкод залежно від просторово-швидкісних властивостей диполів у ХДВ.

Найбільшу складність являє собою локація цілей у ХДВ у космосі, коли розходження у швидкостях цілей і диполів малі для того, щоб ці розходження ефективно використовувати для швидкісної селекції [2], [3]. З цієї причини в роботі об'єктом вивчення є ХДВ поза атмосферою, причому спосіб створення хмари розглядається один – шляхом одноразового викиду диполів з однієї точки на навколоземній орбіті у всіх напрямках. Узагальнення результатів на хмари, сформованих викидом у декількох точках, труднощів не становить.

Внаслідок великої кількості диполів у реальних ХДВ (ц10^8 шт) моделювати механіку руху в космосі кожного диполя важко. Зручном тут виявляється модель ХДВ у вигляді суцільного середовища, параметрами якої є скалярне поле щільності просторової концентрації $n(t, x, y, z)$ і векторне поле швидкостей поступального руху $\vec{V}(t, x, y, z)$. Тоді розподіл диполів за простором та швидкістю повинен підкорятися відомим рівнянням гідродинаміки. Однак декартові координати, для яких ці рівняння отримані, незручні при розв'язанні рівнянь у їхній класичній формі для ХДВ на навколоземній орбіті. Якщо використовувати апріорну інформацію про еліптичний характер траєкторії диполів у центральному полі тяжіння Землі, то шляхом спеціального вибору системи координат можна одержати прості аналітичні розв'язки для поля щільності та поля швидкості в аналітичному вигляді.

Таким чином, задача полягає в одержанні рівнянь просторово-швидкісного розподілу диполів в узагальнених координатах, виборі спеціальної системи координат, розв'язанні рівнянь з наступною підстановкою поля щільності та поля швидкості в алгоритм оцінювання компонентів кореляційної матриці перешкод.

1. Рівняння просторово-швидкісного розподілу диполів в узагальнених координатах

1.1. Рівняння поля швидкостей поступального руху

Під час використання узагальнених і в загальному випадку криволінійних координат, що цікавлять нас, поле швидкостей (ПШ) поступального руху диполів $\vec{V}(t, x, y, z)$ та поле щільностей (ПЩ) їхнього просторового розподілу $n(t, x, y, z)$ виявляються заданими на диференційованому багатовиді. Тому, відволікаючись від векторної природи $\vec{V}$, за швидкість використовуватимемо тензор з однією, наприклад, коваріантною валентністю (що неістотно при заданому на багатовиді метричному тензорі q_{ij}).

Обчислимо абсолютний диференціал тензора V_i при зміщенні в близьку точку простору-часу. Диференціал виразиться відомою формулою [4]:

$$DV_i = dV_i - \Gamma^p_{ki} V_p dx^k , \tag{1}$$

де dV_i – повний диференціал;

Γ^p_{ki} – коефіцієнти зв'язності;

$X^k \in \{t, q^1, q^2, q^3\}$ – К-а координата (К = 0, 1, 2, 3) точки простору-часу.

(Знаки $\sum$ за згодою про підсумовування опускаються).

Узагальненими криволінійними координатами вважаємо тільки просторові $\{q^1, q^2, q^3\}$, метричний тензор q_{ij} від часу t не залежить, тому $\Gamma^k_{oi} = 0$, і, К = 0, 1, 2, 3. З обліком цього розділяємо в (1) часові та просторові координати. Абсолютний диференціал (1) набуде вигляду:

$$DV_i = \frac{\partial V_i}{\partial t} dt + \frac{\partial V_i}{\partial q^j} dq^j - \Gamma^p_{ki} V_p dq^k . \tag{2}$$

Прискорення диполя, тобто субстанціональну похідну [5], одержуємо шляхом поділу (2) на диференціал часу:

$$\frac{DV_i}{dt} = \frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{\partial V_i}{\partial q^j} V^j - \Gamma^p_{ki} V_p V^k . \tag{3}$$

Це прискорення повідомляється диполям полем зовнішніх сил, зокрема гравітаційних. Вважаємо це прискорення заданим у вигляді відомого поля ко-вектора a_i. Виражаючи Γ^p_{ki} через метричний тензор і приводячи компоненти швидкості в (3) до єдиної (коваріантної) валентності, приходимо до рівняння для поля $V_i(t, q^1, q^2, q^3)$ в узагальнених координатах:

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{\partial V_i}{\partial q^k} g^{km} V_m - \frac{1}{2} \times \frac{\partial q_{pk}}{\partial q^i} g^{pm} g^{kl} V_m V_l = a_i . \tag{4}$$

1.2. Рівняння поля щільностей просторової концентрації

Нехай ρ – кількість диполів, що припадають на область простору R^3, обмеженого одиничним інтервалом по кожній із узагальнених координат q^1, q^2, q^3. Виділимо деяку обмежену замкнутою поверхнею область Q. Кількість диполів у ній дорівнює:

$$N = \iiint\limits_{(Q)} \rho dq^1 dq^2 dq^3 . \tag{5}$$

Кількість диполів, що залишають цю область в одиницю часу, тобто потік через поверхню Q відповідно до теореми Остроградського дорівнює триразовому інтегралові від дивергенції векторного поля $\rho\vec{V}$, обчисленому по всій області Q:

$$\frac{dN}{dt} = \iiint\limits_{(Q)} \left(\nabla_i \rho V^i\right) dq^1 dq^2 dq^3 . \tag{6}$$

З очевидної рівності:

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{d}{dt} \iiint\limits_{(Q)} \rho \, dq^1 dq^2 dq^3$$

та довільності області Q приходимо до рівняння для поля $\rho(t, q^1, q^2, q^3)$ в узагальнених координатах (аналог рівняння безперервності) для розрядженого суцільного середовища, в якому тиск відсутній. Рівняння має вигляд:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla_i \rho) V^i + \rho(\nabla_i V^i) = 0 , \tag{7}$$

де $\nabla_i \rho = \frac{\partial \rho}{\partial q_i}$ – градієнт щільності ρ, а дивергенція $\nabla_i V^i$ виражається через метричний тензор за допомогою відомих формул абсолютного диференціювання [4]:

$$\nabla_i V^i = \frac{\partial V_i}{\partial q^i} + \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mi}}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{mp}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ip}}{\partial q^m} \right) V^p \quad . \tag{8}$$

2. Моделювання кореляційної матриці перешкод шляхом розв'язання рівняння для хмари диполів на навколоземній орбіті

Кореляційна матриця перешкод при зондуванні простору з ХДВ багатоканальної РЛС із фазованою антенною решіткою пов'язані з просторово-швидкісним розподілом диполів $\eta\left(\vec{\theta}, \tau, F\right)$ формулою [1]:

$$\Phi_\Sigma(t,s) = N_o \delta(t-s) + \iiint\limits_{(\vec{\theta},\tau,F)} A\left(t,\vec{\theta}\right) A^+\left(s,\vec{\theta}\right) \times x(t-s) x^+(s-\tau) \times$$
$$\times \exp\left[j 2\pi F(t-s)\right] \eta\left(\vec{\theta},\tau,F\right) d\vec{\theta} d\tau d\, {F}/{2}, \tag{9}$$

де N_o – матриця спектральної щільності шумів у просторових каналах прийому;

$A\left(t,\vec{\theta}\right)$ - закон модуляції діаграмою спрямованості антени;

$+$ – знак ермітового сполучення;

$x(t)$ – вектор-стовпець зондувального сигналу;

$\delta(t)$ – дельта-функція Дирака.

Оскільки за математичну модель ХДВ поза атмосферою використовується розряджене (без тиску) суцільне середовище, описуване сукупністю тільки двох параметрів, – скалярного поля щільності просторового розподілу $n(t,\ x,\ y,\ z)$ та векторного поля швидкостей поступального руху $\vec{V}(t,\ x,\ y,\ z)$, то в цій моделі функція середньої потужності дипольної перешкоди $\eta\left(\vec{\theta},\tau,F\right)$ має вигляд:

$$\eta_t\left(\vec{\theta},\tau,F\right) = c \times n\left[t, \vec{\theta}(\vec{r}), \tau(\vec{r})\right] \times \delta\left[\vec{V} - \vec{V}(t,\vec{r})\right], \tag{10}$$

де c – коефіцієнт пропорційності;

$\vec{r} = \{x, y, z\}$ – сукупність трьох просторових координат.

Така факторизація функції середньої потужності $\eta\left(\vec{\theta},\tau,F\right)$ означає, що в кожній точці простору, зайнятого суцільним середовищем, швидкість задана однозначно. З іншого боку, розрахунком полів $n(t,\vec{r})$, $\vec{V}(t,\vec{r})$ згідно з (9), (10) розв'язується задача моделювання кореляційної матриці перешкод Φ_u.

2.1. Розв'язок рівнянь розподілу диполів у хмарі дипольних відбивачів

Клас можливих полів $n(t,\vec{r})$ і $\vec{V}(t,\vec{r})$ для хмари диполів обмежений загальними розв'язками рівнянь (4), (7). Визначимо цей клас. Простий аналітичний розв'язок цих рівнянь вдається одержати в спеціально обраній системі координат (ССК), у якій вектор поля швидкостей $\vec{V}$ у кожній точці простору дотичний до координатних ліній. Тоді в локальному репері кожної точки компоненти тензора V^1 дорівнюють нулеві, крім однієї $\left(V^1 = V,\ V^2 = V^3 \equiv 0\right)$, система рівнянь (4) замінюється одним рівнянням для першого компонента поля V^1. Для найпростішого ХДВ, формованого „пострілом" диполів з однієї точки простору в різних напрямках у центральному полі тяжіння Землі, така спеціальна система координат завжди існує й алгоритм перерахування координат з неї в геоцентричну (як і назад) практичних труднощів не становить (див. п. 3).

Зневажимо неоднорідністю гравітаційного поля в межах об'єму, займаного хмарою. Розрахунки показують, що неоднорідність поля на навколоземних орбітах з "розмахом" хмари за висотою до 300 км при висоті центру хмари над поверхнею Землі 1100 км становить усього близько 4 %.

Система (4) у ССК виражається одним квазілінійним рівнянням 1-го порядку:

$$\frac{\partial V^1}{\partial t}+V^1\frac{\partial V^1}{\partial q^1}-g^{i1}\left(\frac{1}{2}\times\frac{\partial g_{11}}{\partial q^i}-\frac{\partial g_{i1}}{\partial q^1}\right)\times\left(V^1\right)^2=0 \tag{11}$$

відносно $V^1\left(t,q^1,q^2,q^3\right)$. Розв'язання рівняння (11) загальновідомим шляхом [6] приводить до загального інтеграла:

$$\Phi\left(вt+\frac{1}{V^1},\ V^1e^{вq^1}\right)=0, \tag{12}$$

$$V^2=V^3\equiv 0,$$

де введене позначення:

$$в\left(q^1,q^2,q^3\right)=-g^{i1}\left(\frac{1}{2}\times\frac{\partial g_{11}}{\partial q^i}-g^{i1}\frac{\partial g_{i1}}{\partial q^1}\right), \tag{13}$$

де $\Phi(x,y)$ – довільна безперервна за кожним аргументом функція.

При деяких досить загальних обмеженнях на $\Phi(x,\ y)$ теорема про неявну функцію дозволяє розв'язати (12) щодо другого аргументу функції Φ:

$$V^1e^{вq^1}=f\left(вt+\frac{1}{V^1}\right), \tag{14}$$

де f – деяка функція.

Розглянутий спосіб формування ХДВ припускає зосередження всієї "субстанції" у початковий момент часу (t = 0) в одній точці простору (q^1 = 0). З початкових умов $t = 0$, $q^1 = 0$ з (14) легко одержуємо $f(x)=1/x$, і шукане поле швидкостей у ССК має вигляд:

$$V^1=\frac{\left(e^{вq^1}-1\right)}{вt}, \tag{15}$$

$$V^2=V^3\equiv 0,$$

де $в$ відповідає (13).

При описі хмар обмеженої довжини (за десятки кілометрів) зручно експоненту в чисельнику (15) розкласти в ряд, обмежуючись лінійним членом та квадратичним, котрим головним чином враховується нелінійність. Наближені формули для поля швидкостей мають вигляд:

$$V^1\approx\frac{q^1}{t}\left(1+\frac{1}{2}вq^1\right). \tag{16}$$

$$V^2=V^3\equiv 0.$$

Рівняння (7) для поля щільності в ССК має вигляд:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+V^1\frac{\partial\rho}{\partial q^1}+\rho\left(\frac{\partial V^1}{\partial q^1}+\Gamma^1_{11}V^1\right)=0. \tag{17}$$

Його загальний інтеграл виражається кінцевим рівнянням:

$$\Phi\left(\frac{1}{t}e^{\int\frac{dq^1}{V^1t}},\ \rho V^1te^{\int\Gamma^1_{11}dq^1},\ q^2,q^3\right)=0, \tag{18}$$

де Φ – довільна диференційовна функція.

Щільність $\rho=\dfrac{\partial^3N}{\partial q^1\partial q^2\partial q^3}$ віднесена до узагальнених координат. Для одержання щільності $n=\dfrac{\partial^3N}{\partial x^1\partial x^2\partial x^3}$, віднесеної до фізичних декартових координат, що означає кількість диполів, які припадають на одиницю об'єму в м^3, варто врахувати перетворення „об'ємів" за допомогою якобіана $I=\left|\dfrac{D\left(x^1,x^2,x^3\right)}{D\left(q^1,q^2,q^3\right)}\right|$. Використовуючи теорему про неявну функцію (функція Φ, вважаємо, теоремі відповідає) для виразу ρ з (18) і якобіана I, одержуємо формулу для щільності у вигляді:

$$n(t,q^1,q^2,q^3)=\frac{1}{V^1 tI}e^{-\int \Gamma_{11}^1 dq^1}\times f\left(\frac{1}{t}e^{\int \frac{dq^1}{V^1 t}},q^2,q^3\right), \tag{19}$$

де f – деяка функція.

У ССК формула (19) спрощується за рахунок рівності:

$$e^{-\int \Gamma_{11}^1 dq^1}=e^{\int \frac{dq^1}{V^1 t}}. \tag{20}$$

Щоб використовувати щільність можливості спеціального вибору системи координат q^1,q^2,q^3, спростимо (19) за допомогою співвідношень:

$$-\int \Gamma_{11}^1 dq^1=\int \frac{dq^1}{V^1 t}, \tag{21}$$

$$e^{\int \frac{dq^1}{V^1 t}}=q^1. \tag{22}$$

Ці співвідношення випливають зі сталості $V^1-\mathrm{const}$ вздовж траєкторій у хмарі, що є властивістю ССК як „сферичного" перетворення системи координат, у якій траєкторії є геодезичними. Справді, зі сталості V^1 вздовж траєкторії випливає $q^1=V^1 t$, з іншого боку, $dV^1=-\Gamma_{11}^1 V^1 dq^1$ $\left(V^2=V^3\equiv 0\right)$, звідки і випливає (21), (22).

Після заміни $V^1={q^1}/{t}$ за допомогою (21), (22) з (19) маємо:

$$n(t,q^1,q^2,q^3)=\frac{1}{It}f\left(\frac{q^1}{t},q^2,q^3\right). \tag{23}$$

2.2. Окремі випадки розв'язання рівнянь

Для моделювання кореляційної матриці перешкод згідно з (9), (10) необхідно задати функцію $f(\alpha,\beta,\gamma)$, визначальну згідно з (23) у спеціальній системі координат розподіл диполів за простором в кожен момент часу t. Практичне задання f повинне спиратися на фізичний зміст цієї функції. Він стає зрозумілий, якщо одержати вираз для поля щільностей стосовно до найпростішої хмари, сформованої, як і раніше, шляхом одноразового викиду з однієї точки космічного простору у всіх напрямках, але розміри якої малі настільки, що траєкторії диполів у межах хмари можна вважати прямолінійними. Тоді в якості ССК виступає звичайна сферична система координат $q^1=r,\ q^2=\varphi,\ q^3=\theta$ з початком у центрі хмари. Задамося функцією розподілу диполів за швидкостями у заданому напрямку $n_V(\upsilon,\varphi,\theta)$, де υ – модульне значення швидкості поступального руху в напрямку, що задається кутами $\varphi,\ \theta$. Ця функція є характеристикою пристрою розкиду диполів (ПРД). Використовуючи якобіан перетворення декартових координат у сферичні $I=r^2\cos\theta$, легко одержати зв'язок поля щільностей на момент часу t з функцією розподілу за швидкостями. Вона виражається формулою:

$$n(t,r,\varphi,\theta)=\frac{n_V(\upsilon,\varphi,\theta)}{r^2 t\cos\theta}. \tag{24}$$

У (23) $V^1={q^1}/{t}$, з іншого боку, V^1в ССК збігається з модулем швидкості (тому що $V^2=V^3\equiv 0$), тобто $V^1=\upsilon$. Порівняння (23) і (24) прояснює зміст довільної функції f. Вона є характеристикою ПРД і означає щільність розподілу диполів за швидкостями з кількості диполів, що припадають на одиничні інтервали по другій (q^2) і третій (q^3) узагальнених координатах.

Пояснимо вищевикладене на найпростіших прикладах.

Приклад 1: сферична хмара обмеженої довжини з рівномірною щільністю диполів за простором.

Спеціальною СК є "звичайна" сферична з координатами r,φ,θ. Компоненти метричного тензора для сферичних координат $g_{11}=1$, $g_{i1}=0$, $i\neq 1$, і з (13) $в\equiv 0$. Тому поле швидкостей тривіальне:

$$V^1=\upsilon=\frac{r}{t}. \tag{25}$$

Щільність n у межах хмари від координат не залежить (у міру запропонованої однорідності поля n). Залежність від часу поля n одержуємо з інтегрального рівняння:

$$\oint ndV=N-\mathrm{const}, \tag{26}$$

що означає фіксовану сумарну кількість диполів у хмарі в будь-який момент часу (інтегрування ведеться за об'ємом, займаним хмарою). Розрахунки дають поле:

$$n(t,r,\varphi,\theta)=\begin{cases}\dfrac{N}{\frac{4}{3}\pi(V_ot)^3}, & 0<r\le V_0t,\\ 0, & r>V_ot,\end{cases} \tag{27}$$

де V_0 – максимальна швидкість диполів у хмарі.

Підстановкою (27) у (24) одержуємо розподіл за швидкостями, що забезпечує рівномірну щільність диполів у просторі в будь-який момент часу. Виявляється, що для цього ПРД повинен бути таким, щоб кількість диполів, що викидаються ним з заданими швидкостями, росла пропорційно до квадрата швидкості.

Приклад 2: сферична хмара обмеженої довжини з рівномірною щільністю за швидкістю.

Аналогічним шляхом приходимо до поля щільності:

$$n(t,r,\varphi,\theta)=\begin{cases}\dfrac{N}{4\pi V_0r^2t}, & 0<r\le V_0t,\\ 0, & r>V_ot,\end{cases} \tag{28}$$

яка змінюється обернено пропорційно до часу і у будь-який момент часу – обернено пропорційно до квадрата відстані від центра хмари за умови, якщо ПРД забезпечує рівномірний розподіл за швидкістю до V_0.

Таким чином, практичний спосіб моделювання змінної в часі щільності розподілу диполів та очікуваної відповідної цій щільності та поля швидкостей кореляційної матриці перешкод полягає у визначенні щільності розподілу диполів за швидкостями у кожному кутовому напрямку, виходячи з технічних характеристик конкретного пристрою розкиду диполів, розрахунку поля щільностей (23), розрахунку поля швидкостей (15) або (16) з наступною підстановкою в (9). Зазначені кроки робляться в спеціальній системі координат, що є „сферичним" перетворенням еліпсоїдальної системи координат (див. п. 3).

3. Спеціальна система координат. Існування і побудова

3.1. Теорема існування

Нехай задане поле швидкостей поступального руху з початку координат $\eta^1=\eta^2=\eta^3=0/t=0$ у деякій області D_x тривимірного багатовиду R^3 у вигляді поля тензора $V^i(t,\eta^1,\eta^2,\eta^3)$, а система координат η^i на багатовиді така, що траєкторії руху є геодезичними в ній. Така система координат завжди існує [4]. Нехай далі задано відображення області $D_\eta\in R^3$ на область $D_q\in R^3$ за допомогою системи невироджених перетворень:

$$\begin{aligned}\eta^1&=q^1\cos q^2\cos q^3,\\ \eta^2&=q^1\sin q^2\cos q^3,\\ \eta^3&=q^1\sin q^3.\end{aligned} \tag{29}$$

Справедлива наступна **теорема.** У системі координат q^1,q^2,q^3 поле $V^i\left(q^1,q^2,q^3\right)$ всюди в області D_q має компоненти:

$$V^{1'} = \upsilon(q^1, q^2, q^3),$$
$$V^{2'} = V^{3'} \equiv 0, \tag{30}$$

де υ – деяка функція, що не дорівнює нулеві в D_q тотожно.

Лема. У всій області визначення поля $V^i(t, x^1, x^2, x^3)$ в будь-який момент часу t має місце співвідношення:

$$\frac{\eta^1}{V^1} = \frac{\eta^2}{V^2} = \frac{\eta^3}{V^3}. \tag{31}$$

Доказ. Система координат η^i така, що траєкторії в ній є геодезичними. Тому V^i вздовж траєкторій не міняється і

$$\eta^i = \int V^i dt = V^i t + \xi_o^i, \tag{32}$$

де інтеграл береться за траєкторією. За умовою поле $V^i(t, \eta^1, \eta^2, \eta^3)$ таке, що при $t = 0$ $\eta^1 = \eta^2 = \eta^3 = 0$, звідки

$$\xi_o^i = 0, i = 1, 2, 3. \tag{33}$$

З (32), (33) випливає (31). *Лема доведена.*

Доказ теореми. За допомогою співвідношень (31) і системи перетворень (29) виразимо компоненти V^2 і V^3 через V^1. Одержимо:

$$V^2 = V^1 \times \text{tg}\ q^2,\ V^3 = V^1 \times \frac{\text{tg}\ q^3}{\cos\ q^2}. \tag{34}$$

Закон перетворення контраваріантних координат V^i при зміні системи координат загальновідомий [4]:

$$V^{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial q^{i'}} V^i. \tag{35}$$

У матричній формі компоненти $V^{i'}$ в новій системі координат q^1, q^2, q^3 з використанням (30) і (34) відповідно до формули (35) виражаються добутком:

$$\begin{pmatrix} \cos q^2 \cos q^3 & \sin q^2 \cos q^3 & \sin q^3 \\ -q^1 \sin q^2 \cos q^3 & q^1 \cos q^2 \cos q^3 & 0 \\ -q^1 \cos q^2 \sin q^3 & -q^1 \sin q^2 \sin q^3 & q^1 \cos q^3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ \text{tg}q^2 \\ \dfrac{\text{tg}q^3}{\cos q^2} \end{pmatrix} \times V^1 = \begin{pmatrix} V^{1'} \\ V^{2'} \\ V^{3'} \end{pmatrix}. \tag{36}$$

Перемножуючи матриці в (36), шляхом безпосереднього обчислення одержуємо:

$$V^{1'} = V^1 \left(\cos q^2 \cos q^3 + \sin q^2 \cos q^3 \text{tg} q^2 + \frac{\sin q^3}{\cos q^2} \times \text{tg} q^3 \right) = \upsilon(q^1, q^2, q^3) \neq 0,$$

$$V^{2'} = V^{3'} \equiv 0.$$

Теорема доведена.

3.2. Побудова спеціальної системи координат

Доведена теорема дає практичний спосіб побудови спеціальної системи координат такий, що всі компоненти вектора швидкості поступального руху в хмарі дипольних відбивачів всюди дорівнюють нулеві, крім першої, за умови найпростішого способу формування ХДВ у космосі – шляхом одноразового викиду відбивачів у всіх напрямках із точки перебування ПРД у момент викиду.

Вважатимемо, що диполі в навколоземному космічному просторі рухаються за кеплерівськими (еліптичними) траєкторіями (розрахунки й експериментальні дані показують [7], що відхилення реальних траєкторій від кеплерівських за траєкторними параметрами лежать у межах одиниць відсотків). Тоді як систему координат η^1, η^2, η^3 з геодезичними лініями траєкторій варто використовувати еліпсоїдальну систему координат, пов'язану з геоцентричною декартовою x^1, x^2, x^3 системою перетворень:

$$
\begin{aligned}
x^1 &= -\left(\eta^2 + a_o\right) k \sin\omega\left(\eta^1 + t\right)\cos\omega\left(\eta^3 + t\right),\\
x^2 &= \left(\eta^2 + a_o\right)\cos\omega\left(\eta^1 + t\right)\cos\omega\left(\eta^3 + t\right) + a_o\varepsilon,\\
x^3 &= \left(\eta^2 + a_o\right) k \sin\omega\left(\eta^3 + t\right),
\end{aligned}
\tag{37}
$$

де a_0, k, ε – велика піввісь, коефіцієнт еліптичності й ексцентриситет еліпса траєкторії центра ХДВ відповідно.

Для моделювання просторово-швидкісного розподілу диполів у ХДВ з використанням отриманих формул для спеціальної системи координат слід розташовувати можливістю перерахування з необхідної системи координат у ССК як координат точок простору, так і компонентів вектора швидкості поступального руху. Перерахування координат з декартової геоцентричної x^1, x^2, x^3 в ССК q^1, q^2, q^3 і назад здійснюється послідовним застосуванням перетворень (37), (29). Тензорний закон перетворення компонентів швидкості V^i при перетворенні координат (35) загальновідомий.

Висновки

1. Просторово-швидкісний розподіл пасивних перешкод є вихідною базою для оцінювання просторово-часової кореляційної матриці перешкод і вагової вектор-функції, що забезпечують організацію оптимальної вагової обробки радіолокаційних сигналів на тлі пасивних перешкод. Компактна аналітична модель просторово-швидкісного розподілу полегшує практичну побудову алгоритму вагової обробки, погодженого з характеристиками конкретної перешкоди, а також аналіз його якості за показниками коефіцієнта використання енергії корисного сигналу та коефіцієнта енергетичного виграшу.

2. Опис хмари пасивних, зокрема дипольних відбивачів у космосі у вигляді механічного суцільного середовища дозволяє використовувати при вивченні механічних та геометричних властивостей хмари зручний математичний апарат диференціального обчислення.

Зручність апарата полягає у можливості одержання основних механіко-геометричних властивостей хмари переважно аналітичним шляхом: законів розподілу пасивних відбивачів у просторі з часом і законів розподілу їхніх швидкостей у просторі з часом. Ці закони описуються залежними від часу полем швидкостей поступального руху та полем щільностей відбивачів у кожній точці простору. Аналітичний опис закономірностей динаміки формування та руху хмар пасивних відбивачів є теоретичною базою для вивчення їхніх аналітичних властивостей та зміни в часі геометричних структур і, як наслідок, для вивчення електричних властивостей системи відбивачів у вигляді хмар поза атмосферою. Рівняннями, що описують закономірності зміни цих полів у часі в спеціальній криволінійній системі координат, є векторні рівняння поля швидкостей поступального руху в хмарі та скалярне рівняння зв'язку поля швидкостей і поля щільностей просторової концентрації відбивачів у хмарі (векторне рівняння розуміється як система рівнянь).

3. Поле швидкостей поступального руху відбивачів і поле щільностей їхньої просторової концентрації в кожен момент часу є розв'язками згаданих рівнянь, для одержання яких в аналітичному вигляді доцільно використовувати спеціальні системи координат, у яких векторне рівняння поля швидкостей набуває скалярну форму щодо одного компонента вектора швидкості при тотожній рівності нулеві інших. Якщо обмежитися розглядом найпростішого типу хмар, утворених їхнім формуванням шляхом розльоту відбивачів з єдиної точки простору у всіх напрямках із загальним моментом початку руху, то така спеціальна система координат завжди існує. Аналіз властивостей більш складних типів хмар, утворених шляхом „злиття" у просторі з часом „елементарних" хмар, сформованих кожен зі свого центра як суперпозиції останніх, складності не становить і тому окремо не розглянутий.

4. Для хмар „елементарного" типу (при одноразовому їхньому формуванні шляхом розльоту у всіх напрямках з єдиного центра) та їхньої суперпозиції у всіляких комбінаціях у спеціальній системі координат аналітичні розв'язки рівнянь поля швидкостей і зв'язку поля швидкостей і поля щільностей завжди існують.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Ширман Я.Д., Манжос В.Н.* Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех. – М.: Радио и связь, 1981. – 416 с.
2. *Ловенар.* РЛС ПРО: миф или реальность // Зарубежная радиоэлектроника. – 1970. – № 10. – С. 3–16.
3. *Великанов В.Д. и др.* Радиотехнические системы в ракетной технике. – М.: Воениздат, 1974. – 340 с.
4. *Рашевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. – М.: Наука, 1967. – 664 с.
5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: Учебное пособие. В 10 т. Т.6. Гидродинамика. – 3-е изд. перераб. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1986. – 736 с.
6. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969. – 424 с.
7. *Шапиро, Джонс, Перкинс.* Орбитальные свойства пояса диполей проекта West Ford // Труды Института инженеров по электронике и радиоэлектронике. – 1964. – № 5. – С. 495–547.

ПІЛЬКЕВИЧ Ігор Анатолійович – кандидат технічних наук, доцент кафедри фінансів Відокремленого підрозділу Європейського університету у м. Житомирі.

Наукові інтереси:
- математичне моделювання складних систем;
- обробка радіолокаційної інформації на фоні перешкод.

Подано 20.07.2003