УДК 539.12.127

В.А. Салогуб, к.ф.-м.н., доц.
Житомирський державний технологічний університет

ГАМІЛЬТОНОВА ФОРМА НЕРЕЛЯТИВІСТСЬКИХ ХВИЛЬОВИХ РІВНЯНЬ В П'ЯТИВИМІРНОМУ ПРОСТОРІ МІНКОВСЬКОГО

Нерелятивістські хвильові рівняння, типу рівнянь Леві-Леблонда, інваріантні відносно групи де Сіттера та розширеної групи Галілея, приведені до форми, яка не містить "зайвих" компонент. Ці ж рівняння перетворені до гамільтонової форми. В явному вигляді знайдений гамільтоніан частинки.

Починаючи з 1928 року, коли П.А.М. Дірак записав своє знамените рівняння [1], яке описує рух електрона і позитрона в електромагнітному полі, і до цього часу проводяться інтенсивні дослідження хвильових рівнянь для частинок з високими спінами. Це пов'язано з тим, що протягом останніх десятиріч експериментально відкриті частинки з високими спінами $S = 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots, \frac{11}{2}$, які називаються резонансами.

Тривалий час опис цих частинок проводили лише з допомогою релятивістських хвильових рівнянь. При цьому вважалося, що деякі ефекти, пов'язані, наприклад, зі спіном частинки, можна послідовно описати лише в рамках релятивістської фізики.

В роботах Хагена та Герлі [2], Леві-Леблонда [3], В.І. Фущинча та його учнів [4, 5] було показано, що спін частинки не є чисто релятивістським феноменом, а опис руху зарядженої частинки з відмінним від нуля спіном в рамках нерелятивістської квантової фізики не менш повний, ніж дає релятивістська фізика.

Дуже цікавими і перспективними виявилися рівняння, інваріантні відносно неоднорідної групи де Сіттера $P(1,4)$ запропоновані в [6–9].

Використовуючи результати цих робіт в попередній роботі [10], автором було показано, що в п'ятивимірному просторі Мінковського можна записати хвильові рівняння типу рівнянь Леві-Леблонда [3], які одночасно інваріантні відносно групи де Сіттера та розширеної групи Галілея.

Ці рівняння мають вигляд:

$$L\Psi = 0, \tag{1}$$

де

$$L = \begin{pmatrix} \vec{\sigma}\vec{P} & \sqrt{2}M \\ -\sqrt{2}\tilde{P}_0 & -\vec{\sigma}\vec{P} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$\tilde{P}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(P_0 + P_4), \quad M = \frac{1}{\sqrt{2}}(P_0 - P_4),$$

$$P_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \quad P_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \quad P_4 = -i\frac{\partial}{\partial x_4},$$

$a = 1, 2, 3;$

σ_1, σ_2, σ_3 – двомірні матриці Паулі:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ x \end{pmatrix}, \tag{3}$$

а φ і x – двокомпонентні хвильові функції від просторових координат та часу.

Рівняння (1) описує рух нерелятивістської частинки зі спіном $S = \frac{1}{2}$. Як і в оригінальному рівнянні Леві-Леблонда [3], хвильова функція Ψ містить "зайві" компоненти, а гамільтоніан частинки не виділений в явному вигляді. Тому, на наш погляд, актуальними є такі задачі:

1) приведення рівняння (1) до форми, де хвильова функція не містить "зайвих" компонент;

2) виділення гамільтоніана частинки, яка описується рівнянням (1).

Розв'язуванню цих задач і присвячена дана робота.

1. Приведення рівнянь (1) до форми, яка не містить "зайвих" компонент

Для того, щоб привести рівняння (1) до форми, де хвильова функція не містить "зайвих" компонент, скористаємось методом ізометричних перетворень, що запропоновано нами в [11]. Аналогічно тому, як ми робили в [11] для рівнянь Хагена-Герлі, перетворимо Ψ та L:

$$\Psi \to \Psi' = V\Psi, \quad L \to L' = VLV^{-1} \tag{4}$$

за допомогою ізометричного оператора:

$$V = \begin{pmatrix} I & 0 \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{P}}{\sqrt{2}M} & I \end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\frac{\vec{\sigma}\vec{P}}{\sqrt{2}M} & I \end{pmatrix},$$

де $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – двомірні одиничні матриці.

Після цих перетворень рівняння (1) матиме вигляд:

$$L'\Psi' = 0, \tag{6}$$

де

$$L' = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}M \\ -\sqrt{2}\tilde{P}_0 + \frac{P^2}{\sqrt{2}M} & 0 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

$$\Psi' = \begin{pmatrix} \varphi' \\ x' \end{pmatrix}.$$

З рівняння (6) та явного виду L' і Ψ' (7) випливає, що "зайві" (нефізичні) компоненти хвильової функції тотожно рівні нулю:

$$x' \equiv 0,$$

а двокомпонентна хвильова функція φ' задовольняє рівнянню Шредінгера:

$$\tilde{P}_0\varphi' = \frac{P^2}{2M}\varphi'. \tag{8}$$

Таким чином, рівняння (1) перетворене до форми (6), де хвильова функція Ψ' не має "зайвих" компонент, а φ' задовольняє рівнянню (8).

2. Виділення гамільтоніана частинки

Для знаходження енергії частинки зручно користуватись хвильовими рівняннями, в яких явно виділений гамільтоніан. В операторі L біля $\tilde{P}_0$ стоїть сигнулярна матриця, тому знаходження гамільтоніана пов'язане з певними труднощами. Для виділення гамільтоніана скористаємось методикою, використаною нами в [12] при розв'язанні аналогічної задачі для рівнянь Хагена-Герлі [2].

Домноживши (1) на числову несингулярну матрицю

$$\beta_4 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

рівняння (1) запишемо в такому вигляді:

$$\left(\beta_0\tilde{P}_0 + (1-\beta_0)M + \frac{\sqrt{2}}{2}\beta_a P_a\right)\Psi = 0, \tag{9}$$

де $\beta_0 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $(1-\beta_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ – проектори на підпростори "верхніх" φ та "нижніх" x компонент хвильової функції Ψ, а матриця β_a подається формулою:

$$\beta_a = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_a \\ \sigma_a & 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Легко перевірити, що введені проектори задовольняють співвідношенням [12]:

$$\beta_0 + (1-\beta_0) = 1;\ \beta_0^2 = \beta_0;\ (1-\beta_0)^2 = (1-\beta_0);$$
$$\beta_0(1-\beta_0) = 0;\ \beta_0\beta_a = \beta_a(1-\beta_0);$$
$$(1-\beta_0)\beta_a = \beta_a\beta_0. \tag{11}$$

Згідно з [8] подіємо на (9) зліва проектором $(1-\beta_0)$:

$$\left((1-\beta_0)\beta_0\tilde{P}_0 + (1-\beta_0)^2 M + \frac{\sqrt{2}}{2}(1-\beta_0)\beta_a P_a\right)\Psi = 0. \tag{12}$$

Враховуючи (11) рівняння (12), перепишемо так:

$$\left((1-\beta_0)M + \frac{\sqrt{2}}{2}\beta_a P_a \beta_0\right)\Psi = 0, \tag{13}$$

або

$$(1-\beta_0)\Psi = -\frac{\sqrt{2}}{2M}\beta_a P_a \beta_0 \Psi. \tag{14}$$

Подіємо на (14) зліва оператором $\tilde{P}_0$:

$$(1-\beta_0)\tilde{P}_0\Psi = -\frac{\sqrt{2}}{2M}\beta_a P_a \beta_0 \tilde{P}_0 \Psi. \tag{15}$$

Подіємо на (9) зліва оператором β_0:

$$\left(\beta_0^2\tilde{P}_0 + \beta_0(1-\beta_0)M + \frac{\sqrt{2}}{2}\beta_0\beta_a P_a\right)\Psi = 0. \tag{16}$$

З урахуванням (11) рівняння (16) можна записати так:

$$\beta_0\tilde{P}_0\Psi = -\frac{\sqrt{2}}{2}\beta_a P_a (1-\beta_0)\Psi. \tag{17}$$

Якщо урахувати (17), то рівняння (15) перепишеться так:

$$(1-\beta_0)\tilde{P}_0\Psi = \frac{1}{2M}(\beta_a P_a)^2(1-\beta_0)\Psi. \tag{18}$$

Рівняння (9) запишемо так:

$$\beta_0\tilde{P}_0\Psi = \left(-(1-\beta_0)M - \frac{\sqrt{2}}{2}\beta_a P_a\right)\Psi. \tag{19}$$

Додавши почленно (18) і (19), одержимо хвильове рівняння в гамільтоновій формі:

$$\tilde{P}_0\Psi = H\Psi, \tag{20}$$

де гамільтоніан задається формулою:

$$H = \frac{1}{2M}(\beta_a P_a)^2(1-\beta_0) - \frac{\sqrt{2}}{2}\beta_a P_a - (1-\beta_0)M. \tag{21}$$

Оператор (21) є оператором енергії частинки, тому він може бути використаний для знаходження енергії частинки.

Хвильові функції, які є розв'язком рівняння (20), можуть бути використані для розрахунку густини ймовірності та середніх значень спостережувальних величин.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Dirac P.A.M.* Quantum theory of the electron // Proc. Roy. Soc. – 1928, A117. – P. 610–624.
2. *Hurley W.J.* Nonrelativistic Quantum Mechanics for Particles with Arbitrary Spin // Phys. Rev. – D. 1971, 3. – № 10. – P. 2339–2347.

3. *Levi-Leblond J.M.* Nonrelativistic Particles and Wave Equations // Comm. Math. Phys. 1967, 6. – P. 286–311.
4. *Fushchich V.I., Nikitin A.G., Salogub V.A.* On the Equations of Motions for Particles with Arbitrary Spin in Non-Relativistic Mechanics // Lett. Al Nuovo Cimento, 1975, 4. – № 3.– Ser. 2. – P. 483–488.
5. *Fushchich V.I., Nikitin A.G., Salogub V.A.* On the Non-Relativistic Mechanics Equations in the Hamiltonian For // Rep. On Math. Phys., 1978, 13, – №2, – P. 175–185.
6. *Фущич В.И., Кривский И.Ю.* О волновых уравнениях в 5-мерном пространстве Минковского // Препринт ИТФ. – К., 1968. – С. 68–72.
7. *Фущич В.И., Сокур Л.П.* Уравнения Баргмана-Вигнера на неоднородной группе де Ситтера // Препринт ИТФ. – К., 1969. – С. 69–83.
8. Со*кур Л.П.* Т-, Р-инвариантные уравнения в 5-мерном пространстве Минковского, УФЖ. – 1971, 15. – № 10. – С. 574–578.
9. *Сокур Л.П., Фущич В.И.* Об уравнениях движения, инвариантных относительно группы Р(1, n) // ТМФ. – 1971, 6. – № 3. – С. 348–363.
10. *Салогуб В.А.* Хвильові рівняння, інваріантні відносно розширеної групи Галілея в п'ятивимірному просторі Мінковського // Вісник ЖІТІ. – 2001. – № 11. – С. 3–5.
11. *Никитин А.Г., Салогуб В.А.* О преобразовании уравнений Хагена-Герли к форме, не содержащей лишних компонент // УФЖ. – 1975, 20. – № 10. – С. 1730–1732.
12. *Салогуб В.А.* Гамильтонова форма уравнений Хагена-Герли // УФЖ, 1976, 21. – № 5. – С. 846–850.

САЛОГУБ Віктор Анатолійович – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри фізики Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:
– дослідження теоретико-групових властивостей хвильових рівнянь квантової фізики.

Подано 06.12.2003