ІНФОРМАТИКА, ОБЧИСЛЮВАЛЬНА ТЕХНІКА ТА АВТОМАТИЗАЦІЯ

УДК 681.323:519.85

В.Л. Баранов, д.т.н., с.н.с.
Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України
Г.Л. Баранов, д.т.н., с.н.с.
Центральний науково-дослідний інститут навігації і управління
О.Ю. Комаренко, к.т.н.

СИСТЕМОАНАЛОГОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ НА ГРАФАХ НЕЛІНІЙНИХ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНИХ ЗАДАЧ СЕПАРАБЕЛЬНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Запропоновано модель на графах процесів багатокритеріальної оптимізації в нелінійних задачах сепарабельного програмування.

Задачі нелінійного програмування, що містять сепарабельні функції, мають широку область застосування [1–3]. В задачі сепарабельного програмування цільова функція і функції, що входять в обмеження є сепарабельними. Особливість сепарабельних функцій багатьох змінних полягає в тому, що їх можна представити у вигляді функції однієї змінної. Зазвичй задачі сепарабельного програмування моделюють на ЕОМ у випадку скалярної цільової функції з постійними параметрами [1–3]. В загальному випадку задачі сепарабельного програмування є багатокритеріальними із змінними параметрами, зміни яких викликані нестаціонарними умовами роботи моделювального об'єкту [4]. Застосування багатокритеріальних задач сепарабельного програмування для управління режимами роботи фізичних об'єктів в нестаціонарних умовах вимагає реалізації моделювання в реальному і прискореному часі.

Моделювання в реальному часі необхідне для оперативного управління, наприклад режимами роботи енергосистем [4]. Прогнозування розвитку ситуацій, викликане змінами параметрів фізичних об'єктів, вимагає виконувати моделювання в прискореному часі.

Виконати вимоги моделювання в реальному і прискореному часі на ЕОМ в загальному випадку не вдається, тому що оцінка обчислювальної складності багатокритеріальних задач при моделюванні на ЕОМ експоненціально залежить від розмірності простору змінних і лінійно від кількості часткових критеріїв [5].

У статті пропонується метод побудови паралельного процесу багатокритеріальної оптимізації на графах у задачі сепарабельного програмування. Запропонований метод заснований на концепції системоаналогового моделювання [6] і дозволяє в багатьох застосуваннях забезпечити моделювання швидкодіючих процесів в реальному і прискореному часі.

Математична модель багатокритеріальної задачі сепарабельного програмування містить систему часткових критеріїв:

$$F_l(t) = \sum_{i=1}^{n} C_{li}(t) f_{li}(U_i), \qquad l = \overline{1,r}, \tag{1}$$

обмеження на часткові критерії:

$$A_l(t) > F_l(t) \geq 0, \qquad l = \overline{1,r}, \tag{2}$$

граничні умови:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(t)\varphi_{ij}(U_i) \leq b_j(t), \qquad j = \overline{1,m}, \tag{3}$$

$$t \in [t_0, T], \qquad T > t_0 \geq 0. \tag{4}$$

Існують прикладні задачі, в яких накладаються додаткові вимоги позитивності та (або) цілочисельності змінних:

$$U_i \geq 0; \; U_i = 0, 1, 2, 3, \dots, \qquad i = \overline{1,n}, \tag{5}$$

Думаємо, що $a_{ij}(t)$, $b_j(t)$, $C_{li}(t)$, $A_l(t)$ задаються у вигляді функцій цілочисельного аргументу t. Для кожного значення параметра t із відрізка (4) вимагається знайти таке значення вектора $U^0(t) = \left[u_1^0(t), u_2^0(t), \ \dots, u_n^0(t)\right]$, при якому критерії (1) приймуть за можливості мінімальне значення і будуть виконані умови та обмеження (2)–(5). Обмежимо клас задач нелінійного програмування задачами, в яких функції $f_{li}(U_i)$, $\varphi_{ij}(U_i)$, $l=\overline{1,r}$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$ є степеневими функціями виду U_i^p, де $p \geq 1$:

$$f_{li}(U_i)=U_i^p;\ \varphi_{ij}(U_i)=U_i^p;\ l=\overline{1,r};\ \ i=\overline{1,n};\ \ j=\overline{1,m}. \tag{6}$$

У випадку $p=1$ математична модель (1)–(6) вироджується в багатокритеріальну задачу лінійного програмування. Якщо вибрати $p=2$, то з моделі (1)–(6) отримаємо багатокритеріальну задачу квадратичного програмування з квадратичними частковими критеріями (1) і квадратичними обмеженнями (3).

Широкий клас задач нелінійного програмування може бути апроксимований степеневими функціями виду (6) при різних значеннях параметра $p>1$. Наприклад задача нелінійного програмування з поліноміальними цільовими функціями і обмеженнями зводиться до задачі квадратичного програмування, якщо ввести нові змінні та квадратичні підстановки, що знижують порядок поліномів до квадратичного [7]. Перетворимо багатокритеріальну модель (1)–(6) в задачу сепарабельного програмування зі скалярною цільовою функцією. З цією метою застосуємо скалярну згортку часткових критеріїв за нелінійною схемою компромісів [8]:

$$J(t)=\sum_{l=1}^{r}\frac{\alpha_l(l)\,A_l(t)}{A_l(t)-F_l(t)}, \tag{7}$$

де вагові функції $\alpha_l(t)$ вводять пріоритет часткових критеріїв і задовольняють умови:

$$\alpha_l(t)>0,\ \ \sum_{l=1}^{r}\alpha_l(t)=1.$$

Багатокритеріальна оптимізація за скалярною згорткою (7) проявляє властивість адаптації до зміни параметрів математичної моделі (1)–(6). У випадку наближення одного з часткових критеріїв (1) до верхньої межі $A_l(t)$ припустимих значень (2) скалярна згортка (7) діє аналогічно до чебишевського (мінімаксного) оператора за цим частковим критерієм. В інших випадках вираз (7) реалізує оператор інтегральної оптимальності з різним ступенем вирівнювання часткових критеріїв. У випадку опуклості часткових критеріїв (1) скалярна згортка (7) має в області визначення (2) єдиний мінімум і задовольняє умови оптимальності Парето [8, 9].

Вихідна багатокритеріальна задача сепарабельного програмування (1)–(6) звелась до задачі нелінійного програмування з цільовою функцією (7) і обмеженнями (2)–(6). Спеціальний вигляд цільової функції (7) дозволяє перетворювати задачу нелінійного програмування (7), (2)–(6) в задачу *лінійного* програмування. З цією метою введемо допоміжні змінні:

$$Y_{l0}(t)=\frac{\alpha_l(t)}{A_l(t)-F_l(t)};\qquad Y_{li}(t)=Y_{l0}(t)\,U_i^p(t),\quad i=\overline{1,n}. \tag{8}$$

Цільову функцію (7) з урахуванням введення нових змінних (8) і виразу (6) представимо у вигляді:

$$J(t)=1+\sum_{l=1}^{r}\ \sum_{i=1}^{n}C_{li}(t)Y_{li}(t). \tag{9}$$

Результати оптимізації не зміняться, якщо замість (9) використаємо цільову функцію $I(t)=J(t)-1$. Систему обмежень (3) також перетворимо з урахуванням нових змінних (8) і співвідношення (6). Після очевидних перетворень отримаємо задачу параметричного лінійного програмування:

$$I(t)=\sum_{l=1}^{r}\ \sum_{i=1}^{n}C_{li}(t)Y_{li}(t), \tag{10}$$

$$\begin{gathered}\alpha_l(t)b_j(t)+\sum_{i=1}^{n}\left[C_{li}(t)b_j(t)-a_{ij}(t)A_l(t)\right]Y_{li}(t)\geq 0,\\ l=\overline{1,r};\ \ j=\overline{1,m},\quad t\in\left[t_0,T\right],\quad T>t_0>0.\end{gathered} \tag{11}$$

Використовуючи метод, запропонований в [10], математичну модель (10), (11), перетворимо в дискретну форму задачі оптимального управління. Введемо функції $X_{jl}(q,t)$ цілочисельних аргументів $q=0,1,2,\ldots;\ t=0,1,2,\ldots$, що задовольняють різницевим рівнянням:

$$\Delta X_{jl}(q,t) = \left[a_{qj}(t)A_l(t) - C_{lq}(t)b_j(t)\right]Y_{lq}(t), \quad q = \overline{1,\ n};$$
$$j = \overline{1,m}; \quad l = \overline{1,r}. \tag{12}$$

Перетворена математична модель у формі дискретного процесу оптимального управління містить функціонал (10), систему різницевих рівнянь (12) і граничні умови:

$$X_{jl}(0,t) = 0, \ X_{jl}(n+1,t) \le a_l(t)b_j(t), \quad j = \overline{1,m}, \quad l = \overline{1,r}. \tag{13}$$

Змінні $X_{jl}(q,t)$ у математичній моделі (10), (12), (13) визначають стан об'єкта, який змінюється під дією управління $Y_{lq}(t)$.

Простір станів для моделі (10), (12), (13) має розмірність $r\ m$. Моделювання вихідного математичного об'єкта (1)–(5) у формі дискретного процесу оптимального управління (10), (12), (13), доцільне у випадку малої кількості часткових критеріїв (1) і невеликої кількості обмежень (3). Дійсно, моделювання дискретного процесу оптимального управління на ЕОМ при великій розмірності простору станів зустрічається з проблемою великого об'єму пам'яті, а реалізація аналогових гібридних і цифрових моделей процесів оптимального управління вимагає значних апаратних затрат [11].

Моделювання у реальному і прискореному часі процесів управління, що відбуваються в об'єктах зі змінними параметрами, вимагає побудови швидкодіючих паралельних обчислень засобів у межах заданих обмежень на апаратні затрати.

Поставлену задачу розв'яжемо на основі концепції системоаналового моделювання [6]. Суть методу, що пропонується, полягає в побудові системи аналогів малої розмірності, в якій реалізуються паралельні процеси обчислення з високою швидкістю. Система аналогів (системоаналог) дозволяє генерувати розв'язки, серед яких знаходиться такий, що задовольняє вихідній математичній моделі. Ознакою одержання потрібного рішення є факт виконання певних умов, за яких математичний опис системи аналогів вироджується у вихідну математичну модель. Мета системоаналового моделювання полягає в організації швидкодіючих паралельних обчислень при суттєвому скороченні апаратних затрат на засоби обчислювальної техніки.

Реалізуємо концепцію системоаналогового моделювання для розв'язання на графах багатокритеріальних задач сепарабельного програмування. Математичну модель дискретного процесу оптимального управління (10), (12), (13) представимо у вигляді:

$$< X(t),\ Y(t),\ I(t) >, \tag{14}$$

де

$X(t) = [x_{jl}(j = \overline{1,m}\ ; \quad l = \overline{1,r})]'$ – вектор стану,

$Y(t) = [y_{lq}(l = \overline{1,r}; \quad q = \overline{1,n})]'$ – вектор управління,

$I(t)$ – функціонал (10).

Системоаналогову модель процесів оптимального управління побудуємо на основі більш загальної моделі диференціальної гри m осіб [11]:

$$\left\langle \{X_v(t)\}_{V\in R},\ \{Y_v(t)\}_{V\in R},\ \{I_v(t)\}_{V\in R} \right\rangle, \tag{15}$$

де $Y_v(t)$ – вектор управління v-го гравця, що мінізує функціонал $I_v(t)$, $R = \{1, 2, \ldots, m\}$.

Математична модель диференціальної гри (15) перетворюється в (14) за виконання умов:

$$\min_{Y(t)} \quad I(t) = I_1(t) = I_2(t) = \ldots = I_m(t),$$
$$X(t) = [X_1(t),\ X_2(t), \quad \ldots,\ X_m(t)]', \tag{16}$$
$$Y(t) = Y_1(t) = Y_2(t) = \ldots = Y_m(t).$$

Якщо організувати процес генерації сімейства розв'язків диференціальної гри (15) і виділити з нього такий, що задовольняє умови (16), то він також буде розв'язком задачі оптимального управління (14). Дискретна модель диференціальної гри m осіб (15) містить систему функціоналів:

$$I_v(t) = \sum_{S=1}^{m} \Delta I_v(S,\ t), \qquad v = \overline{1,\ m}, \tag{17}$$

де $\Delta I_v(S,t) = C_{lq}(t)Y_{lq}(t), \quad S = lq; \quad l = \overline{1,r}; \quad q = \overline{1,n}.$

Зміна стану диференціальної гри (15) визначається різницевими рівняннями:

$$\Delta X_v(S,t) = \left[a_{qv}(t)A_l(t) - C_{lq}(t)b_v(t)\right]Y_{lq}(t),$$
$$S = lq,\quad l = \overline{1,r},\quad q = \overline{1,n},\quad v = \overline{1,m} \tag{18}$$

та граничними умовами:

$$X_v\left[(l-1)(n+1),\, t\right] = 0;\quad X_v\left[l(n+1),\, t\right] \le \alpha_l(t)b_v(t);\quad v = \overline{1,m};\ l = \overline{1,r}. \tag{19}$$

Математична модель диференціальної гри (17)–(19) при виконанні умов (16) перетвориться в модель дискретного процесу оптимального управління (10), (12), (13).

Система аналогів (17)–(19), що складається з m паралельних одномірних моделей, дозволяє замінити одну $r\,m$ мірну модель (10), (12), (13) у випадку виділення з сімейства розв'язків системоаналога (17)–(19) такий, що заловольняє умови (16).

Паралельні обчислення в одномірних моделях є перевагою системоаналового моделювання. Але в системі аналогів (17)–(19), $v = \overline{1,m}$ необхідно реалізувати режим генерації сімейства оптимальних розв'зків. Якщо представити математичну модель (17)–(19) на графах, то генерація оптимальних розв'язків труднощів не викликає.

Моделювання дискретного процесу оптимального управління можна реалізувати на різних аналогових, гібридних і цифрових моделях графів або на паралельних обчислювальних структурах [11]. В таких моделях і обчислювальних структурах реалізується режим генерації оптимальних розв'язків, що задовольняють умови (16) для заданих значень t з відрізка (4).

Розглянемо процес моделювання на графах, що описується дискретною моделлю диференціальної гри (17)–(19). Процес паралельних обчислень реалізується на m графах, кожний з яких будується на основі решіток у площинах $X_v OS$. Розташування вершин графа в площині $X_v OS$ визначається координатами стану $X_v(S, t)$ гри (17)–(19) для цілочисельних значень S і t. Допустимі набори управлінь гравців $Y_{l0}(t)$ і $Y_{lq}(t)$, $l = \overline{1,r}$, $q = \overline{1,n}$ визначаються за виразом (8) для цілочисельних значень змінних $U_i(t)$, $i = \overline{1,n}$ і заданих значень параметра t з відрізка (4). Ці набори визначають допустимі значення управління гравцями, які за виразом (18) дозволяють знайти прирости $\Delta X_v(S, t)$ в процесі переходу стану гри з вершини $X_v(S-1, t)$ в одну з вершин графа $X_v(S,t) = X_v(S-1,t) + \Delta X_v(S,t)$. Вага (довжина) гілки графа, що з'єднує ці вершини, визначається приростом функціоналу $\Delta I_v(S, t)$ відповідно до виразу (17). Кожній гілці графа, крім ваги, зіставляється значення параметра t з відрізка (4) і компонента управління гравців $Y_{l0}(t)$ або $Y_{lq}(t)$, $l = \overline{1,r}$, $q = \overline{1,n}$, під дією яких відбувається перехід стану гри з вершини $X_v(S-1,t)$ в одну з вершин графа $X_v(S,t)$. Задані початкові, граничні й кінцеві вершини графів позначаються відповідно до умов (19).

Процес моделювання полягає в паралельному розв'язанні на всіх графах у площинах $X_v OS$, $v = \overline{1,m}$ задач про найкоротші шляхи між початковими, граничними і кінцевими вершинами графів доти, доки для всіх заданих значень параметра t з відрізка (4) не будуть виконані умови (16). У випадку виконання цих умов для кожного значення параметра t на будь-якому з модельованих графів $X_v OS$ уздовж найкоротшого шляху визначаються компоненти управлінь гравців $Y_{l0}(t)$, $Y_{lq}(t)$, $l = \overline{1,r}$, $q = \overline{1,n}$, на підставі яких із рівнянь (8) обчислюють компоненти $U_i(t)$, $i = \overline{1,n}$ вектора розв'язку багатокритеріальної задачі сепарабельного програмування (1)–(6).

Час моделювання задачі про найкоротший шлях на графах лінійно залежить від кількості гілок $r\,n$ вздовж найкоротшого шляху [11]. Реалізація m графів на паралельних обчислювальних структурах призводить до лінійного росту від розмірності m системи обмежень (3) у багатокритеріальній задачі сепарабельного програмування (1)–(6).

Отже, система аналогів (17)–(19) у випадку її реалізації на паралельних обчислювальних структурах [11] дозволяє отримати лінійну залежність часу моделювання від розмірності n вектора шуканих змінних і апаратних затрат від розмірності m системи обмежень (3) при фіксованій кількості часткових критеріїв (1). Такі характеристики залежності часу моделювання від розмірності задачі дозволяють побудувати швидкодіючі паралельні обчислювальні засоби для розв'язання багатокритеріальних задач сепарабельного програмування великої розмірності.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Михалевич В.С., Трубин В.А., Шор Н.З.* Оптимизационные задачи производственно-транспортного планирования: Модели, методы, алгоритмы. – М.: Наука, 1986. – 264 с.
2. *Таха Х.* Введение в исследование операций. – Кн. 2. – М.: Мир, 1985. – 479 с.
3. *Вагнер Г.* Основы исследования операций. – Т. 2. – М.: Мир, 1973. – 488 с.
4. *Баринов В.А., Совалов С.А.* Режимы энергосистем: Методы анализа и управления. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 440 с.
5. *Попов Н.М.* Об оценке вычислительной сложности многокритериальной оптимизации // Вычислительные комплексы и моделирование сложных систем. – М.: Изд-во МГУ, 1989. – С. 142–152.
6. *Баранов В.Л., Баранов Г.Л.* Системоаналоговое и квазианалоговое моделирование // Электронное моделирование. – 1994. – № 4 – С. 9–16.
7. *Шор Н.З., Стеценко С.И.* Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация. – К.: Наукова думка, 1989. – 208 с.
8. *Воронин А.Н.* Многокритериальный синтез динамических систем. – К.: Наук. думка, 1992. – 160 с.
9. *Козлов А.И.* Об унимодальности нелинейной схемы компромиссов // Автоматика. – 1993. – №4. – С. 81–85.
10. *Моисеев Н.Н.* О применении методов теории оптимальных управлений к задачам оптимального планирования // Кибернетика. – 1966. – № 2. – С. 41–48.
11. *Васильев В.В., Баранов В.Л.* Моделирование задач оптимизации и дифференциальных игр. – К.: Наукова думка, 1989. – 296 с.

БАРАНОВ Володимир Леонідович – доктор технічних наук, старший науковий співробітник, заслужений діяч науки і техніки України, провідний науковий співробітник відділу гібридних моделюючих та керуючих систем в енергетиці Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова Національної академії наук України.

Наукові інтереси:
- моделювання на графах;
- багатокритеріальна оптимізація;
- диференціальні ігри.

БАРАНОВ Георгій Леонідович – доктор технічних наук, старший науковий співробітник, заступник директора Центрального науково-дослідного інституту навігації і управління.

Наукові інтереси:
- моделювання складних динамічних систем;
- багатокритеріальна оптимізація;
- навігація і управління.

КОМАРЕНКО Олена Юріївна – кандидат технічних наук.

Наукові інтереси:
- комп'ютерне моделювання;
- оптимізація в складних системах.

Подано 14.04.2003