

УДК 539.374

Н.І. Вовкодав, к.ф.-м.н., доц.

Національний університет харчових технологій

І.Ф. Киричок, д.ф.-м.н.

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України

В.В. Михайленко, д.ф.-м.н.

Житомирський державний технологічний університет

ПРО ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ ТА ВІБРОРОЗІГРІВ КІЛЬЦЕВИХ П'ЄЗОКЕРАМІЧНИХ ПЛАСТИН З РАДІАЛЬНОЮ ПОЛЯРИЗАЦІЄЮ

Розглядається задача про радіальні коливання та вібророзігрів кільцевої пластинки з в'язкопружної п'єзокераміки, що поляризована вздовж радіуса та навантажена на торцевих поверхнях гармонічною в часі різницею електричного потенціалу. Враховується температурна залежність електромеханічних комплексних характеристик в діапазоні температур до точки Кюрі включно. Нелінійна зв'язана задача розв'язується чисельно кроковим в часі методом з використанням методів дискретної ортогоналізації для інтегрування рівнянь електромеханіки та кінцевих різниць – для рівнянь теплопровідності.

П'єзоелектричні елементи, що працюють в режимі гармонічних коливань як різного роду перетворювачі електромеханічної енергії, датчики, збуджувачі тощо, широко використовуються в сучасній техніці. Для дослідження їх електромеханічної поведінки необхідно враховувати в'язкопружні властивості матеріалу, які при гармонічному деформуванні тіла можна описати концепцією комплексних характеристик [1]. В залежності від умов теплообміну, рівня гармонічного навантаження, електромеханічних і теплових властивостей матеріалу електромеханічна поведінка п'єзоелемента через внутрішні втрати супроводжується дисипативним розігрівом, температура якого може досягати значень температури деполяризації п'єзокераміки (точки Кюрі). Вплив неоднорідностей, що обумовлені частковою тепловою деполяризацією п'єзоелемента на електротермомеханічну поведінку поляризованих по товщині п'єзокерамічних пластин, циліндричних та сферичних тіл при вимушених коливаннях досліджувався в роботах [2]–[6] та ін. В даній роботі в динамічній постановці розглядається задача про електромеханічні коливання та дисипативний розігрів кільцевої пластинки з поляризованої вздовж радіуса в'язкопружної п'єзокераміки з врахуванням залежності електромеханічних характеристик від температури.

Розглядається кільцева пластинка малої товщини h з внутрішнім $r = r_1$ і зовнішнім $r = r_2$ радіусами. Циліндричні поверхні пластинки покриті тонкими електродами та навантажені гармонічною в часі різницею електричного потенціалу $\tilde{\psi}(r_1, t) - \tilde{\psi}(r_2, t) = \text{Re}(2 \cdot V_0 \cdot e^{i\omega t})$, де $V_0 = \text{const}$; ω – колова частота; t – час. При цьому в пластинці реалізуються осесиметричні електромеханічні коливання вздовж радіуса і плоский напружений стан $\sigma_z = 0$, а складові електричної індукції D_z , D_θ , що перпендикулярні напрямку поляризації, такі, що ними можна знехтувати [1]. Припускається, що розігрів, обумовлений внутрішніми втратами, в залежності від рівня навантаження та умов теплообміну може досягати критичних значень $T_{\text{кр}}$, при яких п'єзокераміка деполяризується. На зовнішніх поверхнях пластинки виконуються умови конвективного теплообміну з середовищем, температура якого дорівнює початковій температурі тіла. Температура пластинки приймається постійною по товщині. Механічно краї $r = r_1$, $r = r_2$ вільні від напружень. Дисипативні властивості п'єзокераміки описуються концепцією комплексних модулів, що відомі в широкому діапазоні температур включно до критичних значень.

Задача про гармонічні радіальні коливання та дисипативний розігрів пластинки відносно комплексних польових величин (множник $e^{i\omega t}$ опускається) зводиться до розв'язку рівнянь механічних коливань і електростатики [1]:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{1}{r} \sigma_r - \sigma_\theta + \rho\omega^2 u = 0, \quad \frac{dD_r}{dr} + \frac{1}{r} D_r = 0; \quad (1)$$

співвідношень електров'язкопружності:

$$\varepsilon_r = S_{33}^I \cdot \sigma_r + S_{13}^I \sigma_\theta + d_{33}^I E_r; \quad \varepsilon_\theta = S_{13}^I \sigma_r + S_{33}^I \sigma_\theta + d_{31}^I E_r, \\ D_r = d_{33}^I \cdot \sigma_r + d_{31}^I \cdot \sigma_\theta + \varepsilon_{33}^I \cdot E_r; \quad (2)$$

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad E_r = -\frac{d\psi}{dr}; \quad (3)$$

та усередненого за період коливань і за товщиною пластинки рівняння теплопровідності:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2 \cdot \gamma_0}{h^2} \cdot (T - T_0) + \bar{W} \quad (4)$$

Електромеханічні і теплові граничні умови мають вигляд:

$$\sigma_r = 0, \psi = V_0(r = r_1); \sigma_r = 0, \psi = -V_0(r = r_2); \quad (5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \pm \frac{\alpha_n}{\lambda} \cdot (T - T_n) \quad (r = r_1; r = r_2); T = T_n \quad (t = 0). \quad (6)$$

У співвідношеннях (1)–(6) позначено:

$$\begin{aligned} \bar{W} = & \frac{\omega}{2\lambda} \left[S_{33}'' \cdot (\sigma_r'^2 + \sigma_r''^2) + 2 \cdot S_{13}'' \cdot (\sigma_r' \sigma_\theta' + \sigma_r'' \sigma_\theta'') + S_{11}'' \cdot (\sigma_\theta'^2 + \sigma_\theta''^2) \right] + \\ & + \frac{\omega}{2\lambda} \left[2 \cdot d_{33}'' \cdot (\sigma_r' E_r' + \sigma_\theta'' E_r'') + 2d_{31}'' \cdot (\sigma_r' E_r' + \sigma_\theta'' E_r'') + \varepsilon_{33}'' \cdot (E_r'^2 + E_r''^2) \right] - \end{aligned} \quad (7)$$

дисипативна функція; $\sigma_r = \sigma_r' + i\sigma_r''$, $\sigma_\theta = \sigma_\theta' + i\sigma_\theta''$ – комплексні амплітуди радіального і колового напружень; $u = u' + iu''$ – радіальне переміщення; $D_r = D_r' + iD_r''$, $E_r = E_r' + iE_r''$, $\psi = \psi' + i\psi''$ – амплітуди індукції, напруженості та потенціалу електричного поля; ρ – густина п'єзокераміки; λ і a – коефіцієнти тепло- і температуропровідності; α_n ($n=0, 1, 2$) – коефіцієнти теплообміну на поверхнях $z = \pm h/2$, $r = r_1$, $r = r_2$ відповідно;

$$S_{mn}^t = S_{mn}' - iS_{mn}'' = S_{mn}'(1 - i\delta_{mn}^s); \quad d_{mn}^t = d_{mn}' - id_{mn}'' = d_{mn}'(1 - i\delta_{mn}^d); \quad (8)$$

$$\varepsilon_{33}^t = \varepsilon_{33}' - i\varepsilon_{33}'' = \varepsilon_{33}'(1 - i\delta_{33}^e) \quad (m, n = 1, 3)$$

– залежні від температури податливості, п'єзomodулі та електрична проникність відповідно; $\gamma_0 = \alpha_0 h / \lambda$; $i = \sqrt{-1}$.

Для розв'язку поставленої задачі електротермов'язкопружності (1)–(7) запишемо рівняння електромеханіки (1)–(3) у вигляді системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_r}{dr} = & -\frac{1 - \nu_s}{r} \sigma_r + \left(\frac{E_s}{r^2} - \rho\omega^2 \right) \cdot u - \frac{d_s}{r} D_r; \\ \frac{du}{dr} = & \left(S_{33}^t + S_{13}^t \nu_s - \nu_s d_{33} \right) \sigma_r - \frac{\nu_{13}^t + K_{33}^2}{(1 - K_{31}^2) r} u + \frac{\nu_e}{1 - K_{11}^2} D_r; \\ \frac{d\psi}{dr} = & \nu_e \sigma_r + \frac{d_s}{r} u - \frac{1}{\varepsilon_{33}^t \cdot (1 - K_{31}^2)} D_r; \\ \frac{dD_r}{dr} = & -\frac{1}{r} D_r, \end{aligned} \quad (9)$$

де

$$\begin{aligned} \nu_{13}^t = & -\frac{S_{13}^t}{S_{11}^t}; \nu_s = \frac{\nu_{13}^t + K_{33}^2}{1 - K_{31}^2}; E_s = \frac{1}{S_{11}^t (1 - K_{31}^2)}; d_s = \frac{d_{31}}{\varepsilon_{33}^t} E_s; \\ K_{31}^2 = & \frac{d_{31}^2}{\varepsilon_{33}^t S_{11}^t}; K_{33}^2 = \frac{d_{33} d_{31}}{\varepsilon_{33}^t S_{11}^t}; \nu_e = \frac{1}{\varepsilon_{33}^t} (d_{33} + \nu_{13}^t d_{31}). \end{aligned}$$

Через залежність електромеханічних характеристик (8) від температури систему (9) з граничними умовами (5) необхідно розв'язувати сумісно з рівняннями теплопровідності (4), (7) при умовах (6), як зв'язану нелінійну задачу. Для цієї мети використовується кроковий за часом метод [1] з використанням засобу продовження за параметром частоти навантаження. При цьому на кожному кроці за часом рівняння електромеханіки (9) при умовах (5), після розділу їх на дійсну і уявну складові, розв'язуються методом дискретної ортогоналізації [7]. Рівняння теплопровідності (4), (6) після обчислення дисипативної функції (7) інтегрується з використанням явної схеми методу кінцевих різниць.

В числових розрахунках використовувались експериментальні результати для п'єзокераміки ПТС-7БС-2 [8]. При цьому температурні залежності електромеханічних модулів від температури апроксимувались такими виразами:

$$\begin{aligned}
S_{mn}' &= S_{mn}^0 \cdot [A_{mn} + B_{mn} T - T_R + C_{mn} \cdot T - T_R^2]; \\
\delta_{mn}^s &= \delta_{mn}^0 \cdot [a_{mn} + b_{mn} T - T_R + \bar{S}_{mn} T - T_R^2 + \bar{\bar{S}}_{mn} (T - T_R)^3]; \\
d_{mn}' &= d_{mn}^0 \cdot [P_{mn} + R_{mn} T - T_R + L_{mn} T - T_R^2]; \\
\delta_{mn}^d &= \delta_{mn}^0 [p_{mn} + r_{mn} T - T_R + l_{mn} T - T_R^2]; \\
\varepsilon_{33}' &= \varepsilon_0 [e_1 + e_2 T - T_R + e_3 T - T_R^2]; \\
\delta_{33}^e &= \delta_0 [\delta_1 + \delta_2 T - T_R + \delta_3 T - T_R^2]; \quad (m, n = 1, 3).
\end{aligned}
\tag{10}$$

Тут

$$\begin{aligned}
S_{11}^0 &= 12,5 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}; \quad S_{13}^0 = -5,42 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}; \quad S_{33}^0 = 148 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}; \\
d_{33}^0 &= 330 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}/\text{М}; \quad d_{31}^0 = -160 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}/\text{М}; \quad \varepsilon_0 = 21 \cdot 10^2 \varepsilon_0; \\
\varepsilon_0 &= 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф}/\text{М}; \quad \delta_{11}^0 = 0,16 \cdot 10^{-2}; \quad \delta_{13}^0 = -0,15 \cdot 10^{-2}; \quad \delta_{33}^0 = 0,125 \cdot 10^{-2}; \\
\delta_{31}^0 &= 0,4 \cdot 10^{-2}; \quad \delta_{33}^0 = 0,3 \cdot 10^{-2}; \quad \delta_0 = 0,35 \cdot 10^{-2}; \quad T_R = 20^\circ \text{С}.
\end{aligned}$$

Числові значення решти коефіцієнтів в інтервалі температур від 20°С до 160°С такі:

$$\begin{aligned}
A_{mn} &= a_{mn} = P_{mn} = p_{mn} = e_1 = \delta_1 = 1; \quad B_{11} = 0,3077 \cdot 10^{-3}; \quad B_{33} = 0,80856 \cdot 10^{-3}; \\
B_{13} &= -0,516167 \cdot 10^{-3}; \quad C_{11} = 0; \quad C_{33} = -0,784266 \cdot 10^{-5}; \quad C_{13} = -0,779739 \cdot 10^{-5}; \\
b_{11} &= 0,6155 \cdot 10^{-3}; \quad b_{33} = 0,290762 \cdot 10^{-1}; \quad b_{13} = 1,38333 \cdot 10^{-2}; \quad \bar{S}_{11} = 0,41575 \cdot 10^{-4}; \\
\bar{S}_{33} &= -0,441429 \cdot 10^{-3}; \quad \bar{S}_{13} = -7,5 \cdot 10^{-5}; \quad \bar{\bar{S}}_{33} = 0,22381 \cdot 10^{-5}; \quad \bar{\bar{S}}_{11} = \bar{\bar{S}}_{13} = 0; \\
R_{31} &= 0,219 \cdot 10^{-2}; \quad R_{33} = 0,35714 \cdot 10^{-2}; \quad L_{31} = L_{33} = 0; \quad r_{31} = 1,198 \cdot 10^{-2}; \\
r_{33} &= 0,670635 \cdot 10^{-2}; \quad l_{31} = 1,823 \cdot 10^{-4}; \quad l_{33} = 0,128968 \cdot 10^{-3}; \quad e_2 = 0,111 \cdot 10^{-3}; \\
e_3 &= 0,84256 \cdot 10^{-4}; \quad \delta_2 = 0,119 \cdot 10^{-1}; \quad \delta_3 = 0,119 \cdot 10^{-3}.
\end{aligned}$$

В інтервалі температур від 160°С до 180°С необхідно покласти:

$$\begin{aligned}
A_{11} &= -21,92; \quad A_{33} = -10,52; \quad A_{13} = -13,69; \quad B_{11} = 0,29504; \quad B_{33} = 0,1625; \\
B_{13} &= 0,206642; \quad C_{11} = -0,1024 \cdot 10^{-2}; \quad C_{33} = -0,574324 \cdot 10^{-3}; \quad C_{13} = -0,738 \cdot 10^{-3}; \\
a_{11} &= -111,625; \quad a_{33} = -327,84; \quad b_{11} = 1,57619; \quad b_{33} = 4,488; \\
\bar{S}_{11} &= -5,46875 \cdot 10^{-3}; \quad \bar{S}_{33} = 0,0152; \quad \bar{\bar{S}}_{11} = \bar{\bar{S}}_{13} = \bar{\bar{S}}_{33} = 0; \\
P_{31} &= 83,2205; \quad P_{33} = 0,9091 \cdot 10^2; \quad R_{31} = -1,1678938; \quad R_{33} = -1,2644; \\
L_{31} &= 0,4042 \cdot 10^{-2}; \quad L_{33} = 0,4015 \cdot 10^{-3}; \quad P_{31} = -21,75; \quad P_{33} = 26,8667; \\
r_{31} &= 0,2; \quad r_{33} = 0,44; \quad l_{31} = 0; \quad l_{33} = 2 \cdot 10^{-3}; \quad e_1 = 9,66667; \quad e_2 = -0,5 \cdot 10^{-2}; \\
e_3 &= 0,7143 \cdot 10^{-4}; \quad \delta_1 = -130; \quad \delta_2 = 1,66429; \quad \delta_3 = -0,5 \cdot 10^{-2}.
\end{aligned}$$

Крім того, для розглядуваної п'єзокераміки густина $\rho = 7520 \text{ кг}/\text{м}^3$, $\lambda = 1,25 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{град})$. Геометричні розміри пластинки такі: $h = 0,01 \text{ м}$; $r_2 = 0,05 \text{ м}$; $l = r_2 - r_1 = 0,02 \text{ м}$. Для виявлення максимального впливу вібророзігріву на електротермомеханічну поведінку п'єзоактивної пластинки розглядався випадок, коли на торці $r = r_2$ задана температура $T = T_c = 20^\circ \text{С}$, а інші поверхні теплоізовані.

На рис. 1 наведені криві 1, 2, 3, 4 температурно-частотних характеристик (ТЧХ) максимального значення стаціонарної температури розігріву ($r = at/l = 1,5$), що досягається на торці $r = r_1$, в околі частоти першого резонансу радіальної моди коливань пластинки, розраховані при $V_0 = 25; 37,5; 50; 100 \text{ В}$ відповідно. Штрихові криві 1, 2 характеризують ТЧХ при незалежних від температури властивостях п'єзокераміки. Видно, що в інтервалі температур до 160°С , в якому податливості п'єзокераміки збільшуються з ростом температури, ТЧХ пластинки представляють собою нелінійну характеристику "м'якого" типу [1]. Проте при навантаженнях, коли температура розігріву досягає і переважає значення $T = 160^\circ \text{С}$, починаючи з якої податливості зменшуються, з'являються додаткові високотемпературні ($3_3 - 3_3; 4_3 - 4_3$) гілки [2], [3]. Так, наприклад, для температурного процесу, що характери-

ується кривою 3, зі збільшенням частоти навантаження має місце стрибок з точки 3_1 низькотемпературної гілки в точку 3_2 високотемпературної гілки. З точки 3_2 при подальшому збільшенні частоти навантаження процес по кривій 3 рухається вправо, а при зменшенні – вліво до точки 3_3 , з якої відбувається стрибок в точку 3_4 низькотемпературної гілки. Проте, якщо з точки 3_3 збільшувати частоту навантаження, температурний процес буде відповідати високотемпературній гілці 3_3-3_5 зі стрибком з точки 3_5 в точку 3_6 більш низької температурної гілки. Високотемпературні гілки 3_3-3_5 , 4_3-4_5 мають вигляд “жорсткої” частотної характеристики. Обумовлено це явище, ймовірно, зниженням в інтервалі температур від $160\text{ }^{\circ}\text{C}$ до $180\text{ }^{\circ}\text{C}$ значень комплексних податливостей п'єзокераміки [8]. Це якісно узгоджується з результатами модельної задачі про динамічну поведінку стрижня з температурно залежними властивостями [9].

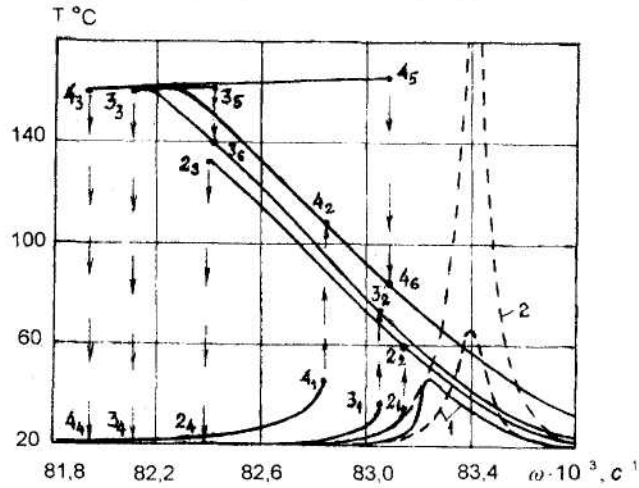


Рис. 1

На рис. 2 і рис. 3 показані криві розподілу вздовж радіуса $x = (r - r_1)/l$ пластинки дійсних і уявних складових електричного потенціалу $\bar{\psi}' = \psi' / V_0$ ($V_0 = 25\text{ В}$) та індукції D_i'' [(Ф·В)/м] при незалежних (штрихові лінії) і залежних (суцільні лінії) від температури властивостях п'єзокераміки. Криві 1 розраховані для пластинки з радіусом $r_2 = 0,05\text{ м}$, шириною $l = 0,004\text{ м}$ на резонансній частоті $\omega_p = 0,6808 \cdot 10^5\text{ с}^{-1}$, а криві 2 – при $r_2 = 0,05\text{ м}$, $l = 0,02\text{ м}$, $\omega_p = 0,8341 \cdot 10^5\text{ с}^{-1}$.

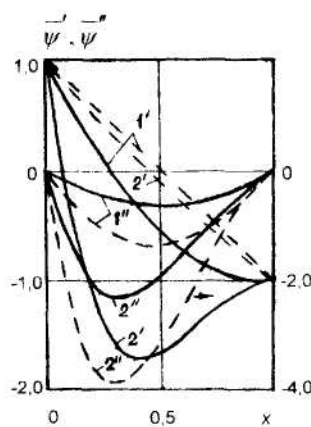


Рис. 2

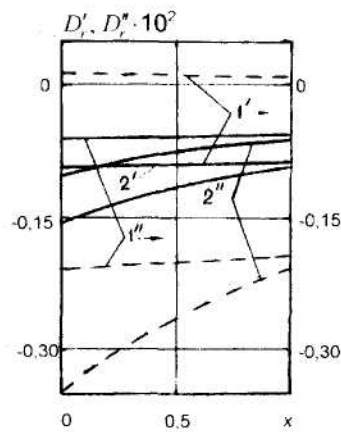


Рис. 3

Розрахунки та аналіз кривих на рис. 2 і рис. 3 показують, що при заданих значеннях $\psi(r_1) = V_0$, $\psi(r_2) = -V_0$ розподіл електричних потенціалу та індукції вздовж радіуса п'єзопластини великої ширини (криві 2) є суттєво нелінійним, що обумовлено вкладом деформаційних характеристик при електромеханічних коливаннях. Тут більш помітно і вплив залежності властивостей п'єзокераміки від температури. При зменшенні ширини l п'єзопластинки розподіл елект-

ричного потенціалу прямує до лінійного (рис. 2), а індукції (рис. 3) – до постійної величини. Останнє узгоджується з прийнятим в теорії поляризованих по товщині п'єзооболонок припущенням про незалежність від товщинної координати складової індукції, що співпадає з напрямком поляризації [1].

Зазначимо, що, як показали числові розрахунки, гармонічні коливання розглянутої п'єзопластинки при температурах близьких до $T = 160^{\circ}\text{C}$ супроводжуються великим рівнем механічних напружень, що досягають межі пропорційності. Тому високотемпературні ділянки ТЧХ (рис. 1) не будуть реалізовані, оскільки п'єзоелемент втратить працездатність швидше через втомне руйнування, ніж проявляться деполяризаційні явища.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф. Механика связанных полей в элементах конструкций. Электротермовязкоупругость. – К.: Наук. думка, 1988. – Т. 4. – 320 с.
2. Карнаухов В.Г., Козлов В.И., Михайленко В.В., Михайленко С.В. Планарные колебания пьезокерамической пластины с учетом деполяризации материала, вызванной температурой виброразогрева // Прикл. механика. – К. – 1994. – 30. – № 3. – С. 67–73.
3. Киричок И.Ф., Венгренюк Ю.А. О термоэлектромеханическом гармоническом поведении оболочек вращения из пьезоактивных материалов с учетом их температурной зависимости и деполяризации // Прикл. механика. – 1998. – 34. – № 4. – С. 48–52.
4. Венгренюк Ю.А., Киричок И.Ф., Обизюк И.И. Резонансные колебания и диссипативный разогрев пьезоэлектрических сферических оболочек с учетом явления тепловой деполяризации // Акуст. вестник. – 1999. – 2. – № 2. – С. 3–10.
5. Киричок И.Ф., Карнаухова Т.В. Квазистатическая задача термовязкоупругости частично деполяризованного пьезокерамического цилиндра при гармоническом нагружении // Прикл. механика. – К. – 1999. – 35. – № 3. – С. 42–48.
6. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф., Козлов В.И. Электромеханические колебания и диссипативный разогрев вязкоупругих тонкостенных элементов с пьезоэффектом // Прикл. механика. – 2001. – 37. – № 2. – С. 1–35.
7. Григоренко Я.М., Мукозд А.П. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. – К.: Выща школа, 1983. – 278 с.
8. Болкисев А.М., Карлаш В.Л., Шульга Н.А. О зависимости свойств пьезокерамических материалов от температуры // Прикл. механика. – 1984. – 20. – № 7. – С. 70–74.
9. Сенченков И.К. Динамическое поведение стержня с учетом зависимости свойств материала от температуры // Прикл. механика. – К. – 1984. – 20. – № 2. – С. 85–92.

ВОВКОДАВ Наталія Іванівна – кандидат фізико-математичних наук, доцент Національного університету харчових технологій.

Наукові інтереси:

- розв'язок зв'язаних задач електромеханіки пластин та оболонок із в'язкопружних п'єзоактивних матеріалів з врахуванням взаємодії механічних, електричних і теплових полів при гармонічному навантаженні.

Тел.: 227-96-31.

КИРИЧОК Іван Федорович – доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України.

Наукові інтереси:

- розробка теорії та методів розв'язку зв'язаних задач термомеханіки і електромеханіки пластин та оболонок із в'язкопружних пасивних і п'єзоактивних матеріалів з врахуванням взаємодії механічних, електричних і теплових полів при гармонічному навантаженні.

Тел.: 441-77-63.

МИХАЙЛЕНКО Василь Васильович – доктор фізико-математичних наук, завідувач кафедри вищої математики Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:

- термомеханіка в'язкопружних п'єзоелектричних матеріалів та елементів.