УДК 621.391

І.А. Пількевич, к.т.н., доц.
Житомирський військовий інститут радіоелектроніки ім. С.П. Корольова

ПРО ВПЛИВ МАГНІТНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛІ НА ОРІЄНТАЦІЮ ДИПОЛЯ В ПРОСТОРІ

З'ясовується питання впливу магнітного поля Землі на коливання дипольного відбивача. Показано, що графік щільності розподілу кута орієнтації диполя симетричний і має максимум при $\gamma = 0$, що свідчить про ракурс переважаючої орієнтації. Зроблено висновок про необхідність врахування магнітного поля Землі при моделюванні хмар дипольних відбивачів поза атмосферою.

Вступ

Пасивні перешкоди у вигляді хмар з малорозмірних пасивних відбивачів природного і штучного походження являють собою досить часте явище в практичній радіолокації [1, 2]. Задача дослідження перешкод, створюваних шляхом розкиду дипольних відбивачів у навколоземному космічному просторі з метою дослідження можливостей радіолокаційних засобів під час роботи в присутності цих перешкод і захисту від них, набуває практичного сенсу в зв'язку з проектом створення хмар дипольних відбивачів на навколоземній орбіті для далекого зв'язку West Ford [3], що створюють труднощі радіолокаційному спостереженню, утруднюють радіолокаційні спостереження за космічними об'єктами. Штучно створені хмари пасивних відбивачів можуть бути використані і для радіолокаційного маскування космічних цілей [4].

Опис будь-якого складного об'єкта, зокрема хмари дипольних відбивачів, являє собою математичну формалізацію об'єкта з метою вивчення його властивостей і (або) їхнього моделювання [5]. Математична формалізація полягає у виділенні усіх факторів, що впливають на описуваний об'єкт. У зв'язку з цим задача оцінювання впливу магнітного поля Землі на орієнтацію диполя в космосі є актуальною.

1. Диференціальне рівняння коливання диполя

Розглянемо випадок, коли хмара дипольних відбивачів рухається в магнітному полі Землі зі швидкістю V. У цьому разі сила Лоренца, яка діє на окремий диполь, що рухається в магнітному полі під довільним кутом до напрямку поля (рис. 1), подається виразом:

$$\vec{F}_л = -q\vec{V} \times \vec{H}. \quad (1)$$

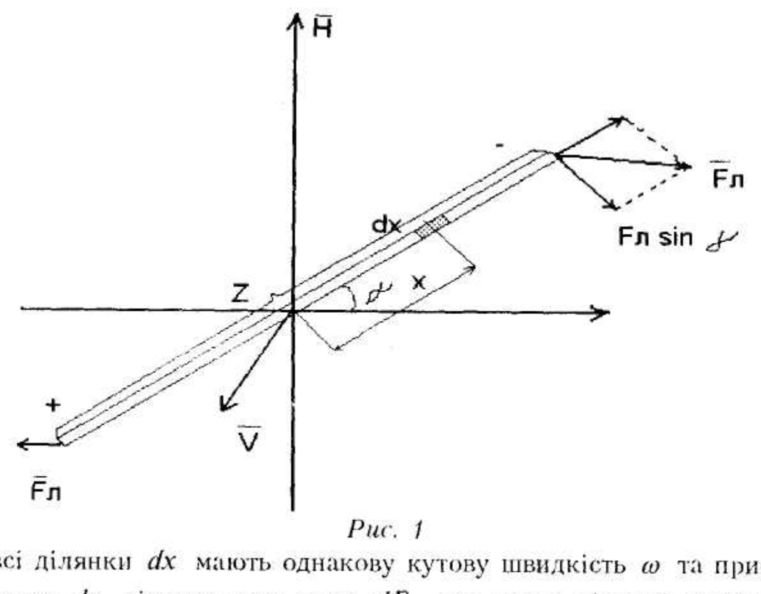

Рис. 1

Вважаємо, що всі ділянки dx мають однакову кутову швидкість ω та прискорення $d\omega/dt$. Тоді на кожну ділянку dx діятиме своя сила dF, яка надає ділянці лінійного прискорення $dV_л/dt$, де $V_л$ – лінійна швидкість ділянки.

Якщо маса всього диполя m, а щільність його рівномірна, то для ділянки dx матимемо закон Ньютона [1]:

$$d\vec{F} = \frac{m}{z}\ dx\ \frac{d\vec{V}_Д}{dt}, \tag{2}$$

або з урахуванням того, що

$$\vec{V}_Д = -\vec{\omega} \times \vec{x} \tag{3}$$

(від'ємна ω інформує про зменшення кута γ),

$$dF = -\frac{m}{z} x dx \frac{d\omega}{dt}, \tag{4}$$

де $V_Д = \left|\vec{V}_Д\right|$; $\omega = |\vec{\omega}|$ і т. д.

У зв'язку з тим, що в кожному напівдиполі напрямок сили dF для кожної ділянки збігається, то його результуюча сила дорівнюватиме:

$$F = -\int_0^{\frac{z}{2}} \frac{m}{z} \frac{d\omega}{dt} x dx = -\frac{1}{8} mz \frac{d\omega}{dt}. \tag{5}$$

Вважаємо, що весь заряд накопичується на кінцях диполя. Тоді:

$$F = F_Д \sin\gamma .$$

Тобто:

$$-\frac{1}{8} mz \frac{d^2\gamma}{dt^2} = F_Д \sin\gamma .$$

Звідси маємо нелінійне (за рахунок $\sin\gamma$) диференціальне рівняння 2-го порядку:

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} = -\frac{8F_Д}{mz} \sin\gamma . \tag{6}$$

2. Інтегрування рівняння коливань

Помножимо (6) на $d\gamma/dt$ та проінтегруємо обидві його частини, у результаті отримаємо:

$$\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2 = \frac{16F_Д}{mz} \cos\gamma + c_1 \tag{7}$$

або

$$\frac{d\gamma}{dt} = \pm 4\sqrt{\frac{F_Д}{mz} \cos\gamma + c_1} . \tag{8}$$

Рівняння (6) задовольняють обидва корені (8).

Розглянемо випадок, коли початковий кут γ_0, а швидкість $\left.\frac{d\gamma}{dt}\right|_{\gamma=\gamma_0} = 0$.

Тоді

$$c_1 = -\frac{F_Д}{mz} \cos\gamma_0 , \tag{9}$$

а

$$\frac{d\gamma}{dt} = \pm 4\sqrt{\frac{F_Д}{mz}} \sqrt{\cos\gamma - \cos\gamma_0} . \tag{10}$$

Зробивши заміну косинусоїди в інтервалі кутів $-\pi/2 \ldots \pi/2$ на $1-\gamma^2$ [2], наближено отримаємо:

$$\frac{d\gamma}{dt} \approx \pm 4\sqrt{\frac{F_Д}{mz}} \sqrt{\gamma^2 - \gamma_0^2} . \tag{11}$$

Відокремивши в (11) змінні та проінтегрувавши, отримаємо:

$$\arcsin\frac{\gamma}{|\gamma_0|} = \pm 4\sqrt{\frac{F_Д}{mz}} t + c_2 , \tag{12}$$

звідки

$$\gamma = \gamma_0 \sin\left(2\pi f_0 t + \varphi_0\right), \tag{13}$$

де

$$f_0 = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{F_A}{mz}} \text{ або } \omega_0 = \sqrt{\frac{16F_A}{mz}}; \tag{14}$$

φ_0 – визначається початком відліку часу і знаком $\pm$ в (12).

3. Щільність розподілу кута γ для $|\gamma_0| \le \pi/2$

Нехай розподілення часу $\omega(t)$ відповідно до (14) є рівномірним за період коливань, тоді:

$$W(\gamma) = \omega\left[t(\gamma)\right]\frac{dt}{d\gamma}, \tag{15}$$

де $t(\gamma)$ – залежність, що обернена до $\gamma(t)$.

На основі (15) і (16) маємо:

$$W(\gamma) = \begin{cases} \dfrac{1}{c\sqrt{\cos\gamma - \cos\gamma_0}}, |\gamma| \le \gamma_0; \\ 0, \ |\gamma| \rangle \gamma_0. \end{cases} \tag{16}$$

Постійна c забезпечує умову нормування [3]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(\gamma)d\gamma = \int_{\gamma_0}^{\gamma_0} W(\gamma)d\gamma = 1,$$

з якої випливає

$$c = 2\int_0^{\gamma_0}\frac{d\gamma}{\sqrt{\cos\gamma - \cos\gamma_0}} = 2\sqrt{2}F\left(\arcsin\sqrt{\frac{1-\cos\gamma_0}{1-\cos(\gamma_0+0)}}, \sin\frac{\gamma_0}{2}\right), \tag{17}$$

де $F(x,k) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}$ – еліптичний інтеграл 1-го роду;

$$f(\gamma_0+0) = \lim_{\Delta\to 0} f(\gamma_0+\Delta) \tag{18}$$

(Вираз (17) існує лише у граничному розумінні (18)).

Використовуючи апроксимацію $\cos x \cong 1 - x^2$ [2], $|x| \le \pi/2$, отримаємо більш зручне розподілення $W(\gamma)$ для гармонічних коливань (13):

$$W(\gamma) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{{\gamma_0}^2 - \gamma^2}}, \ |\gamma| \le \gamma_0, \\ 0, \ |\gamma| \le \gamma_0. \end{cases} \tag{19}$$

Графік щільності розподілення кута орієнтації диполя γ для випадку, який розглядається (відповідно до (19)), поданий на рис. 2.

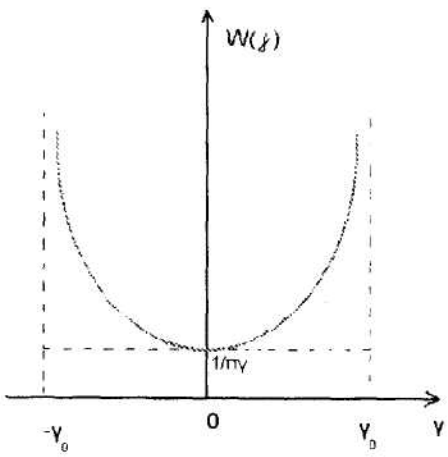

Рис. 2

4. Щільність розподілу кута γ для $\gamma_0 = \pi/2$ і $d\gamma/dt \neq 0$

Нехай $\gamma_0 = \pi/2$ і $d\gamma/dt = \Omega_0$. У цьому разі має місце обертальний рух із нерівномірною кутовою швидкістю. Враховуючи це, постійна c_1 в рівнянні (8) отримає значення:

$$c_1 = \Omega_0{}^2 - \frac{16F_д}{mz}\cos\gamma_0 = \Omega_0{}^2 - \left(2\pi f_0\right)^2\cos\gamma_0, \qquad (20)$$

де $\omega_0 = 2\pi\gamma_0$ відповідає (14).

Рівняння (8) набуде вигляду:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \pm\omega_0\sqrt{\frac{\Omega_0^2}{\omega_0^2} - \cos\gamma_0 + \cos\gamma}, \qquad (21)$$

де $\omega_0{}^2 = \dfrac{16F_д}{mz}$ (14).

Спрощуючи (21) $\left(\cos x \approx 1 - x^2\right)$, отримаємо:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \pm\omega_0\sqrt{\frac{\Omega_0^2}{\omega_0^2} + \gamma_0 - \gamma}. \qquad (22)$$

Вважаючи $\gamma_0 = \pi/2$ та використавши описану в п. 3 методику, приходимо до розподілення:

$$W(\gamma) = \begin{cases} \left(2\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{4}{\pi^2}\dfrac{\Omega_0^2}{\omega_0^2}}}\sqrt{\dfrac{\Omega_0^2}{\omega_0^2} + \dfrac{\pi^2}{4} - \gamma^2}\right)^{-1}, |\gamma| \leq \dfrac{\pi}{2}; \\ 0, \quad |\gamma| > \dfrac{\pi}{2}, \end{cases} \qquad (23)$$

графік якого поданий на рис. 3.

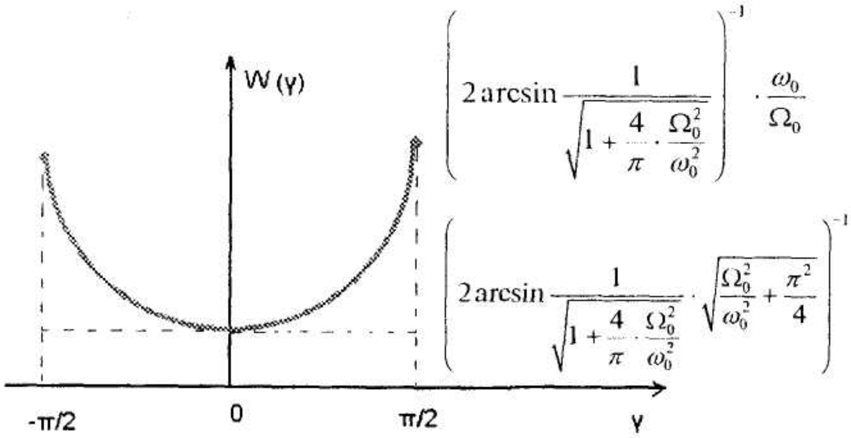

Рис. 3

5. Розрахунок швидкості Ω_0 через $\Omega_{поч}$ і γ_0

Розрахуємо кутову швидкість Ω_0 для ракурсу $\gamma = \pi/2$. Початкова швидкість $\Omega_{поч}$ вказує на початкову кінетичну енергію обертання зовні магнітного поля. Для її визначення можна користуватися звичайними даними без урахування магнітного поля Землі.

Етап гальмування (рис. 4).

Робота сил $F_д \sin\gamma$ відбирає кінетичну енергію обертання. Розглядається робота за коловим переміщенням диполя від $\gamma = \pi/2$ до $\gamma = \gamma_0$.

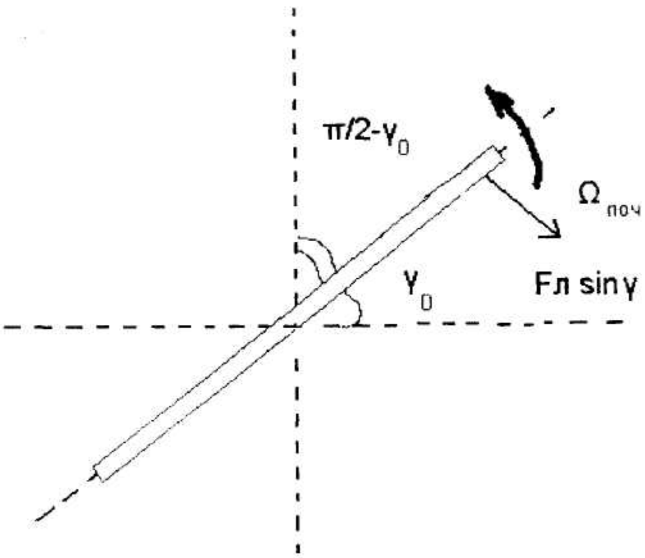

Рис. 4

Етап прискорення (рис. 5).

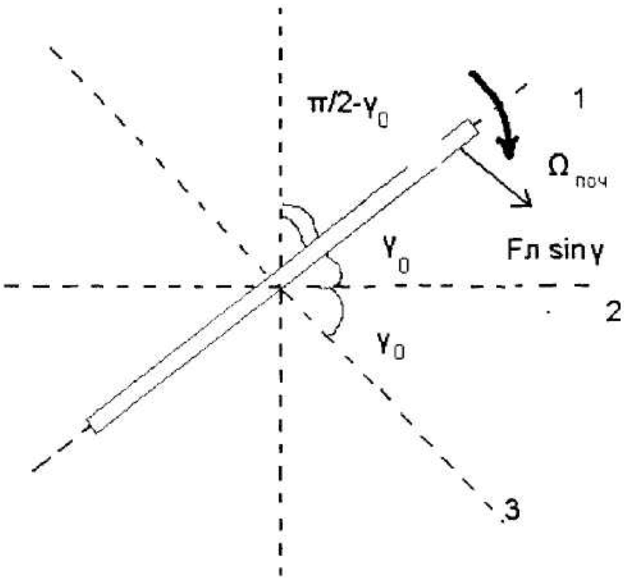

Рис. 5

До положення 2 сила $F_л \sin\gamma$ прискорює кутову швидкість і рівно на стільки ж гальмує до положення 3 диполь. У подальшому повторюється ця картина етапу гальмування. Враховуючи проведений аналіз, очевидно, що $\Omega_{поч}$ фізично ніяких особливостей не вносить, а в ситуації етапу прискорення та гальмування рівнозначні.

Швидкість Ω_0 знаходимо з кінетичної енергії обертання, яка залишається після роботи сил $F_л \sin\gamma$ до повороту диполя в положення $\gamma = \pm\pi/2$.

5.1. Кінетична енергія обернення

$$E_{к.об.} = \frac{1}{2}\int_0^m V_л^2 dm = \frac{m}{z}\int_0^{z/2} V_л^2 dx = \frac{m}{z}\Omega_{поч}^2\int_0^{z/2} x^2 dx = \frac{1}{24} m\Omega_{поч}^2 z^2 , \qquad (24)$$

де dm – маса елемента dx;

$V_л$ – лінійна швидкість диполя.

5.2. Робота сил Лоренца (потенційна енергія)

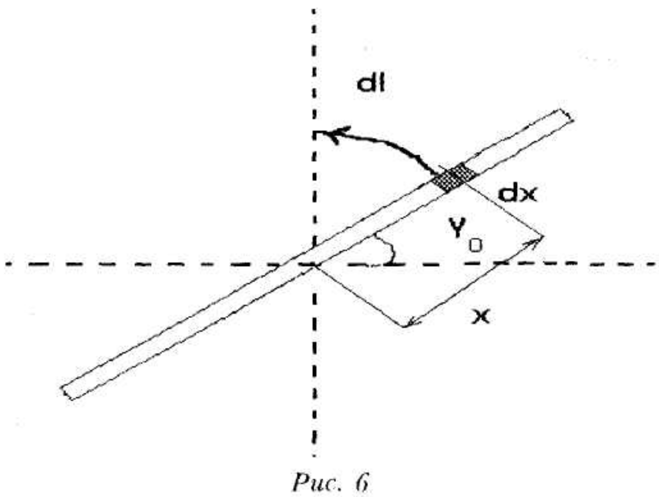

Рис. 6

$$d^2A = d\vec{F} \cdot d\vec{l} \ ,$$

де
$$dF = \frac{dV_\perp}{dt}dm = \frac{m}{z}x\frac{d\omega}{dt}dx \ . \tag{25}$$

У зв'язку з тим, що кутові прискорення всіх точок диполя однакові, то якщо проінтегрувати (25) та прирівняти отриманий результат до результуючої сили $F_л \sin\gamma$ (сили, яка діє на напівдиполь), отримаємо:

$$\dot{\omega} = \frac{8F_л \sin\gamma}{mz} \ .$$

Відповідно

$$dF = \frac{8F_л \sin\gamma}{z^2}xdx \ . \tag{26}$$

Потенційна енергія (запас роботи сил Лоренца) дорівнює

$$A = 2\iint_{(\Delta)} d^2A = 2\iint_{(\Delta)} d\vec{F} \cdot d\vec{l} \ , \tag{27}$$

де інтегрування ведеться в трикутнику (рис. 7).

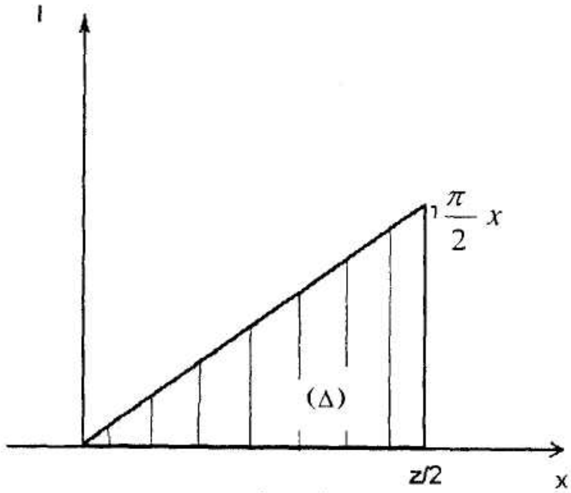

Рис. 7

Коефіцієнт "2" в (27) вказує на інтегрування по двох напівдиполях.

Аналіз рис. 7 показує, що

$$l = x(\gamma - \gamma_0) \ .$$

Відповідно

$$\gamma = \frac{1}{x}\left(l + x\gamma_0\right). \tag{28}$$

Якщо підставити (28) разом з (26) в (27), отримаємо:

$$A = 2\frac{8F_д}{z^2}\int_0^{z/2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}x}\sin\left(\frac{l}{x}+\gamma_0\right)dl\right)xdx =$$

$$= \frac{16F_д}{z^2}\int_0^{z/2}\left(x\int_{\gamma_0}^{\frac{\pi}{2}+\gamma_0}\sin ydy\right)xdx = \frac{16F_д}{z^2}\cos\gamma_0\int_0^{z/2}x^2dx = \frac{2}{3}F_дz\cos\gamma_0. \tag{29}$$

Якщо відняти з початкової кінетичної енергії обертання (24) роботу (29), то отримаємо залишок:

$$\frac{1}{24}m\Omega_{поч}^2z^2 - \frac{2}{3}F_дz\cos\gamma_0 = \frac{1}{24}m\Omega_0^2z^2,$$

з якого можна знайти швидкість диполя для положення $\gamma = \pi/2$:

$$\Omega_0 = \sqrt{\Omega_{поч}^2 - \omega_0^2\cos\gamma_0}, \tag{30}$$

де $\omega_0^2 = \dfrac{16F_д}{mz}$.

Вираз (30) слід враховувати в (23).

6. Розподілення γ для випадкових γ_0 та рівномірних в інтервалі від $-\pi/2$ до $\pi/2$ при $\Omega_{поч} = 0$

Усереднення (19) за γ_0 для рівномірного розподілення в інтервалі від $-\pi/2$ до $\pi/2$ отримаємо:

$$W(\gamma) = \frac{1}{\pi^2}\ln\frac{\pi}{2}\left(\frac{1+\sqrt{1-\frac{4}{\pi^2}\gamma^2}}{1-\sqrt{1-\frac{4}{\pi^2}\gamma^2}}\right). \tag{31}$$

Графік щільності розподілу кута орієнтації диполя γ у випадку, який розглядається (відповідно до (31)), представлений на рис. 8.

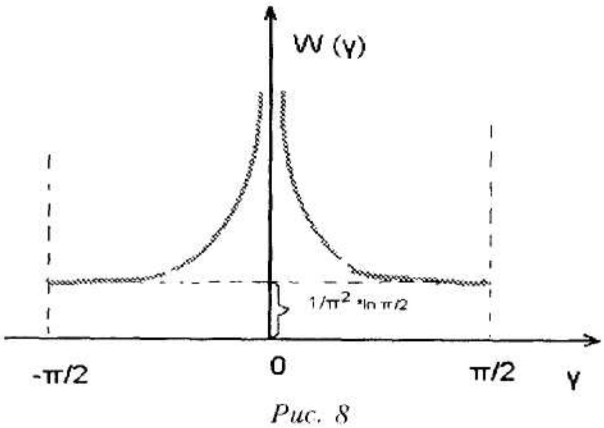

Рис. 8

Аналіз графіка показує, що слід очікувати переважаючий ракурс $\gamma = 0$. Такий результат має місце завдяки підвищенню щільності $W(\gamma)\big|_{\gamma=0}$ із зменшенням можливого діапазону γ_0, зокрема для нульового діапазону γ_0, $W(\gamma) = \delta(\gamma)$.

7. Умовні характеристичні функції розподілення $W(\gamma)$

7.1. Характеристична функція розподілення (19)

Використовуючи табличний інтеграл [2]

$$\int_{-a}^{a}\left(a^2-x^2\right)^{\beta-1}e^{j\lambda x}dx=\sqrt{\pi}\,\Gamma(\beta)\left(\frac{2a}{\lambda}\right)^{\beta-\frac{1}{2}}J_{\beta-\frac{1}{2}}(a\lambda),\qquad(32)$$

де $\Gamma(\beta)=\int\limits_0^\infty t^{\beta-1}e^{-t}dt$ – гамма-функція [4];

$J_\beta(x)$ – функція Бесселя першого роду β-го порядку.

Для $a=\gamma_0$ та $\beta=1/2$ маємо [5]:

$$\langle e^{j\lambda\gamma}\rangle=J_0(\lambda\gamma_0).\qquad(33)$$

7.2. Характеристична функція розподілення (23)

Для проведення розрахунків скористаємося рядом Маклорена [6]:

$$\frac{1}{\sqrt{A+x}}=\frac{1}{\sqrt{A}}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\prod_{k=0}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)A^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{x^n}{n!}.\qquad(34)$$

Для випадку, коли $A=\pi^2/4-\gamma^2$, а $\gamma=\Omega_0^2/\omega_0^2$, щільність (23) запишеться таким чином:

$$W(\gamma)=\frac{1}{c\sqrt{A+x}},\qquad(35)$$

де $c=2\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{4}{\pi^2}\cdot\dfrac{\Omega_0^2}{\omega_0^2}}}$.

Використовуючи (32), отримаємо:

$$\langle e^{j\lambda\gamma}\rangle=J_0\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)\prod_{k=0}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)\cdot\pi\frac{(-2)^n}{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1)}\cdot\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^n\times J_{-n}\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)\left(\frac{\Omega_0}{\omega_0}\right)^{2n}\times\frac{1}{n!},\qquad(36)$$

де $\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)=\sqrt{\pi}\dfrac{(-2)^n}{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k-1)}$.

Спростивши вираз (36), отримаємо:

$$\langle e^{j\lambda\gamma}\rangle=J_0\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\pi\frac{2^n}{2^n}\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^n\left(\frac{\Omega_0^2}{\omega_0^2}\right)^n\cdot\frac{1}{n!}J_n\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)=$$

$$=J_0\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{n!}\left(\frac{\lambda}{\pi}\cdot\frac{\Omega_0^2}{\omega_0^2}\right)^nJ_{-n}\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)=J_0\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)+\lambda\frac{\Omega_0^2}{\omega_0^2}J_{-1}\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)+\ldots$$

Враховуючи, що $J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x)$ [7], кінцевим результатом буде:

$$\langle e^{j\lambda\gamma}\rangle=J_0\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{n!}\left(\frac{\lambda\ \Omega_0^2}{\pi\omega_0^2}\right)^n\cdot J_{-n}\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right).\qquad(37)$$

Для отримання безумовних середніх $\langle e^{j\lambda\gamma}\rangle$ слід задаватися випадковими $\Omega_{поч}$ та γ_0, а потім розрахувати їх для випадку $\Omega_{поч}\le\omega_0\sqrt{\cos\gamma_0}$ за формулою (33), а для випадку $\Omega_{поч}\rangle\omega_0\sqrt{\cos\gamma_0}$ – за формулою (37). Після цього визначити середнє арифметичне за умовою, що $\Omega_{поч}$ та γ_0 кожен раз вибираються з урахуванням свого статистичного закону.

Висновки:

1. Коливання диполя, що рухається в магнітному полі Землі, можна описати нелінійним диференціальним рівнянням 2-го порядку.
2. Щільність розподілення кута орієнтації диполя в просторі залежить від початкового кута орієнтації. Однак в будь-якому разі має місце повертальний рух з нерівномірною кутовою швидкістю.

3. При розрахунках кутової швидкості від напрямку початкової швидкості цей процес потрібно розглядати за два етапи: етап гальмування та етап прискорення. Щоправда, аналіз показує, що обидва ці етапи рівнозначні.

4. Аналіз закону розподілення кута орієнтації диполя для випадкових кутів розкиду диполів при нульовій початковій кутовій швидкості показує, що слід очікувати переважний ракурс ($\gamma = 0$, тобто диполь, перпендикулярний напрямку напруженості магнітного поля Землі).

5. Щільність ймовірності кута орієнтації можна знайти за допомогою використання зворотного перетворення Фур'є до її характеристичної функції, яка набуває лише дійсні значення і є парною. У зв'язку з цим закон розподілу повинен бути симетричним, що відповідає висновкам, зробленим в п. 3, 4, 6.

6. При моделюванні хмар дипольних відбивачів зовні атмосфери з врахуванням магнітного поля Землі слід враховувати співвідношення між початковою кутовою швидкістю окремих диполів та кутом їх розкиду.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Кухлинг X.* Справочник по физике: Пер. с нем. – М.: Мир, 1982. – 520 с.
2. *Двайт Г.Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. – 6-е изд. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1983. – 176 с.
3. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. Т. 1. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Сов. радио, 1974. – 552 с.
4. *Шор Я.Б., Кузьмин Ф.И.* Таблицы для анализа и контроля надёжности. – М.: Сов. радио, 1968. – 284 с.
5. *Андре Анго.* Математика для электро- и радиоинженеров: Пер. с франц. / Под общ. ред. К.С. Шифрина. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1964. – 772 с.
6. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. – М.: Наука, 1981. – 798 с.
7. *Сикорская В.В.* Высшая математика. Ряды. – Житомир: ЖВУРЭ ПВО, 1990. – 67 с.

ПІЛЬКЕВИЧ Ігор Анатолійович – кандидат технічних наук, доцент кафедри радіоелектроніки Житомирського військового інституту радіоелектроніки ім. С.П. Корольова.

Наукові інтереси:

– математичне моделювання складних радіотехнічних систем.

Подано 21.04.2003