УДК 621.391

Р.В. Петросян, асист.
Житомирський державний технологічний університет

СПЕКТРАЛЬНИЙ АНАЛІЗ НАПРУГИ В ЕЛЕКТРИЧНІЙ МЕРЕЖІ

(Представлено д.т.н. проф. Манойловим В.П.)

Запропоновано метод швидкого перетворення Хартлі, що дозволяє зменшити час виконання перетворення. Перетворення Хартлі дає змогу здійснювати обробку дійсної послідовності в дійсній області (зокрема напруги електричної мережі). Також запропоновано метод формування векторів повороту.

Спектральний аналіз останнім часом знаходить все більше застосування майже у всіх галузях. Значною мірою це пояснюється зростаючою доступністю цифрових інтегральних мікросхем (мікроконтролери, цифрові сигнальні процесори, програмувальні логічні схеми й т.ін.), що мають малі розміри, невелику споживану потужність, високу завадостійкість і надійність.

Для вирішення поставленої задачі використовуються спеціальні алгоритми реалізації дискретного перетворення Фур'є (ДПФ). Типовими алгоритмами є швидкі перетворення Фур'є (ШПФ), що дозволяють на порядок знизити обчислювальні витрати. Це, в свою чергу, позитивно позначається на таких показниках технічних засобів як собівартість, надійність, габарити, вага.

На сьогодні відомо досить багато алгоритмів ШПФ (Кулі-Тьюки, Гуда-Томаса, Винограда та ін. [1–6]), що мають різні характеристики. Найбільшого поширення знайшли алгоритми з основою 2 [1–6]. Хоча вони і вимагають більше обчислювальних витрат, ніж деякі інші алгоритми [2–4], проте їхня реалізація значно простіша. Це й обумовлює їх широке поширення.

Перетворення Фур'є здійснює відображення дійсної функції в комплексну область. У багатьох випадках обробку дійсних функцій краще виконувати в дійсній області, крім того, робота з дійсними функціями простіша, ніж з комплексними. Для цих цілей у 1942 р. було запропоноване перетворення, яке потім було названо на честь його автора Р.Хартлі, що здійснює такий перехід [2, 7]:

$$H(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\,\mathrm{cas}\left(\frac{2\pi}{N}nk\right), \qquad (1)$$

де $h(n)$ – дійсна вхідна функція;

$\mathrm{cas}\left(\frac{2\pi}{N}nk\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}nk\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{N}nk\right)$ – функція Хартлі.

Особливість даного перетворення в тім, що можна здійснити перехід від перетворення Хартлі до перетворення Фур'є відповідно до співвідношення:

$$\mathrm{Re}\,F(k) = \frac{H(k) + H(N-k)}{2}; \qquad (2)$$

$$\mathrm{Im}\,F(k) = \frac{H(k) - H(N-k)}{2}, \qquad (3)$$

де $\mathrm{Re}\,F(k)$ – дійсна частина перетворення Фур'є,

$\mathrm{Im}\,F(k)$ – уявна частина перетворення Фур'є.

Дане перетворення більше 40 років не знаходило застосування. У 1984 р. Р.Н. Брейсуеллом було запропоновано швидке перетворення Хартлі (ШПХ) для (1), що обумовило широке впровадження для вирішення багатьох задач [7].

Залежно від використовуваних засобів реалізації, одні перетворення можуть виявитися більш ефективними, інші – менш. При програмній реалізації алгоритму ефективність буде залежати:

1) від кількості арифметичних операцій (у більшості випадків – від кількості операцій множення, тому що найчастіше час виконання операції множення перевищує час виконання операції додавання);
2) від складності реалізації алгоритму (відомі випадки, коли алгоритм вимагає малих обчислювальних витрат, але складність реалізації даного алгоритму не дозволяє ефективно його реалізувати [2]);

3) від кількості використовуваних звертань до комірок пам'яті (час виконання операції регістр–пам'ять завжди більший, ніж час виконання операції регістр–регістр).

При побудові алгоритму ШПХ використовувалися ті самі ідеї, що і при побудові алгоритму ШПФ з основою 2. У результаті вираз (1) прийняв такий вигляд [7]:

$$H(k) = H(k)_1 + H_2(k)\cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right) + H_2(N-k)\sin\left(\frac{2\pi}{N}k\right). \quad (4)$$

Основна неприємність, що зустрічаються при реалізації алгоритму ШПХ, полягає в тім, що необхідно вживати додаткових заходів для реалізації алгоритму із заміщенням. Тому якість алгоритму ШПХ більшою мірою залежить від способу реалізації, ніж ШПФ.

Також важливим питанням є формування значень косинусів і синусів (векторів повороту). Найбільш поширений рекурсивний вираз [2, 4, 5, 7]:

$$W^{r+1} = W^r W^1, \quad (5)$$

де $W^r = \cos\left(\frac{2\pi}{N}r\right) - j\sin\left(\frac{2\pi}{N}r\right)$.

Для знаходження всіх відліків векторів поворотів необхідно послідовно виконувати комплексні операції множення. Для знаходження кожного відліку вектора повороту потрібно чотири операції множення і дві операції додавання.

Існують й інші методи формування. Так, у [8] запропоновано метод, що дозволяє реалізувати вектор повороту за три операції множення і три операції додавання; це дає змогу зменшити час виконання даної операції, тому що час виконання операції множення перевищує час виконання додавання. Але даний метод не знайшов широкого застосування через необхідність наявності значень тангенсів. При реалізації ШПФ ця необхідність відсутня.

Для спектрального аналізу напруги в електричній мережі може використовуватися як ШПФ, так і ШПХ. Оскільки досліджуваний сигнал дійсний, то більш вдалим рішенням є застосування ШПХ. Хоча методи ШПФ і ШПХ існують, питання про їхню розробку на сьогодні залишається відкритим. При реалізації пристрою вимірювання параметрів якості електроенергії крім спектрального аналізу може проводитись вимірювання й інших параметрів, тому швидкодія алгоритму ШПХ і відіграє не останню роль. Таким чином, необхідно розробити метод ШПХ, що задовольняє такі умови:

1) мінімум арифметичних операцій;
2) простота реалізації (дозволить розширити спектр застосовуваної елементної бази).

Застосування алгоритму для побудови приладів вимірювання якості електричної енергії дозволить знизити ціну на даний клас приладів, які на сьогодення майже відсутні на вітчизняному ринку.

Для простоти пояснення розглянемо алгоритм у комплексній формі, а потім здійснимо спрощення, що дозволяють його реалізувати в дійсній формі.

Нехай маємо вхідну послідовність $x(n)$, $n = 0,..,N-1$, де $N = 2^s$. Перетворимо дійсну вхідну послідовність $x(n)$ у комплексну $f(n)$ за таким алгоритмом:

$$f(n) = x(n) + x(N-n) + j(x(n) - x(n-N)). \quad (6)$$

Далі здійснимо проріджування за частотою [3–6]. Для прикладу будемо використовувати 16-точкове перетворення функції вигляду:

$$x(t) = 3 + \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + 2\cos\left(2\omega t - \frac{\pi}{10}\right) - 3,3\cos\left(4\omega t + \frac{\pi}{5}\right) + 1,6\sin\left(7\omega t + \frac{\pi}{3}\right). \quad (7)$$

Усі результати поетапного виконання перетворення ШПФ представлені в табл. 1. Як бачимо, отримані значення $f(n)$ і $f(N-n)$ комплексно спряжені.

Перший етап виконується відповідно до виразів:

$$F(2k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} (f(n) + f(n + N/2))W^{2nk}; \quad (8)$$

$$F(2k+1) = \sum_{n=0}^{N/2-1} (f(n) - f(n + N/2))W^{n}W^{2nk}, \quad (9)$$

де $k = 0,..,N/2-1$.

Після виконання першого етапу (табл. 1) знову одержуємо комплексно спряжені елементи, але тепер комплексно спряженими між собою є перші 8 елементів та також другі 8 елементів. Це відбулося через такі обставини:

$$f(n) - f(n + N/2) = -(f(N/2 - n) - f(N - n)), \tag{10}$$

$$W^{n} = -W^{N/2-n}. \tag{11}$$

Таблиця 1

Вхід	ШПФ						Вихід
x(n)	f(n)	I етап	II етап	III етап	IV етап	Двійкова інверсія	X(k)
4,325104	8,650209 +j0	8,929428 +j0	2,641951 +j0	48 +j0	96 +j0	96 +j0	48 +j0
6,671566	7,436227 +j5,90690	17,379988 +j9,50682	24 +j15,5175	48 +j0	0 +j0	22,627417 +j0	5,65685 -j5,65685
7,701901	14,299104 +j1,10469	22,679024 +j2,47213	45,358049 +j0	-42,71609 +j0	-11,68103 +j0	40,322352 +j0	15,21690 -j4,94427
1,285049	2,790679 -j0,22058	6,620012 -j6,01070	24 -j15,5175	31,035061 +j0	-73,75116 +j0	0 +j0	0 +j0
-1,664762	-3,143738 -j0,18578	-6,287476 +j0	15,216904 +j0	20,161176 +j0	40,322352 +j0	-11,68103 +j0	-21,35805 -j15,517
4,809727	3,829333 +j5,79012	6,620012 +j6,01070	10,080588 -j5,13631	20,161176 +j0	0 +j0	0 +j0	0 +j0
3,506241	8,37992 -j1,36743	22,679024 -j2,47213	4,944272 +j0	10,272632 +j0	0 +j0	0 +j0	0 +j0
3,171918	9,943761 -j3,59992	17,379988 -j9,50682	10,080588 +j5,13631	-10,27263 +j0	20,545265 +j0	34,97025 +j0	11,08512 -j6,4
0,13961	0,279219 +j0	8,37099 +j0	7,999417 +j0	15,998834 +j0	22,627417 +j0	0 +j0	0 +j0
6,771843	9,943761 +j3,59992	-1,433817 +j3,09096	3,314292 +j0	6,628583 +j0	9,37025 +j0	9,37025 +j0	11,08512 +j6,4
4,87368	8,37992 +j1,36743	3,999708 -j4,37128	7,999417 +j0	0 +j0	0 +j0	0 +j0	0 +j0
-0,980394	3,829333 -j5,79012	4,748108 +j3,09096	3,314292 +j0	0 +j0	0 +j0	0 +j0	0 +j0
-1,478976	-3,143738 +j0,18578	-0,371573 +0	8,742563 +j0	0 +j0	0 +j0	-73,75116 +j0	-21,35805 +j15,517
1,50563	2,790679 +j0,22058	4,748108 -j3,09096	0 +j8,74256	0 +j0	0 +j0	0 +j0	0 +j0
6,597203	14,299104 -j1,10469	3,999708 +j4,37128	-8,742563 +0	17,485125 +j0	34,97025 +j0	20,545265 +j0	15,21690 +j4,9442
0,764661	7,436227 -j5,90690	-1,433817 -j3,09096	0 -j8,74256	17,485125 +j0	0 +j0	0 +j0	5,65685 +j5,6568

Аналогічні результати одержимо для всіх етапів. На виході маємо дійсну послідовність, що відповідає перетворенню Хартлі з точністю до множника 2. Для одержання гармонічних складових необхідно виконати перетворення відповідно до виразів (2), (3), замінивши коефіцієнт 2 на 4. Оскільки в результаті перетворень елементи виходять комплексно спряженими з виразів (10), (11), то немає необхідності виконувати два комплексних множення, а достатньо одного. Також не обов'язково зберігати всі елементи.

Особливість даного алгоритму в тому, що перетворення Хартлі представлене в комплексній формі, а це дозволяє зробити додаткові спрощення. Відомо, що найбільш вдалим алгоритмом ШПФ з основою 2 є алгоритм Рейдера-Бреннера [3, 4]. Використовуючи аналогічний підхід і враховуючи, що частина даних комплексно спряжена, алгоритм виконання ШПХ зведемо до таких дій.

1. Записати нову послідовність відповідно до:

$$f(n) = x(n) + x(N-n), \tag{12}$$

де $n = 0,.., N/2$, а для інших

$$f(N-n) = x(n) - x(N-n). \tag{13}$$

2. Виконати перетворення:

$$a(n) = f(n) + f(N/2-n), \tag{14}$$

$$a(N/2-n) = f(N-n) - f(N/2+n), \tag{15}$$

де $n = 0,.., N/4$.

$$a(n+N/2) = \frac{f(n)-f(N/2-n)}{2\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)}, \tag{16}$$

$$a(N-n) = \frac{f(N/2+n)+f(N-n)}{2\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)}, \tag{17}$$

де $n = 0,.., N/4-1$. Далі члени $a(N/2)$ і $a(3N/4)$ обробляються окремо.

3. Далі розбити отриману послідовність на дві, аналогічно проріджуванню по частоті, і виконати пункт 2 для кожної з послідовностей. Операцію виконувати до остаточного розкладання.

4. Для непарних складових зробити відновлення

$$F(2k+1) = A(k) + A(k+1) + f(0) - f(N/2) - j(-1)^k (f(N/4) - f(3N/4)). \tag{18}$$

5. Виконати двійково-інверсну перестановку.

6. Здійснити перехід до гармонічних складових.

У табл. 2 наведені дані про кількість арифметичних операцій для стандартного перетворення Хартлі й для запропонованого.

Таблиця 2

	Стандартне ШПХ		Запропоноване ШПХ	
N	Кількість нетривіальних множень	Кількість додавань	Кількість нетривіальних множень	Кількість додавань
32	68	194	34	288
64	196	482	98	704
128	516	1154	258	1664
256	1284	2690	642	3840
512	3076	6146	1538	8704

Дане перетворення має меншу кількість операцій множення (50 %), але приблизно на 30 % більше операцій додавання, що дозволяє виграти у швидкості на більшості ЕОМ.

Для одержання значень вектора повороту скористаємося рекурентним співвідношенням для складання багаточленів Чебишева, записаним через тригонометричні функції [9]:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{N}(r+m)\right) = 2\cos\left(\frac{2\pi}{N}m\right)\cos\left(\frac{2\pi}{N}r\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{N}(r-m)\right). \tag{19}$$

Аналогічний вираз можна одержати для синусів:

$$\sin\left(\frac{2\pi}{N}(r+m)\right) = 2\cos\left(\frac{2\pi}{N}m\right)\sin\left(\frac{2\pi}{N}r\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{N}(r-m)\right). \tag{20}$$

Якщо скласти вираз (19) і вираз (20), помножений на j, то будемо мати:

$$W^{r+m} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{N}m\right)W^r - W^{r-m}. \tag{21}$$

При $m = 1$ в (21) одержимо вираз, еквівалентний (5):

$$W^{r+1} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{N}\right)W^r - W^{r-1}. \tag{22}$$

Але він потребує лише два дійсних множення і дві операції додавання. Множення на 2 замінюється операцією зсуву, або відразу задається подвоєне значення косинуса.

Висновки. Аналіз показав, що отримані вирази для ШПХ і вектора повороту мають меншу кількість арифметичних операцій; операції виконуються тільки з дійсними числами; дозволяють зменшити кількість звертань до комірок пам'яті за рахунок зменшення кількості циклів.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н.* Цифровая обработка сигналов: Справочник. – М.: Радио и связь, 1985. – 312 с.
2. *Задирака В.К., Мельникова С.С.* Цифровая обработка сигналов. – К.: Наукова думка, 1993. – 294 с.
3. *Нуссбаумер Г.* Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток: Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1985. – 248 с.
4. *Блейхут Р.* Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов: Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 448 с.
5. *Оппенгейм А.В., Шафер Р.В.* Цифровая обработка сигналов: Пер. с англ. / Под ред. С.Я. Шаца. – М.: Связь, 1979. – 416 с.
6. Обробка сигналів: Підручник / В.П Бабак, В.С. Хандецький, Е.Шрюфер. – К.: Либідь, 1996. – 392 с.
7. *Брейсуэлл З.* Преобразование Хартли: Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 175 с.
8. *Bunеman O.* Inversion of the Helmholtz (or Laplace-Poisson) Operator for Slab Geometry, J.Computational Phys. – Vol. 12. – 1973. – P. 124–130.
9. *Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З.* Численные методы анализа. – М.: Физматгиз, 1963. – 400 с.

ПЕТРОСЯН Руслан Валерійович – асистент кафедри автоматики й управління в технічних системах Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:
- мікропроцесорна техніка та системне програмування;
- цифрова обробка сигналів;
- вимірювальна техніка;
- теорія автоматичного управління;
- розробка електронних пристроїв.

E-mail: e_rvs@ukr.net

Подано 31.10.2003