УДК 519.81:621.372

А.А. Засядько, к.т.н., доц.
Черкаський державний технологічний університет

МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ ВІДНОВЛЕННЯ СИГНАЛІВ ЗА ДОПОМОГОЮ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

В даній роботі задача відновлення сигналів, виражена інтегральним рівнянням Фредгольма першого роду, розв'язується на основі багатокритеріальної оптимізації. Запропоновані частинні критерії, на основі яких складено вектор ефективності, що являє собою нелінійну схему компромісів. Отримане рішення є оптимальним, тобто лежить в області Парето, і має переваги з точності над методом Тихонова.

Методи оптимізації як багатокритеріальні, так і однокритеріальні, дозволяють ефективно розв'язувати задачі досить широкого класу. У [1], [2], [4] досліджені різні методи оптимізації та наведені рекомендації з використання багатокритеріальної оптимізації. Використаємо підходи для багатокритеріальної оптимізації, запропоновані в [2], [4] для розв'язання некоректної задачі відновлення сигналів.

Задача відновлення сигналів може бути представлена інтегральним рівнянням Фредгольма першого роду (ІРФ) [3]:

$$\int_a^b Q(x,s)\cdot y(s)ds = f(x), x\in[c,d], s\in[a,b]. \tag{1}$$

Вирішити задачу відновлення сигналу для рівняння (1) – знайти вигляд сигналу $y(s)$, спотвореного вимірювальною апаратурою з апаратною функцією $Q(x,s)$ у сигнал $f(x)$. Існуючі методи розв'язку задачі відновлення сигналів [3], [7] використовують, як правило, регуляризацію, дуже чутливі до похибок результатів вимірів і не є універсальними, тому показують прийнятні результати відновлення для задач визначеного виду, при точних початкових умовах і при добре обумовлених системах рівнянь, до яких зводиться рівняння (1). У [6] введені критерії якості розв'язку рівняння (1), на підставі яких будується задача нелінійного програмування. Порівняння різних методів розв'язку по чисельній стійкості і точності показало придатність використання однокритеріальної оптимізації для розв'язку поставленої задачі.

1. Постановка задачі розв'язку ІРФ з використанням різних схем оптимізацій

Нехай задана множина можливих рішень Y, що складається з векторів $y=\{y_i\}_{i=1}^{n}$ n мірного евклідова простору. Необхідно визначити такий розв'язок $y^*\in Y$, що при заданих умовах і обмеженнях оптимізує розв'язок $y(s)$ рівняння (1).

Якість розв'язку рівняння (1) оцінимо сукупністю частинних критеріїв (або критеріїв якості), заданих функціоналами [3]:

$$I_j = \Phi_j[x,\ a,\ b,\ c,\ d,\ y], \tag{2}$$

де $j = 1, 2, 3, \ldots, r$; функції Φ_j мають безупинні частинні похідні по y. Частинні критерії (2) є компонентами r-мірного векторного критерію $I = (I_1, I_2, \ldots, I_r)$. Вектор частинних критеріїв обмежений припустимою областю: $I\in M$.

У [1] для розв'язку задач, що представляються диференціальними рівняннями, розглянуто декілька багатокритеріальних моделей. Відповідно до першої моделі багатокритеріальна задача, складена на основі частинних критеріїв (2), зводиться до мінімізації лінійної форми компонент скалярного критерію з постійними ваговими коефіцієнтами:

$$I^1 = \sum_{j=1}^{r}\alpha_j I_j, \tag{3}$$

де $a_j > 0$, $\sum_{j=1}^{r}\alpha_j = 1$. У випадку застосування моделі (3) виникає проблема вибору вагових коефіцієнтів a_j, $j=\overline{1,r}$. Схема (3) називається також моделлю інтегральної оптимальності [2], [4].

Як друга багатокритеріальна модель в [1] розглянута скалярна згортка частинних критеріїв за нелінійною схемою компромісів, введена в [2], [4]. У цьому випадку багатокритеріальна задача записується виразом:

$$I^2=\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{\left(1-\frac{I_j}{I_m}\right)^{g}}\,, \qquad (4)$$

де g_j – додатні константи. Для частинних критеріїв підбираються строго опуклі функції, щоб задача оптимізації за схемою (4) забезпечувала при заданих обмеженнях унімодальність розв'язку [2]. Коли критерії рівнозначні, то $g_j = 1$, $j=\overline{1,r}$. Якщо необхідно ввести пріоритет одних критеріїв над іншими і мати різну чутливість до варіації параметрів задачі, то замість одиниці в чисельнику виразу (4) вводять вагові коефіцієнти a_j, на які накладаються обмеження з (3).

Необхідні умови мінімуму скалярного критерію I^i дають систему кінцевих рівнянь:

$$\frac{\partial I}{\partial y_i}=0,\ i=\overline{1,n}\ . \qquad (5)$$

У результаті диференціювання (5) утворюється система нелінійних рівнянь низької розмірності, що зводиться, наприклад, з використанням методу Ньютона до СЛАР.

Недолік моделі (4) полягає в тому, що рівняння в (5) при великій розмірності будуть громіздкими. Однак задачу (4) необхідно розв'язати один раз, у той час коли задача (3) – параметрична.

Багатокритеріальна модель (4) чутлива до обмежень на частинні критерії (2). У випадку наближення одного з частинних критеріїв I_k до верхньої границі I_m припустимих значень багатокритеріальна модель (4) реалізує дію Чебишевського (мінімаксного оператора) за цим частинним критерієм. В інших випадках багатокритеріальна модель (4) діє еквівалентно оператору інтегральної оптимальності з різним ступенем вирівнювання частинних критеріїв. Погіршення одного з частинних критеріїв компенсується поліпшенням інших частинних критеріїв. У роботах [2], [4] показано, що багатокритеріальна модель (4) задовольняє оптимальності Парето.

Необхідні умови існування шуканого розв'язку рівняння (1) є врахуванням припустимих обмежень на кожну умову [5], [6]:

– відхил отриманого розв'язку повинnен бути мінімальним;

– нормальний розв'язок за Тихоновим повинен бути мінімальним;

– є додаткові відомості про невідомий розв'язок, наприклад відомо, що він повинен бути додатним чи симетричним. Представимо частинні критерії разом з їх обмеженнями.

1. Перший критерій I_1 відповідає за сумарний відхил одержуваного розв'язку:

$$I_1=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2\ , \qquad (6)$$

$$0\le I_1\le I_{1m}=n10^{-2l}\quad \text{або}\quad 0\le I_1\le I_{1m}=\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2=n\delta^2\,, \qquad (7)$$

де n – розмірність $y(s)$; l – довжина розрядної сітки вихідних даних.

2. Другий критерій – критерій за чисельною стійкістю, що гарантується нормальним розв'язком за Тихоновим, тобто мінімізує норму розв'язку [7]:

$$I_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}\ , \qquad (8)$$

$$0\le I_2\le I_{2m};\ I_{2m}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_{i\max}^2}\ . \qquad (9)$$

3. Третій (додатковий) критерій вибирається з умови симетричності розв'язку (якщо відновлюється симетричний щодо свого піка сигнал):

$$I_3=\sum_{i=1}^{n-1}(y_{i+1}-y_{n-i})^2+(y_1-y_n)^2\,,\ \ 0\le I_3\le I_{3m}\ . \qquad (10)$$

Цей критерій буде згладжувати флуктуації у розв'язку.

Таким чином, складені частинні критерії, на підставі яких будуть сформульовані задачі однокритеріальної або багатокритеріальної оптимізації.

На основі інтегральної суми частинних критеріїв I_1, I_2, I_3 сформуємо скалярний критерій I^1, що підлягає мінімізації на основі моделі (3):

$$\min_{y} I^1(y)=\sum_{j=1}^{3}\alpha_j I_j\,, \qquad (11)$$

при обмеженнях (7), (9), (10), де $a_j > 0$, $\sum_{j=1}^{3} \alpha_j = 1$.

Однак мінімізація відхилу конфліктує з мінімізацією норми розв'язку (або чисельною стійкістю). Тому задачу знаходження мінімуму критеріїв I_1, I_2, I_3 розв'язуємо як трьохкритеріальну задачу за нелінійною схемою компромісу Вороніна, що реалізує множину P на основі моделі (4):

$$\min_y I^2(y) = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{1 - \frac{I_i}{I_{im}}} \quad . \tag{12}$$

Крім того, можна розглянути цілий клас інших оптимізаційних задач на основі (11) і (12), наприклад, у скалярний критерій вводити не всі три частинні критерії, а починаючи з одного (тоді виходить розглянута вище ЗНП).

На основі введених критеріїв постановка задачі нелінійного програмування або методу головного критерію для розв'язку задачі відновлення сигналів, вираженої (1), буде виглядати таким чином [6].

1. Задача знаходження мінімального сумарного відхилу для розв'язку:

$$\min_y I_1 = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 \tag{13}$$

при обмеженнях (7), (9).

2. Задача знаходження нормального розв'язку за Тихоновим [7]:

$$\min_y I_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} \tag{14}$$

при обмеженнях (7), (9).

Оскільки задача (1) – некоректна, то наперед відомо, що отриманих рішень буде множина. Дослідникові потрібно визначитися з поставленою метою – що для нього важливіше: точність чи стійкість розв'язку. У випадку виникнення конфліктної ситуації (або, іншими словами, переході в область нестійкості) необхідно збільшувати верхні границі I_{im} доти, поки протиріччя між критеріями не зникнуть.

2. Чисельний експеримент

Розглянемо модельний приклад на основі рівняння (1), що будемо розв'язувати різними методами, у тому числі і багатокритеріальною оптимізацією на основі (11)–(12).

Становить інтерес випадок, коли ефективна ширина апаратної функції спектрального приладу може бути на півпорядку більше ефективної ширини вхідного сигналу $y(s)$. Ці особливості висувають підвищені вимоги до розв'язку, тому розглянемо такий приклад. Для нього точний розв'язок і точне ядро

$$y(s) = e^{-300s^2} \quad , \qquad Q(x,s) = \sqrt{\tfrac{30}{\pi}}\, e^{-1.5\left(\frac{x-s}{2}\right)^2} \tag{15}$$

при $a = -0{,}12$; $b = 0{,}12$; $c = -0{,}24$; $d = 0{,}24$.

Похибку розв'язку (1) будемо визначати як

$$\delta = \frac{\|y^* - y\|_{L_2}}{\|y\|_{L_2}}, \tag{16}$$

де y^*, y – відповідно отриманий (1) і точний розв'язок модельного прикладу.

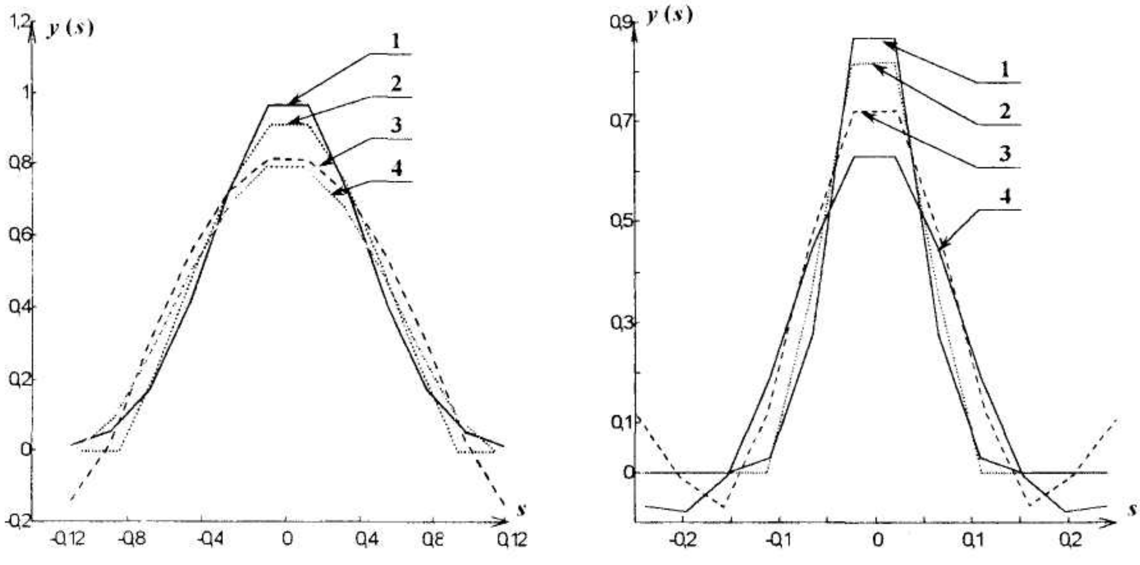
Крім того, при розв'язуванні прикладу (15) будемо розглядати два випадки. У першому випадку межі інтегрування задані точно (ідеальний випадок проведення експерименту), у другому – дорівнюють межам вимірювання, тобто розглянутий випадок, коли дослідник тільки знає, «що вони десь повинні бути усередині меж вимірювання» (реальний випадок проведення експерименту).

У результаті розв'язку модельного прикладу (15) за допомогою програми Mathcad були обчислені похибки (16) для задач вигляду (11)–(14). Кількість відліків для шуканого розв'язку і правої частини дорівнює 10. Результати обчислень представлені в таблиці 1. Тут також показаний результат розв'язку (1) методом Тихонова із знаходженням оптимального параметра регуляризації методом відхилів.

У таблиці 1 також порівнюються похибки (16) для модельного прикладу (15) при різному завданні меж інтегрування при використанні розглянутих методів (ідеальний і реальний випадок проведення експерименту).

Таблиця 1

Метод розв'язку модельного прикладу (15)	Похибка (16)	
	a = -1,2; b = 1,2	$a = c$ = -2,4; $b = d$ = 2,4
ЗНП (13), обмеження (13)	0,1247	0,1126
ЗНП (14), обмеження (11)	0,2290	0,3129
Модель (4)	0,2261	0,3136
Модель (4) з додатковою умовою $y \geq 0$	0,1088	0,0994
Модель (3), обмеження (11)	0,1250	0,1126
Метод Тихонова	0,1966	0,4077



а) *б)*

Рис. 1. Результати відновлення вхідного сигналу $y(s)$ різними методами для різних змінних інтегрування: а) a = -1,2; b = 1,2; б) $a = c$ = -2,4; $b = d$ = 2,4: 1 – вхідний сигнал; 2 – багатокритеріальна оптимізація за нелінійною схемою компромісів Вороніна з обмеженнями (7), (9), $y(s) \geq 0$; 3 – метод Тихонова; 4 – з обмеженнями (7), (9)

Як показали дослідження, при розв'язанні ІРФ, що можуть бути представлені добре обумовленою СЛАР (ідеальний випадок проведення експерименту), алгоритм, що реалізує багатокритеріальну оптимізацію за формулами (11), (12), і метод Тихонова показують приблизно однакові за точністю результати. Однак для ІРФ, що зводиться до погано обумовленої СЛАР (реальний випадок проведення експерименту), у методі Тихонова для розглянутого модельного прикладу похибка (16) виявилася меншою. Є можливість покращити результати, отримані за допомогою багатокритеріальної оптимізації. Звузимо область припустимих значень $I \in \Omega(I)$ за допомогою накладення додаткових обмежень на вигляд одержуваного розв'язку, що залежать від апріорної інформації. Наприклад, очікуваний результат повинен знаходитися у визначених числових межах або не повинен перевищувати якесь значення.

Оптимізація за моделлю (12) при введенні додаткових обмежень (у даному випадку умова додатності одержуваного розв'язку) дозволяє значно зменшити похибки. Це також ілюструє рисунок 1.

3. Висновки

Порівняння різних методів розв'язку показало придатність використання багатокритеріальної оптимізації для розв'язку задачі відновлення сигналів, вираженої інтегральним рівнянням Фредгольма першого роду. Перевага використання багатокритеріальної оптимізації перед методом Тихонова в тім, що отриманий розв'язок для задачі відновлення лежить на області Парето і є оптимальним.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Баранов В.Л., Залогин Н.С., Уруский О.С., Баранов Г.Л., Комаренко Е.Ю.* Квазианалоговые многокритериальные модели оптимизации динамических процессов // Электронное моделирование. – 1996. – Т. 18. – № 5. – С. 3–9.
2. Векторная оптимизация динамических систем / А.Н. Воронин, Ю.К. Зиатдинов, О.И. Козлов, В.С. Чабанюк: Под ред. А.Н. Воронина. – К.: Техніка, 1999. – 284 с.
3. *Верлань А.Ф., Сизиков В.С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие. – К.: Наукова думка, 1986. – 544 с.
4. *Воронин А.Н.* Многокритериальный синтез динамических систем. – Киев: Наук. думка, 1992. – 160 с.
5. *Засядько А.А.* Два этапа в методике гибкой адаптации в задачах многокритериальной оптимизации // Вісник ЧДТУ. – 2002. – № 2. – С. 14–17.
6. *Засядько А.А.* Розв'язання задачі відновлення сигналів за допомогою однокритеріальної оптимізації // Вісник ЖІТІ. – 2002. – № 4 (23) / Технічні науки. – С. 133–136.
7. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 288 с.

ЗАСЯДЬКО Аліна Анатоліївна – кандидат технічних наук, доцент кафедри інформатики Черкаського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:
- моделювання;
- оптимізація;
- цифрова обробка сигналів;
- некоректні задачі.

E-mail: sagitta@gomail.com.ua

Подано 14.04.2003