МАШИНОЗНАВСТВО. ОБРОБКА МАТЕРІАЛІВ У МАШИНОБУДУВАННІ

УДК 621.531

О.М. Безвесільна, д.т.н., проф.
В.П. Квасніков, к.т.н., докторант
Національний технічний університет України "КПІ"

АНАЛІЗ ВПЛИВУ НЕГАУСОВИХ ЗАВАД НА ТОЧНІСТЬ ВИМІРЮВАННЯ МЕХАНІЧНИХ ВЕЛИЧИН ТРИКООРДИНАТНИМИ ІНФОРМАЦІЙНО-ВИМІРЮВАЛЬНИМИ СИСТЕМАМИ

Розглядається задача впливу негаусової завади на точність вимірювання трикоординатної інформаційно-вимірювальної системи (ТІВС) механічних величин об'єктів зі складною просторовою поверхнею. Показано, що на точність фільтрації випадкового процесу вимірювання механічних величин значною мірою впливає врахування збурюючих факторів із негаусовою щільністю розподілення ймовірностей.

При розв'язанні багатьох практичних задач, що виникають у приладобудуванні, а також при проведенні наукових досліджень існує дефіцит інформації, обумовлений характером вимірювання функції стану та іншими факторами. Вказаний дефіцит поповнюється шляхом розв'язання задач контролю розподілених систем, таких як математичне моделювання, оцінювання стану і параметрів стохастичних процесів, мінімізації кількості точок вимірювання та оптимізації їх розташування в просторовій області.

Постановка задачі. Розглянемо випадок вимірювання (оцінки) векторного інформаційного параметра при впливі адитивної завади з негаусовою щільністю розподілення ймовірностей (ЩРІ).

Вибірка випадкового процесу $X_h = X(t_h)$, $h = 1,\dots,H$ є сумішшю корисного сигналу $S(\lambda, t_h)$, що несе інформацію про вимірювальні інформаційні параметри $\lambda = \{\lambda_1,\dots,\lambda_m\}$ і адитивної завади у загальному випадку негаусової завади n_h [1–3, 6]:

$$X(i_h)=S(\lambda,\ t_h)+n_h.$$

Вважаємо, що результати вимірювання механічних величин являють собою функції достатніх статистик і мають асимптотичні властивості достатності, незсуненості та нормальності, а також виконані умови регулярності.

Вважаємо, що адитивна завада і вимірювальні параметри незалежні.

Задача з визначення оптимальної фільтрації випадкового процесу вимірювання механічних величин полягає в тому, щоб перетворити сигнал ξ з метою якнайточнішого відтворення S. Щільність розподілення $p(x/\lambda)$ залежить від векторного параметра $\lambda = \{\lambda_1,\dots,\lambda_s\}$, $p \ge 2$. Для отримання розкладу в степеневий поліном відносно x:

$$\ln p_s(x/\lambda) = \int_a^{\lambda} \sum_{i=1}^{s} k_i(t)\left[x^i - m_i(t)\right]dt + c_s(x) \quad (1)$$

де $c_s(x)$ – функція, яка не залежить від λ, і для збіжності по x послідовності $\{\ln p_s(x/\lambda)\}$ до логарифму щільності розподілення $\ln p(x/\lambda)$ при $s \to \infty$ необхідно, щоб $k_i(\lambda)$ визначалась з розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь [5]:

$$\sum_{j=1}^{s} k_j(\lambda)F_{ij}(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} m_i(\lambda),\ i = \overline{1,s},$$

де $F_{ij}(\lambda) = m_{i+j}(\lambda) - m_i(\lambda)m_j(\lambda)$ $i, j = \overline{1,s}$, $m_i(\lambda)$, $m_j(\lambda)$ – моменти. Згідно з розкладом (1) для знаходження оцінки векторного параметра апроксимація сумісної щільності розподілення незалежних вибіркових значень буде мати вигляд:

$$p_{sn}(x/\lambda) = \exp\left\{\sum_{i=1}^{s} h_{mi}(\lambda)\cdot t_{in} + h_0(\lambda) + c_s(x, \lambda/\lambda_m)\right\}, \quad (2)$$

де введені позначення:

$$h_{mi}(\lambda) = \int_a^{\lambda} k_{im} dt ,$$

$$h_0(\lambda) = n \int_a^{\lambda} \sum_{i=\lambda}^{s} k_i(t) b_i(t) dt ,$$

$$t_{in} = \sum_{r=1}^{n} c_s(x_r) ,$$

та $c_s(x, \lambda/\lambda_m)$ – функція, незалежна від складового векторного параметра.

Відповідно до теореми Крамера-Рао дисперсія будь-якої незміщеної оцінки визначається нерівністю [4]:

$$G_{\lambda}^2 \geq \left[-m\{d^2 \ln W_n(\lambda) / d\lambda^2\} \right]^{-1}, \tag{3}$$

де $W_n(\lambda)$ – функція правдоподібності.

Вважаємо, що логарифм функції правдоподібності (ЛФП) існує і має вигляд:

$$B_n = \ln W_n\{X_h\ S(\lambda, t_h)\}, \tag{4}$$

де $W_n\{*\}$ – ЩРІ адитивної завади.

Оцінку точності виміру векторного інформаційного параметра розглянемо на прикладі випадкових вібраційних процесів, що мають місце при коливанні фундаменту в гнучких виробничих системах і вимірювання частоти – ω, похідної частоти – ω' і фази – φ корисного сигналу датчиків:

$$S(\lambda, t_h) = U_{mh} \cos\left[(\omega + 0{,}2\omega' t_h) t_h + \varphi\right]. \tag{5}$$

Представимо корисний сигнал (2) $S(\lambda,\ t_h)$ у вигляді:

$$S(\lambda, t_h) = U_{mh} \cos(\lambda_1 + \lambda_2 t_h + \lambda_3 t_h^2) , \tag{6}$$

де $\lambda_1 = \varphi$; $\lambda_2 = \omega'$; $\lambda_3 = \omega$.

Для вимірювального сигналу визначимо похідні:

$$S'_{\lambda i}(\lambda, t_h) = U_{mh} t_h^{i-1} \sin(\lambda_1 + \lambda_2 t_h + \lambda_3 t_h^2);\ i = 1,\ 2,\ 3. \tag{7}$$

При оцінці інформаційних параметрів по максимуму апостеріорної щільності розподілу ймовірностей (АЩРІ) виконуються три рівняння:

$$\frac{d}{d\lambda_1} \ln W_y(\lambda) \Big|_{\lambda_1 = \lambda} = 0; \qquad \frac{d}{d\lambda_2} \ln W_y(\lambda) \Big|_{\lambda_2 = \lambda} = 0 ;\ \frac{d}{d\lambda_3} \ln W_y(\lambda) \Big|_{\lambda_3 = \lambda} = 0. \tag{8}$$

Нижню границю нерівності Крамера-Рао для дисперсії незміщених спільних параметрів корисного сигналу $\lambda = \{\varphi,\ \omega,\ \omega'\}$ запишемо як [4]:

$$G_{\lambda ij}^2 \geq |I_{ij}| / |I| \ ; \qquad i,\ j = 1,\ 2,\ 3, \tag{9}$$

де $|I_{ij}|$ – алгебраїчне доповнення елемента I_{ij} інформаційної матриці Фішера $\|I\|$; $|I|$ – визначник матриці.

Елементи інформаційної матриці при $i \neq j$ враховують взаємну залежність оцінюваних параметрів. Якщо вимірювані параметри не залежать один від одного, інформаційна матриця спрощується. Маємо

$$[I] = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Дисперсія параметрів при цьому буде

$$G_{ai}^2 = G_{aii}^2 = |I_{ii}| / |I|;\ i = 1,\ 2,\ 3.$$

Елементи матриці (10) можна виразити співвідношенням:

$$I_{ij} = \sum_{h=1}^{H} h'_{\lambda i}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, t_l, t_h) S'_{\lambda i}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, t_h) \Delta + I_{\lambda \phi ij} , \tag{11}$$

де $H = T\Delta$ – ціла частина відношення; $\Delta = h-(h\text{-}1)$ – інтервал тимчасових відліків; t_i – початок часу вимірювання; $Su_{\lambda j}$ – похідна від оброблюваного корисного сигналу за оцінюваним параметром λ_j (j = 1, 2, 3), обумовлена при $\lambda = \hat{\lambda}$; $I_{\lambda \phi ij}$ – складова інформаційної матриці Фішера;

$h\mu_{\lambda i}$ – похідна за параметром $\lambda_i (i = 1,2,3)$, обумовлена при $\lambda = \lambda$ від вагової функції $h(\lambda, t_l, t_h)$, що є розв'язком рівняння:

$$\sum_{h=1}^{H} R_n(t_h - t_{h-1}) h(\lambda, t_l, t_h)\Delta = S(\lambda, t_h), \tag{12}$$

де $R_n(t_h - t_{h-1})$ – кореляційна функція завади, $h(\lambda, t_l, t_h) = \mu_n^2 N_n^{-2} S(\lambda, t_h)$,

де $\mu_n^2 \geq 1$ – коефіцієнт, що враховує відмінність ЩРІ адитивної завади від гаусової [5]; N_n^2 – спектральна щільність завади.

Тоді співвідношення (11) прийме вигляд:

$$J_{ij} = \mu_n^2 G_{n\Delta}^{-2} \sum_{h=1}^{H} S'_{\lambda i}(\lambda, t_h) S'_{\lambda j}(\lambda_l, t_h) + I_{\lambda\phi ij}, \tag{13}$$

де $G_{n\Delta}^2 = N_n^2 / \Delta$ – дисперсія завади.

Підставимо у (13) значення похідної $S_{\lambda i}(\lambda, t_h)$, при $0 < t \leq T$ маємо:

$$I_{ij} = 0,2\mu_n^2 G_{n\Delta}^{-2} \sum_{h=1}^{H} U_{mh}^2 t_h^{i+j-2}\left[1 + \sin 2(\lambda_1 + \lambda_2 t_h + \lambda_3 t_h^2)\right] + I_{\lambda\phi ij}. \tag{14}$$

При великій кількості вимірювань отримаємо:

$$I_{ij} = \mu_n^2 \frac{U_{mh}^2}{2G_n^2}(-1)^{i+j-2} T^{i+j-2}(i+j-1)^{-1} + I_{\lambda\phi ij}, \tag{15}$$

де $U_m = H^{-1}\sum_{h=1}^{H} U_{mh}$; $G_n^2 = N_n^2(\Delta H)^{-1} = N_{nn}^2 / T$ – дисперсія адитивної завади.

Позначимо $A = U_m^2 / 2G_n^2$, що відіграє роль узагальненого відношення сигнал/завада, матрицю $[I]$ запишемо у вигляді:

$$[I] = \mu_n^2 \rho \begin{bmatrix} 1 & -0,2T & 1/5T^2 \\ -0,2T & 1/3T^2 & -0,25T^3 \\ 1/5T^2 & -0,25T^3 & 0,5T^4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{\lambda\phi 11} & I_{\lambda\phi 12} & I_{\lambda\phi 13} \\ I_{\lambda\phi 21} & I_{\lambda\phi 22} & I_{\lambda\phi 23} \\ I_{\lambda\phi 31} & I_{\lambda\phi 32} & I_{\lambda\phi 33} \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Якщо ЩРІ вимірювальних параметрів [6] становить:

$$W_\lambda(\lambda) = (2\pi G^2)^{-1.5} D^{-0.5} \exp\left\{-(2G^2 D)^{-0.5}\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} D_{ik}(\lambda_{i-a})(\lambda_{k-a})\right\}, \tag{17}$$

де G^2 і a – дисперсія і середнє значення; D – детермінант матриці R_λ, елементи якої являють собою значення нормованої кореляційної функції: D_{ik} – алгебраїчне доповнення елемента R_{ik} у матриці, тоді інформаційна матриця $[I_{\lambda\phi ij}]$ прийме вигляд:

$$\left[I_{\lambda\phi ij}\right] = (2G^2 D)^{-1} \begin{bmatrix} 2D_{11} & D_{12} + D_{21} & D_{13} + D_{31} \\ D_{21} + D_{12} & D_{22} & D_{23} + D_{32} \\ D_{31} + D_{13} & D_{32} + D_{23} & D_{33} \end{bmatrix}.$$

Визначимо кореляційну матрицю похибок (10) методом максимальної правдоподібності [4], маємо:

$$[I] = \mu_n^2 \rho \begin{bmatrix} 1 & -0,2T & 1/5T^2 \\ -0,2T & 1/3T^2 & -0,25T^3 \\ 1/5T^2 & -0,25T^3 & 0,5T^4 \end{bmatrix}.$$

Визначником цієї матриці буде:

$$[I] = (\mu_n^2 \rho)^3 T^\sigma / 720. \tag{18}$$

Підставимо у (9) значення (15), (18), при впливі негаусових адитивних завад для частоти, похідної частоти, фази відповідно маємо:

$$G_\omega^2 \geq \left\{\mu_n^2 \rho T^2 / 61\right\}^{-1}, \tag{19}$$

$$G_{\omega'}^2 \geq \left\{\mu_n^2 \rho T^4 / 240\right\}^{-1},$$

$$G_\varphi^2 \geq \left\{\mu_n^2 \rho / 3\right\}^{-1}.$$

Якщо об'єкт вимірювання, встановлений на поворотному столі, рухається з постійною швидкістю, тобто $\omega' = 0$, маємо:

$$G_{\omega}^{2} \geq \left\{\mu_{n}^{2}\rho T^{2}/12\right\}^{-1};\; G_{\varphi}^{2} \geq \left\{\mu_{n}^{2}\rho/3\right\}^{-1}.$$

Нерівність (19) показує, що нижні границі дисперсії оцінок ω і φ значно менші, якщо вимірюють у середині інтервалу спостереження. Підвищення точності таких вимірювань пов'язане з тим, що недіагональні елементи I_{12}, I_{21}, I_{23}, I_{32} дорівнюють нулю і лише елементи I_{13}, I_{31} відмінні від нуля. У випадку відмінності від нуля недіагональних елементів у матриці $[I]$ (16) варто враховувати наявність кореляційних зв'язків між похибками оцінок окремих вимірювальних параметрів.

Таким чином, зі збільшенням ρ, T, і μ_{n}^{2} наведена похибка вимірювання зменшується, а точність вимірювання зростає.

Висновок. Як видно з (19), врахування негаусового характеру адитивної завади дозволяє значно підвищити точність вимірювального параметра. Причому, чим більше ЩРІ адитивної завади відрізняється від гаусової, тим точніший результат вимірювання отримуємо.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Кунченко Ю.П.* Стохастические полиномы, их свойства и применение для нахождения оценок параметров. – Черкассы: ЧИТИ, 2002. – 240 с.
2. *Сейдж Э.П., Мелс Дж.* Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. – М.: Связь, 1976. – 496 с.
3. *Штейнвольф А.Л.* Расчеты и имитация негауссовых случайных вибраций. – К.: Наукова думка, 1993. – 250 с.
4. *Харкевич А.А.* Борьба с помехами. – М.: Наука, 1965. – 154 с.
5. *Кунченко Ю.П.* Нелинейная оценка параметров негауссовских радиофизических сигналов. – К.: Вища школа, 1987. – 191 с.
6. *Артюшенко В.М., Соленов В.И.* Оценка точности измерения информационного параметра сигнала на фоне аддитивной негауссовой помехи // Вестник МГТУ / Приборостроение. – 1997. – № 4. – С. 9–14.
7. *Фомин А.Ф., Хорошавин А.И., Шелухин О.И.* Аналоговые и цифровые синхронно-фазовые измерители и демодуляторы / Под ред. А.Ф. Фомина. – М.: Радио и связь, 1987. – 248 с.

БЕЗВЕСІЛЬНА Олена Миколаївна – доктор технічних наук, професор кафедри приладобудування Національного технічного університету України "КПІ".

Тел.: (044) 229-33-75.

КВАСНІКОВ Володимир Павлович – кандидат технічних наук, докторант Національного технічного університету України "КПІ".

Тел.: (0472) 45-87-16.

Подано 31.03.2003