

УДК 621.396

С.В. Ковбасюк, к.т.н., с.н.с.

О.М. Хімчик, курсовий офіцер

*Житомирський військовий інститут радіоелектроніки ім. С.П. Корольова*

### ЕКСТРАПОЛЯЦІЯ РУХУ КОСМІЧНОГО АПАРАТА З ВИКОРИСТАННЯМ ЗМІЩЕНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

*Розглянуто підхід до розрахунку екстрапольованого положення космічного апарата на основі зміщених тейлорівських диференціальних перетворень, що дозволяє підвищити точність розрахунків при використанні однакової кількості дискрет диференційного спектра. Наведено приклад оцінки ефективності запропонованого підходу, який обмежено круговою орбітою і незбуреним рухом супутника.*

Точність визначення і екстраполяції положення космічного апарата (КА) за допомогою засобів спостереження великою мірою залежить від математичної моделі руху цілі, яка для цього використовується. Традиційно для розв'язку диференціальних рівнянь, що описують рух КА, використовують числові методи, які не дають можливості отримати розв'язок в аналітичному вигляді, а для отримання числового результату потребують великих обчислювальних витрат [1]. Нові задачі в космічній галузі, враховуючи кількісне та якісне зростання орбітального і наземного обладнання, характеризуються великим обсягом обчислень при розв'язанні, що потребує розробки нових математичних методів, незважаючи на прогрес у сфері комп'ютерної техніки. Таким чином, актуальною є задача пошуку нового математичного апарату і побудова на його основі моделі руху космічного об'єкта з невисокими обчислювальними витратами.

Ефективним підходом до розв'язання диференціальних рівнянь є застосування математичного апарату диференціальних перетворень.

Диференціальні перетворення – це новий операційний метод, який оснований на переводі оригіналів в область зображень за допомогою операції диференціювання [3], [4]. Метод дозволяє, в порівнянні з відомими інтегральними перетвореннями Лапласа і Фур'є, при значному спрощенні процедури проведення математичного моделювання фізичних процесів (об'єктів), що описуються нелінійними інтегро-диференціальними рівняннями (спрощенні математичних викладок та зменшенні обчислювальної складності), отримувати для них в області зображень точні моделі задач, що розв'язуються, і при цьому зберігає потенційну можливість отримання точного рішення (відновлення) в області оригіналів.

Математичний апарат диференціальних перетворень широко використовується для моделювання динамічних об'єктів і процесів в різноманітних галузях науки і техніки. Найбільше поширення в області моделювання одержали основні диференціальні перетворення [3], [4]. Так, в [5] запропоновано метод моделювання руху КА, оснований на основних диференціальних перетвореннях, а також проаналізована його ефективність у порівнянні з числовим методом Рунге-Кутти. Застосування математичного апарату диференціальних перетворень для інтегрування системи диференціальних рівнянь руху КА, в порівнянні з традиційними числовими методами, дозволить зменшити обчислювальні витрати для прогнозування руху КА при забезпеченні заданих точнісних характеристик.

Відповідно до класифікації, наведеної в [3], [4], поряд з основними диференціальними перетвореннями з метою моделювання процесів можуть використовуватися також зміщені диференціальні перетворення, отримані шляхом переносу центра розкладу оригіналу в степеневий ряд Тейлора з точки  $t = 0$  в зміщену точку  $t = tv$ .

У даній статті розглядається підхід до моделювання руху КА, оснований на зміщених диференціальних перетвореннях.

Математичний опис прийнятої за основу моделі траєкторії КА в загальному випадку запишеться у вигляді диференціального рівняння [2]:

$$\ddot{\vec{r}}(t) + K_3 \frac{\vec{r}(t)}{r^3(t)} = \vec{\Phi}, \quad (1)$$

де  $\vec{r}$  – радіус-вектор, який визначає положення об'єкта у вибраній системі координат;

$K_3$  – стала поля земного тяжіння (гравітаційна стала Землі), яка дорівнює  $3,986 \cdot 10^{14} \text{ м}^3/\text{с}^2$ ;

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

$\bar{\phi}$  – вектор збурюючих прискорень.

Рівняння (1) еквівалентно системі трьох диференціальних рівнянь другого порядку:

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + \frac{K_x x(t)}{r^3(t)} = \Phi_x; \\ \ddot{y}(t) + \frac{K_y y(t)}{r^3(t)} = \Phi_y; \\ \ddot{z}(t) + \frac{K_z z(t)}{r^3(t)} = \Phi_z. \end{cases} \quad (2)$$

Традиційний розв'язок системи (2) є сукупністю шести незалежних між собою частинних розв'язків, до знаходження яких і зводиться задача інтегрування даних рівнянь. Ми ж розв'яжемо задачу, що розглядається, за допомогою диференціальних перетворень.

Поставлена задача розв'язувалась в [5] на основі основних диференціальних перетворень із центром розкладу оригіналу в ряд Тейлора в точці  $t_0 = 0$ . Основні диференціальні перетворення ефективно розв'язують задачу моделювання процесів тільки на порівняно невеликому інтервалі часу.

У тих випадках, коли інтервал моделювання не заданий або займає відрізок часу, що перевищує радіус збіжності рядів Тейлора в околі точки  $t_0 = 0$ , основні диференціальні перетворення при обмеженій кількості дискрет диференціального спектра можуть не забезпечити задану точність моделювання. У цих випадках пропонується використовувати зміщені диференціальні перетворення функції часу  $x(t)$  у довільній точці  $t_v$ :

$$X(k, t_v) = \frac{H^k}{k!} \left[ \frac{d^k x(t_v + \tau)}{d\tau^k} \right]_{\tau=0}, \quad (3)$$

$$\bar{X}(k, t_v) = \frac{(-H)^k}{k!} \left[ \frac{d^k x(t_v - \tau)}{d\tau^k} \right]_{\tau=0}, \quad (4)$$

де  $X(k, t_v)$  і  $\bar{X}(k, t_v)$  – дискретні функції цілочисельного аргументу  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ ;  $\tau$  – локальний аргумент, значення якого вибирається в межах  $H \geq \tau \geq 0$ ;  $H$  – відрізок часового аргументу, на якому розглядаються функції  $x(t_v + \tau)$  і  $x(t_v - \tau)$ , значення  $H$  повинно бути менше радіуса збіжності рядів Тейлора в околі точки  $t_v$ .

Вираз (3) визначає пряме перетворення оригіналу  $x(t_v + \tau)$  у зображення  $X(k, t_v)$ . Аналогічно пряме перетворення функції часу  $x(t_v - \tau)$  в область зображень  $\bar{X}(k, t_v)$  задається виразом (4). Величини дискретних функцій  $X(k, t_v)$  і  $\bar{X}(k, t_v)$  при цілочисельних значеннях аргументу  $k$  називаються дискретами відповідних диференціальних спектрів.

Перехід з області зображень в область часу здійснюється за допомогою обернених диференціальних перетворень

$$x(t_v + \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\tau}{H} \right)^k X(k, t_v),$$

$$x(t_v - \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\tau}{H} \right)^k \bar{X}(k, t_v).$$

В першому наближенні спростимо задачу, для чого прийемо наступні припущення:

- рух КА є незбуреним ( $\bar{\phi} = 0$ );
- траєкторія руху є круговою ( $\ddot{r} = \text{const}$ );
- розглянемо рух по одній координаті  $x$ .

При накладених припущеннях рівняння (2) можна записати у вигляді

$$\ddot{x}(t) + \frac{K_x x(t)}{r^3(t)} = 0 \quad (5)$$

або у вигляді системи двох рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = g(t); \\ \frac{d\dot{x}(t)}{dt} = -\frac{K_x x(t)}{r^3(t)}. \end{cases} \quad (6)$$

Розглянемо на відрізку часу  $[0...T]$  функції  $x(t)$ ,  $g(t)$ , що є розв'язками системи нелінійних диференціальних рівнянь (6) при початкових умовах  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$ .

Основні диференціальні перетворення для цієї системи дають  $P$ -моделі виду

$$\begin{aligned} X(k+1) &= \frac{H}{k+1} G(k); \\ G(k+1) &= -\frac{H \cdot K_3}{(k+1)r^3} X(k). \end{aligned}$$

Присвоюючи цілочислові значення аргументу  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ , знайдемо дискрети диференціального спектра (обмежимося трьома дискретами):

$$\begin{aligned} X(0) &= x_0, & G(0) &= g_0, \\ X(1) &= g_0 H, & G(1) &= -\frac{K_3 H}{r^3} x_0, \\ X(2) &= \frac{K_3 H^2}{2! r^3} x_0, & G(2) &= -\frac{K_3 H^2}{2! r^3} g_0. \end{aligned} \tag{7}$$

В загальному випадку диференціальний спектр (7) обох рівнянь системи (6) безмежний, але ми обмежимо його шістьма дискретами ( $\delta = 6$ ). Тоді відновлені значення функції  $x(t)$  і  $g(t)$  запишуться у вигляді ряду Тейлора з центром розкладу в точці  $t = 0$ :

$$\begin{aligned} x(t) &= \left( t - \frac{K_3}{2! r^3} t^2 + \frac{K_3^2}{4! r^6} t^4 \right) x_0 + \left( t - \frac{K_3}{3! r^3} t^3 + \frac{K_3^2}{5! r^6} t^5 \right) g_0, \\ g(t) &= \left( -\frac{K_3}{r^3} t + \frac{K_3^2}{3! r^6} t^3 + \frac{K_3^3}{5! r^9} t^5 \right) x_0 + \left( t - \frac{K_3}{2! r^3} t^2 + \frac{K_3^2}{4! r^6} t^4 \right) g_0. \end{aligned}$$

Далі розв'яжемо систему (6) на основі змішених диференціальних перетворень згідно з виразами (3), (4). В області зображень задана система нелінійних диференціальних рівнянь представляється у вигляді двох систем з  $P$ -моделей:

$$\begin{cases} X(K+1) = \frac{H_1}{K+1} g(K), \\ G(K+1) = -\frac{H_1 K_3}{(K+1)r^3} X(K), \\ \bar{X}(K+1) = -\frac{H_2}{K+1} g(K), \\ \bar{G}(K+1) = \frac{H_2 K_3}{(K+1)r^3} X(K) \end{cases} \tag{8}$$

при  $X(0) = \bar{X}(0) = x(t_v) = x(v)$ ;  $g(0) = \bar{g}(0) = g(t_v) = g(v)$ .

Присвоюючи цілочисельні значення аргументу  $k = 0, 1, 2, \dots$  за цими системами  $P$ -моделей знайдемо два диференціальні спектри:

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} X(0) &= x(v); \\ X(1) &= H_1 g(v); \\ X(2) &= -\frac{K_3 H_1^2}{2! r^3} x(v); \end{aligned} \right\} \begin{aligned} G(0) &= g(v); \\ G(1) &= -\frac{K_3 H_1}{2! r^3} x(v); \\ G(2) &= -\frac{K_3 H_1^2}{2! r^3} g(v) \end{aligned} \\ & \left. \begin{aligned} \bar{X}(0) &= x(v); \\ \bar{X}(1) &= -H_2 g(v); \\ \bar{X}(2) &= -\frac{H_2 K_3}{2! r^3} x(v); \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \bar{G}(0) &= g(v); \\ \bar{G}(1) &= \frac{K_3 H_2}{r^3} x(v); \\ \bar{G}(2) &= -\frac{K_3 H_2^2}{2! r^3} g(v). \end{aligned} \end{aligned} \tag{9}$$

Розмістимо зміщену точку  $t_v = \frac{T}{2}$  всередині відрізка часу  $[0, T]$ . Тоді  $H_1 = H_2 = \frac{T}{2}$ . За отриманими дискретними диференціальними спектрами ( $\delta = 3$ ) визначимо граничні значення розв'язку заданої системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} x T &= x v + \frac{T}{2} g v - \frac{K_3 T^2}{4 \cdot 2! r^3} x v, \\ g T &= g v - \frac{K_3 T}{2 r^3} x v - \frac{K_3 T^2}{4 \cdot 2! r^3} g v, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x 0 &= x_0 = x v - \frac{T}{2} g v - \frac{K_3 T^2}{4 \cdot 2! r^3} x v, \\ g 0 &= g_0 = g v + \frac{K_3 T}{2 r^3} x v - \frac{K_3 T^2}{4 \cdot 2! r^3} g v \end{aligned}$$

при відомих початкових умовах  $x(0) = x_0, g(0) = g_0$ .

Графічно розв'язок системи рівнянь показано на рис. 1, а.

Інший варіант пошуку розв'язку задачі показаний на рис. 1, б. В цьому випадку система складається з двох рівнянь, що призводить до зменшення кількості математичних операцій:

$$\begin{aligned} x_0 + \frac{T}{2} g_0 - \frac{K_3 T^2}{4 \cdot 2! r^3} x_0 &= x T - \frac{T}{2} g T - \frac{K_3 T^2}{4 \cdot 2! r^3} x T; \\ g_0 - \frac{K_3 T}{2 r^3} x_0 - \frac{K_3 T^2}{4 \cdot 2! r^3} g_0 &= g T + \frac{K_3 T}{2 r^3} x T - \frac{K_3 T^2}{4 \cdot 2! r^3} g T. \end{aligned}$$

Аналіз точнісних показників математичного моделювання показав, що обидва варіанти пошуку розв'язку дають однаковий результат.

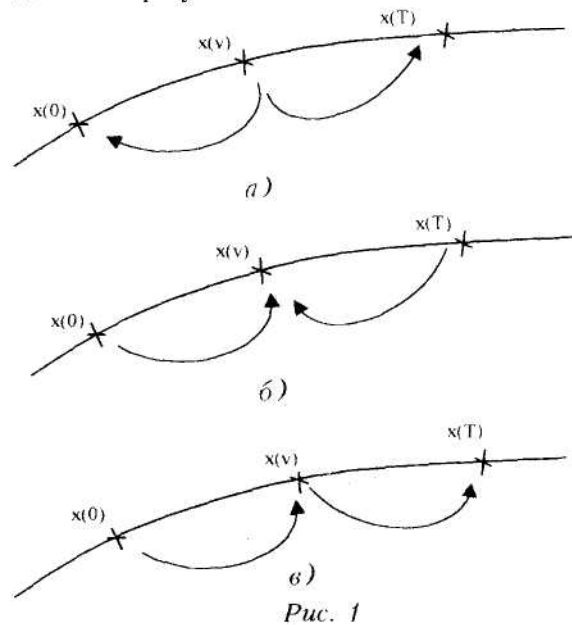


Рис. 1

Результати розрахунків представлені на рис. 2, де подано залежності методичної похибки обчислення траєкторії КА від часу прогнозування. Суцільні криві відповідають варіанту розрахунків з використанням зміщених диференціальних перетворень, штрихові – прямих диференціальних перетворень. Залежності, які позначені цифрою 1, побудовані при використанні моделі з кількістю дискрет  $\delta = 5$ , цифрою 2 –  $\delta = 6$ .

З наведених результатів моделювання можна зробити висновок, що зміщені диференціальні перетворення дозволяють отримати екстрапольовані дані розвитку процесу, що розглядається, з більш високою точністю. Крім того, в разі використання зміщених диференціальних перетворень менш критичним стає такий параметр, як радіус збіжності ряду Тейлора. Платою за підвищення точності є збільшення обчислювальних витрат, які потрібні для розв'язку системи рівнянь.

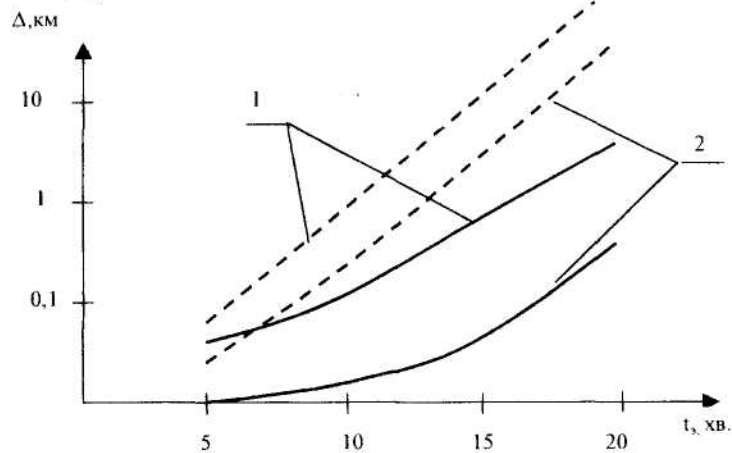


Рис. 2

Альтернативою розглянутого підходу є багатокроковий прямий метод, коли інтервал часу  $[0, T]$  розбивається на кілька підінтервалів, на кожному з яких визначаються початкові дані для наступного. Але порівняння варіанта з використанням зміщених диференціальних перетворень з двохкроковим прямим методом, схему якого зображено на рис. 1, *в*, показало, що перший має меншу методичну похибку. Пояснити цей результат можна тим, що у випадку прямого багатокрокового методу обидва рівняння для параметра та похідної розраховуються незалежно одне від одного стільки разів, на скільки відрізків розбито визначений інтервал часу. Розв'язок же системи рівнянь при використанні запропонованого підходу є методом оптимізації, що дає більш точний результат.

Таким чином, розглянутий підхід до екстраполяції положення КА з використанням зміщених диференціальних перетворень за результатами математичного моделювання довів свою ефективність. У разі відміни накладених обмежень (незбурений рух, кругова орбіта КА) і застосуванні моделі реального руху розглянута методика може бути використана в балістичному забезпеченні польотів супутників. Крім того, даний підхід може знайти використання і в інших галузях для передбачення розвитку процесів за заданими математичними моделями.

#### ЛІТЕРАТУРА:

1. Чуров Е.П., Дегтярев В.Г. Определение и прогнозирование орбит космических аппаратов. – Ленинград: Военно-морская академия, 1970. – 180 с.
2. Белоус Л.М. Физика. Элементы расчета движения космических аппаратов. – Житомир: ЖВУРЭ, 1987. – 173 с.
3. Пухов Г.Е. Дифференциальные преобразования функций и уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 420 с.
4. Пухов Г.Е. Дифференциальные спектры и модели. – Киев: Наук. думка, 1990. – 184 с.
5. Ковбасюк С.В. Розробка і аналіз ефективності диференціальних моделей руху космічного апарата // Вісник ЖІТІ. – 2001. – № 18. – С. 120–125.
6. Фролова О.Г. Моделювання оптимальних процесів керування зміщеними диференціальними перетвореннями // Вісник ЖІТІ. – 2001. – № 18. – С. 155–160.

КОВБАСЮК Сергій Валентинович – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, начальник науково-дослідного відділу Житомирського військового інституту радіоелектроніки ім. С.П. Корольова.

Наукові інтереси:

- наземні засоби космічної інфраструктури України.

ХІМЧИК Олексій Миколайович – курсовий офіцер Житомирського військового інституту радіоелектроніки ім. С.П. Корольова.

Наукові інтереси:

- балістичне забезпечення польотів космічних об'єктів.