ПРИЛАДИ

УДК 621.314

В.С. Смирнов, д.т.н.
Національний технічний університет України "КПІ"

ТЕОРЕТИЧНІ ПОЛОЖЕННЯ БІЛІНІЙНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ІНВАРІАНТНИХ ПЕРЕТВОРЮВАЛЬНИХ СИСТЕМ АВТОНОМНИХ ОБ'ЄКТІВ

В роботі розроблений метод аналізу інваріантних перетворювальних систем із змінною структурою, який використовує білінійні моделі. Обґрунтована можливість представлення структури перетворювача за допомогою білінійної математичної моделі. Рішення білінійної системи передбачає використання теорем Кемпбела Хаусдорфа та Келі-Гамільтона за допомогою теорії груп Лі. Метод може бути використаний для аналізу перехідних і сталих процесів у регульованих перетворювачах з багаторазовою модуляцією.

Автономні об'єкти (АО) впроваджуються в різних сферах виробничої діяльності людини, замінюючи його в умовах, що характеризуються тривалим та інтенсивним інформаційним навантаженням. При цьому зростання інформаційної пропускної спроможності визначило збільшення енергоємності АО та зростання вимог до якості живильної електроенергії. Широкий діапазон функціонального застосування АО, різноманітні задачі, що розв'язуються ними, обумовили використання в якості первинних систем електропостачання АО різних джерел енергії, що відрізняються видом електроенергії, яка виробляється. При цьому сучасні АО відрізняються великою кількістю споживачів, які вимагають для забезпечення нормального функціонування енергію певного виду і якості. Тому системи вторинного електроживлення АО мають забезпечувати перетворення електроенергії, що надходить від первинних джерел енергії, в електроенергію необхідного для її споживачів виду і якості з заданими параметрами енергетичних координат.

До системи вторинного електроживлення АО при цьому пред'являється вимога реалізації заданих характеристик функціонування за умови найбільш повного забезпечення інваріантності вихідних енергетичних координат до процесів у первинних джерелах енергії та споживачах, особливо у динамічних режимах. Реалізація заданих характеристик функціонування передбачає інваріантність вихідних енергетичних координат систем електроживлення не лише до вхідних збурень, але й до виду перетворюваної електроенергії, що обумовлює необхідність розширення функціональних і динамічних можливостей систем. При цьому відсутність єдиного методологічного підходу до побудови й аналізу інваріантних систем електроживлення з заданими характеристиками функціонування значно ускладнює задачу їх створення і не дозволяє забезпечити реалізацію вимог, які пред'являються до таких систем. У зв'язку з цим набуває важливого значення розробка методів побудови та дослідження ефективних інваріантних систем електроживлення з заданими характеристиками функціонування, що забезпечують високі техніко-економічні показники АО.

До складу систем електроживлення (СЕЖ) АО, як правило, входить низка напівпровідникових перетворювачів (НП) параметрів електроенергії, які служать для узгодження джерел електроенергії та споживачів за видом електроенергії, її якості та номінальним значенням енергетичних координат.

При цьому особливе значення надається не лише покращенню масогабаритних показників НП, але й забезпеченню заданих характеристик їх функціонування. Крім того, варто підкреслити тенденцію до розширення функцій, покладених на засоби керування, які все частіше залучаються до розв'язання задач енергетичного характеру. При цьому ефективним засобом забезпечення заданих характеристик НП є використання положень теорії інваріантності [1, 2, 6]. Проте використання положень теорії інваріантності при побудові НП модуляційного типу ускладнено, що пояснюється нелінійністю дискретних систем автоматичного керування, якими є сучасні НП. До цього часу не вирішено багато питань теоретичного і практичного характеру, пов'язаних зі створенням інваріантних НП. Особлива увага приділяється розробці теоретичних основ аналізу НП з багаторазовою модуляцією [7]. Крім того, актуальною проблемою керування НП є збереження заданих характеристик функціонування при апріорній неповноті або відсутності інформації про властивості об'єкта керування, що обумовлює необхідність сумісного застосування адаптивного підходу і методів керування, що використовують нечітку логіку.

Одним з перспективних напрямків на шляху створення теорії аналізу нелінійних перетворювальних систем є теорія білінійних моделей. Нелінійні системи, приведені до білінійного виду, займають важливе місце у математичній теорії систем. Тому побудова методики, орієнтованої на білінійне моделювання нелінійних процесів, є важливою науковою задачею, рішення якої дозволяє розробити єдиний методологічний підхід до одержання умов інваріантності, сформульований у вигляді вимоги незалежності рішення системи диференціальних рівнянь, що описує НП, від вектора впливових координатно-параметричних збурень. Керований НП модуляційного типу виконує дві функції принципово різної природи – енергетичної та інформаційної. У відповідності до цього у структурі НП функціонально можна виділити силовий тракт (СТ) і систему керування (СК). Математично обидві частини структури НП пов'язані загальною функцією – варіантою керування $\mathrm{var}(\alpha^{\tau})$ (рис. 1).

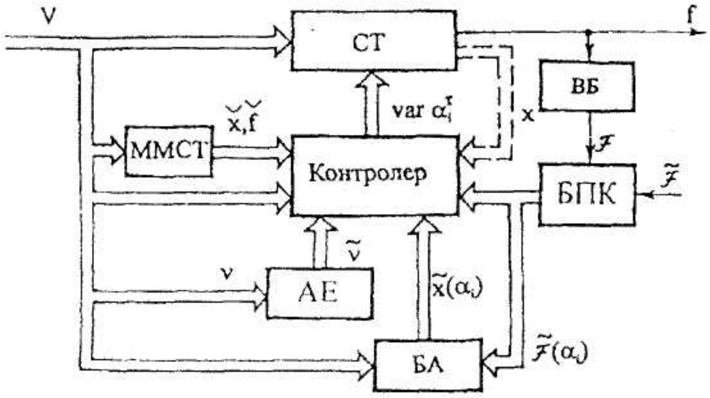

Рис. 1

Основною функцією СК є реалізація закону зміни вихідної координати $f(t)$ у відповідності до заданого закону $\tilde{f}(t)$ і заданої точності. При синтезі алгоритму керування НП головною задачею є визначення варіанти керування $\mathrm{var}(\alpha_{ij}^{\tau})$ на кожному інтервалі. Керування координатою $f(t)$ має дискретний характер, здійснюється за рахунок дискретної зміни оператора зв'язку за законом, що визначається варіантою керування $\mathrm{var}(\alpha^{\tau})$.

Умови інваріантності $f(t)$ відносно збурення $v(t)$ мають реалізовуватись одночасно з умовами необхідного відтворення $\tilde{f}(t)$. Ці умови неподільні. Тому метою керування в такті, на основі якого формується (α^{τ}), можна вважати забезпечення в умовах безперервно діючих $v(t)$ співвідношення:

$$F(\alpha_i) = \tilde{F}(\alpha_i), \quad i = 1, 2, ..., \tag{1}$$

де $F(\alpha_i)$ – деякий еквівалент $f(t)$ впродовж i-того такту, згідно з яким відтворюється запропонований закон; $\tilde{F}(\alpha_i)$ – задане сталонне значення.

Основною задачею теорії інваріантності є знаходження таких умов структурної побудови перетворювальної системи, при виконанні яких рух однієї або декількох координат системи не залежить від одного або більшого числа вхідних впливів, що подаються на систему. Таким чином, перед СК НП стоїть задача зміни коефіцієнтів варіанти керування $\mathrm{var}(\alpha_i^{\tau})$ основного контуру координатного керування НП шляхом переведення стану СТ протягом такту керування з деякого стану $x(\alpha_{i-1})$ у заданий кінцевий стан $\tilde{x}(\alpha_i)$ у визначені моменти α_i та забезпечення реалізації умови адаптації (1).

Тоді при адаптивному керуванні досягається інваріантність НП не тільки до зовнішніх, але й до початкових внутрішніх впливів, тобто значень $x(\alpha_{i-1})$. При адаптивному координатному керуванні для забезпечення повної керованості СТ НП і досягнення інваріантності $F(\alpha_i)$ до $v(t)$ необхідно, щоб розмірність вектора (α_i^{τ}) певним чином співвідносилась з розмірністю об'єкта керування. Невиконання цієї умови свідчить про неможливість фізичного здійснення в

НП умов інваріантності $F(\alpha_i)$ до $v(t)$. Для реалізації адаптивного координатного керування СК, крім обчислювального контролера, блока програмного керування (БПК), аналізатора-екстраполятора, повинна мати блок, який формує адаптивні значення вектора $F(\alpha_i)$ до $x(\alpha_i)$, тобто блок адаптації (БА). Тоді адаптаційні значення $\tilde{x}(\alpha_i)$ мають бути функцією $v(t)$ і $\tilde{F}(\alpha_i)$:

$$\tilde{x}(\alpha_i) = \varphi[v(t),\ y,\ \tilde{F}(\alpha_i);\ t \in (\alpha_{i-1},\ \alpha_i)]\ .$$

Розгляд алгоритмів перетворення НП і варіантів їхньої структурної організації дозволяють сформулювати положення про структурну інваріантність НП, за якої структурна організація НП не залежала б від функціонального призначення НП, тобто безумовно забезпечувалась багатоопераційність НП. Структурна інваріантність передбачає інваріантність вихідних енергетичних координат НП до виду вхідної перетворюваної електроенергії та варіаціям її енергетичних координат (величина напруги, частота, форма) за умови формування заданого вихідного сигналу НП, взагалі, довільної форми, а також інваріантність вихідних енергетичних координат НП до координатно-параметричних збурень.

Задачу інваріантності у класі адаптивного координатно-параметричного керування сформулюємо таким чином: необхідно знайти умови, за яких структурна організація перетворювальної системи буде мати властивості дворазової структурної інваріантності по відношенню до координатних впливів і параметричних збурень [7, 8].

Тоді досліджувана система може бути представлена рівнянням:

$$A(p,t)x = Д(p,t)u + G(p,t)v\ , \tag{2}$$

де v – вектор впливових збурень, u – вектор координатного керування.

Зазначимо, що оператори $A(p,t)$, $Д(p,t)$, $G(p,t)$ мають інформацію про параметричні збурення, які позначимо $\Delta A(p,t)$, $\Delta Д(p,t)$, $\Delta G(p,t)$.

Рівняння, що описує стійку систему і відповідний еталонний рух, представимо у вигляді:

$$A_0(p)x = Д_0(p)\Delta u + G_0(p)v\ , \tag{3}$$

де Δu – вхідний керуючий вплив.

З урахуванням введеної до розгляду помилки розузгодження руху синтезованої інваріантної системи і еталонного оператора ε можна записати систему, що описує рух об'єкта відносно помилки розузгодження ε. З цією метою об'єднаємо рівняння (2), (3) і позначимо через ΔS, ΔT, ΔZ оператори компенсуючих керуючих пристроїв блока адаптації основного контуру. В результаті одержимо таке рівняння:

$$A_0(p)\cdot\varepsilon = [\Delta A(p,t) - \Delta S(p,t)]\cdot x + [\Delta Д(p,t) - \Delta T(p,t)]\cdot u + [\Delta G(p,t) - \Delta Z(p,t)]\cdot v\ .$$

Звідси за умов

$$\begin{aligned} &\Delta A(p,t) = \Delta S(p,t)\,, \\ &\Delta Д(p,t) = \Delta T(p,t)\,, \\ &\Delta G(p,t) = \Delta Z(p,t)\,, \end{aligned} \tag{4}$$

а також обмеженості координат $x,\ u,\ v$ і відповідних похідних одержимо

$$A_0(p)\cdot\varepsilon = 0\ . \tag{5}$$

Отже, за нульових початкових умов і стійкості руху (5) маємо $\varepsilon(t) \equiv 0$ за будь-яких допустимих видів вхідних координатних і параметричних впливів. Умови (4), (5) є необхідними умовами структурної інваріантності перетворювальної системи по координаті ε.

Розгляд структурної організації НП на рис.1 дозволяє сформулювати положення про структурну інваріантність НП у вигляді необхідної та достатньої умов, а також умови фізичної реалізовності, причому достатньою умовою є наявність багаторазової, принаймні, дворазової модуляції вхідного впливу, а умова апаратурної реалізовності призводить до мінімізації числа некерованих ланцюгів силового тракту, які піддаються впливу координатно-параметричних збурень, при одночасному суміщенні функцій формування, регулювання вихідного сигналу і компенсації координатно-параметричних збурень у єдиному функціональному вузлі. Умовою фізичної реалізовності структурно-інваріантного НП є сепаратна організація СТ НП у відповідності до алгоритму "модуляція – демодуляція" [8, 9].

Виконання умов структурної інваріантності дозволяє реалізувати положення про симетрування нелінійних каналів передачі загального збурення на програмному рівні та надати системі властивість робастності при забезпеченні необхідної точності.

Таким чином, будемо вважати, що структура перетворювальної системи, яка розглядається, має властивості структурної двоpазової інваріантності за координатою, якщо в неї включено блок адаптації, який перебудовує параметри системи або її структуру для підтримки відповідних умов структурної двоpазової інваріантності. Звідси можна зробити таке твердження.

Твердження. При дотриманні умов стійкості і двоpазової структурної інваріантності перетворювальна система є адаптивною структурно-інваріантною за координатою ε по відношенню до вхідних координатних та параметричних впливів.

Для синтезу структури інваріантних НП необхідно формалізувати умови інваріантності. В основі такої формалізації лежить математична модель (ММ) СТ. Від точності ММ залежить точність компенсації $v(t)$. Найбільш повно динамічним процесам в СТ відповідає ММ, яка заснована на рішенні диференціальних рівнянь, що описують рух системи. При цьому доцільно використати положення теорії білінійних систем. Системи, які приводяться до білінійного виду, представляють собою клас системи, що дозволяє розв'язувати задачу інваріантності та одержати алгоритми керування, які задовольняють вимогам фізичної реалізовності.

Для того, щоб забезпечити гарну компенсацію $v(t)$ у динамічних режимах, треба використовувати ММ СТ, що найбільш повно відображає динаміку процесів у СТ в межах такту управління і зв'язок цих процесів з параметрами вектора управління (α^{τ}). Через нелінійність СТ відносно управління для синтезу НП малопридатні широко використовувані в теорії інваріантності ММ, які засновані на використанні передаточних функцій, частотних характеристик, різних форм дискретного перетворення [2]. Тут можливі два підходи до побудови динамічної моделі СТ. Якщо в СТ можна знехтувати мікропроцесами, що обумовлені дискретним характером його роботи, то динамічну модель можна побудувати відносно мікропроцесів, виділяючи деякі корисні складові змінних, тобто розглядаючи НП як квазінеперервну систему. Спотворення, обумовлені квантуванням, можна оцінювати за стаціонарним періодичним режимом для різних рівнів корисних складових. Але побудувати неперервну динамічну модель, яка адекватна реальним процесам в імпульсній системі, вдається не завжди, а використання неперервних моделей при дослідженні динаміки НП, а саме впливу $v(t)$, може призвести до значних похибок.

Найбільш повно динамічним процесам в СТ відповідає ММ, яка заснована на рішенні диференціальних рівнянь, що описують рух системи.

Спочатку розглянемо динамічну модель СТ для загального випадку, допускаючи, що стан СТ характеризується вектором $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$ (R^n – n-мірний простір), вихід оцінюється вектором вихідних змінних $f = (f_1, f_2, \dots, f_q)^T \in R^q$. До СТ прикладені зовнішні, обмежені за модулем, координатні впливи $V = (v_1, v_2, \dots, v_r)^T \in V_Д \in R^r$ ($V_Д$ – область допустимих значень цих впливів), частини з яких або всі є збуреннями. Крім того, в системі можуть діяти параметричні збурення (зміна параметрів навантаження та елементів СТ).

Силовий тракт являє собою динамічну систему, умови функціонування в якій циклічно змінюються. В кожному інтервалі такту управління його можна вважати неперервною детермінованою системою, яка в кожний момент може бути описана парою матричних рівнянь:

$$dx(t)/dt = \Phi^{ij}[x(t), v(t)]; \tag{6}$$

$$f(t) = F^{ij}[x(t), v(t)], \quad t \in (\alpha_{i,j-1}, \alpha_{ij}), \quad i = 1, 2, \dots, \quad j = \overline{1, m}, \tag{7}$$

де $\Phi^{ij}[\bullet]$ та $F^{ij}[\bullet]$ – вектор-функції, які залежать від структури та параметрів електричного ланцюга СТ в ij-му інтервалі.

Диференціальне рівняння (6) є рівнянням стану системи, рішення якого, що задовольняє початковій умові $x^{i,j-1} = x(\alpha_{i,j-1})$, дає вектор стану

$$x(t) = \Psi^{ij}[x(\alpha_{i,j-1}), v(t)], \quad t \in (\alpha_{i,j-1}, \alpha_{ij}).$$

Рівняння (7) визначає вихідні змінні у залежності від $x(t)$ і $v(t)$.

В лінійних системах регулювання вивід умов інваріантності, як правило, базується на дослідженні рішень (або зображеннях рішень) диференціальних рівнянь, що описують ці системи. В істотно ж нелінійних системах такий підхід до рішення задачі інваріантності зустрічає на своєму шляху суттєві ускладнення, які пов'язані в загальному випадку з неможливістю отримання в аналітичному вигляді рішення нелінійних диференціальних рівнянь і тому вимагають індивідуального підходу до рішення задачі в кожному окремому випадку. Це призводить до того, що такий підхід не може бути використаний для отримання загальних умов інваріантності в істотно нелінійних автоматичних системах.

Під істотно нелінійною автоматичною системою будемо розуміти таку систему, яка описується рівнянням (6) з кусково-неперервною правою частиною. Фізично це означає, що функція $\Phi(t,x)$ має розрив в точках, які утворюють, у загальному випадку, деякі поверхні, що зазвичай називаються "поверхні переключення". При визначенні рішення $x(t)$ значення функцій Φ в точках розриву можна знехтувати. Головну ж, визначну, роль мають значення функцій зліва та справа від точки розриву, тобто значення функцій лише на неперервних ділянках.

У загальному випадку рівняння (6) і (7) нелінійні. За допомогою рівнянь, які чергуються в певній послідовності, можна побудувати диференціальне рівняння зі змінними коефіцієнтами, справедливе для будь-якого моменту $t \in (\alpha_{-1}, \alpha_i)$. Але рішення такого рівняння є важким, тому що його коефіцієнти є розривними функціями часу.

Припустимо, що нелінійна автоматична система описується системою рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \Phi[t, X, Y, Z, V(t)], \\ \frac{dY}{dt} &= G[t, X, Y], \\ \frac{dZ}{dt} &= W[t, X, Y, V(t)]. \end{aligned} \tag{8}$$

Із загального виду системи (8) випливає, що рішення її $X(t)$, $Y(t)$ і $Z(t)$ повинно визначатися шляхом інтегрування одночасно всіх рівнянь цієї сумісної системи рівнянь при заданих початкових значеннях $X(T_0)$, $Y(T_0)$, і $Z(T_0)$. Звідси маємо, що коли потрібно отримати незалежність вектора $X(t)$ від вектора збурення $V(t)$, то потрібно таким чином синтезувати вектор-функцію Φ, аби серед її аргументів не було ані вектора збурення $V(t)$, ані вектора $Z(t)$ змінних системи, які залежать від збурення $V(t)$ відносно останнього рівняння системи (8). Дійсно, якщо виконати ці вимоги, то замість системи (8) буде мати місце інша система:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \Phi[t, X, Y], \\ \frac{dY}{dt} &= G[t, X, Y], \\ \frac{dZ}{dt} &= W[t, X, Y, V(t)]. \end{aligned} \tag{9}$$

Перше і друге рівняння системи (9) створюють відокремлену замкнену підсистему в середині всієї системи і ця підсистема може бути вирішена самостійно. При цьому функції Φ і G не мають збурення $V(t)$. Отже, вектор $X(t)$ (а разом з ним і вектор $Y(t)$) не залежать від вектора збурення $V(t)$.

Таким чином, умова абсолютної інваріантності (незалежності) $X(t)$ від $V(t)$, з урахуванням сказаного, формулюється у вигляді вимоги незалежності функції Φ в області задання від вектора збурення $V(t)$ і вектора змінних $Z(t)$ [7, 8].

Відсутність універсальних аналітичних методів отримання рішень систем нелінійних диференціальних рівнянь, які описують динамічні нестаціонарні процеси, обумовило актуальність створення системної теорії, що дозволяє провести аналіз нелінійних процесів з наступним синтезом структур НП. Ефективність такої теорії істотно залежить від того, наскільки широкий клас нелінійних процесів може бути досліджений в межах даної теорії. Тому нелінійні системи, які приводяться до білінійного вигляду, займають особливе місце в математичній теорії систем [3, 5].

При цьому нелінійні системи, що приводяться до білінійного вигляду, являють собою клас систем, на прикладі якого можна вирішувати проблему інваріантності і отримати конструктивні алгоритми керування, які задовольняють вимогам фізичної реалізовності.

Важлива роль в побудові логіко-динамічної білінійної моделі відводиться теорії груп і алгебр Лі [4].

Припустимо, що існує нелінійна та нестаціонарна структура НП, яка описується системою диференціальних рівнянь:

$$\frac{dX}{dt} = A^{ij}(t)x(t) + B^{ij}v(t), \quad t \in (\alpha_{i,j-1}, \alpha_{ij}), \quad i = 1,\ 2, \ldots,\ \ j = \overline{1,m} \ , \tag{10}$$

$$f(t) = C^{ij}(t)x(t) + D^{ij}V(t), \quad t \in (\alpha_{i,j-1}, \alpha_{ij}) \ ,$$

де $v(t)$ – вектор координатних впливів; $f(t)$ – вектор вихідних змінних; v – вектор збурень; $x(t)$ – вектор стану.

Систему (10) можна представити білінійною моделлю виду:

$$\dot{y}(t) = \left[A_0 + \sum_{i=1}^{m} V_i(t) \cdot B_i \right] \cdot y \ , \tag{11}$$

де y – вектор стану; A_0, B_i – постійні матриці.

Тоді для системи (10) може бути побудована білінійна модель

$$\dot{x}(t) = \left[A_0 + \sum_{i=1}^{m} M_i(t) \cdot B_i \right] \cdot x + G(t) \cdot V \ ,$$

$$f = Hx \ ,$$

де $M_i(t)$ описує алгоритм керування, V – координатний вплив.

Перетворювальні пристрої представляють собою ланцюги, структура яких визначається алгоритмом керування, тому кожному набору станів відповідає білінійне рівняння виду:

$$\dot{X}(t) = \left[Z + \sum_{i=1}^{n} M_i(t) \cdot K_i \right] \cdot X(t), \tag{12}$$

яке задано на l інтервалах періоду $0 < t_1 < t_2 \ldots < t_l = T$. Якщо $M_i(t)$ є кусково-постійною функцією, то для інтервалу $t_{K-1} < t < t_K$, $M_1(t) = V_{K1}, M_2(t) = V_{K2}, \ldots,\ \ M_n(t) = V_{kn}$, і рішення (12) має вигляд:

$$X(t) = e^{\left(Z + \sum\limits_{i=1}^{n} V_{li} K_i \right) \alpha_l} \ldots e^{\left(Z + \sum\limits_{i=1}^{n} V_{ni} K_i \right) \alpha_l} ,$$

де $\alpha_k = t_K - t_{K-1} > 0$ і $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = T$. Для випадку двох інтервалів $X(t) = e^A e^B$, де $A = \left[Z + \sum\limits_{i=1}^{n} V_i K_i \right] \beta$, $B = \left[Z + \sum\limits_{i=1}^{n} V_{2i} K_i \right] (T - \beta)$, причому A і B – квадратні матриці n-го порядку. Очевидно, можна знайти матрицю C, коли $e^A e^B = e^C$, при цьому підмножина простору $n \times n$ матриць є лінійним простором і має $[A, b] = AB - BA$ кожного разу, коли має A та B, за допомогою теореми Кемпбела-Хаусдорфа, тоді коефіцієнти $C_n(A, B)$ однозначно визначаються рекурентним співвідношенням:

$$(n+1)C_{n+1}(A, B) = [A - B, C_n(A, B)]/2 + \sum_{p \geq 1, 2p \leq n} k_{2p} \sum_{\substack{m_1, \ldots, m_{2p} > 0 \\ m_1 + \ldots + m_{2p} = n}} \left[C_{m_1}(A, B), \left[\ldots, \left[C_{m_{2p}}(A, B), A + B \right] \ldots \right] \right],$$

де $n > 1$.

Таким чином, білінійні рівняння на інтервалах за формулою Кемпбела-Хаусдорфа приводяться до рівняння на періоді, рішення якого отримується у вигляді $x(t) = e^{C \cdot t}$.

Розглянемо обчислення $e^{C \cdot t}$. Існує достатньо методів обчислення матричної функції $e^{C \cdot t}$. Один з методів базується на розкладанні функції $e^{C \cdot t}$ у степеневий ряд:

$$e^{C \cdot t} = 1 + Ct + \frac{C^2 t^2}{2!} + \ldots + \frac{C^K t^K}{K!} + \ldots$$

Процес піднесення до степеня матриці C істотно спрощується, якщо спочатку обчислити її власні значення , а саме матриця приводиться до діагональної форми.

Інші способи отримання матричної функції $e^{C\cdot t}$ засновані на теоремі про розкладання функції від матриці – теоремі Гамільтона-Келі, згідно з якою будь-яка квадратна матриця C задовольняє своєму характеристичному рівнянню, тобто $\Delta(C)=0$.

Ця теорема використовується для обчислення $e^{C\cdot t}$ за допомогою перших $(n-1)$ степенів матриці C. Обчислення проводиться за декілька етапів.

Етап І. Обчислюємо перші $n-1$ степенів матриці C:

$$C^2, C^3, \dots, C^{n-1}.$$

Етап ІІ. Обчислюємо коефіцієнти характеристичного рівняння:

$$q_0 + q_1\lambda + q_2\lambda^2 + \dots + q_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n = 0$$

за формулами:

$$q_{n-1} = -T_1;$$

$$q_{n-2} = -\frac{1}{2}(q_{n-1}T_1 + T_2);$$

$$q_{n-3} = -\frac{1}{3}(q_{n-2}T_1 + q_{n-1}T_2 + T_3);$$

....

$$q_0 = -\frac{1}{n}(q_1T_1 + q_2T_2 + \dots + q_{n-1}T_{n-1} + T_n),$$

де $T_K = t_r(C^K)$.

Етап ІІІ. За теоремою Гамільтона-Келі

$$C^{n-m} = -q_{n-1}C^{n-1} - q_{n-2}C^{n-2} - \dots - q_0,$$

та $(n+m)$-а степінь матриці C знаходиться за допомогою послідовного множення цього співвідношення на матрицю C.

Маємо

$$C^{n+m} = æ_{0m}1 + æ_{2m}C^2 + \dots + æ_{n-1,m}C^{n-1}$$

при $m = 0, 1, 2, \dots$, де

$$æ_{00} = -q_0,$$

$$æ_{10} = -q_1,$$

$$æ_{n-1,0} = -q_{n-1},$$

а інші коефіцієнти визначаються з рекурентних співвідношень:

$$æ_{n-1,m} = æ_{n-2,m-1} - q_{n-1}æ_{n-1,m-1}.$$

Етап IV. Для будь-якого заданого Δt функцію $e^{C\cdot\Delta t}$ можна записати у вигляді:

$$X(\Delta t) = e^{C\cdot\Delta t} = \sum_{K=0}^{\infty}\frac{1}{K!}(C\cdot\Delta t)^K = \sum_{K=0}^{n-1}\frac{1}{K!}(C\cdot\Delta t)^K + \sum_{K=0}^{\infty}\frac{(\Delta t)^{n+K}}{(n+K)!}\left[\sum_{j=0}^{n-1}æ_{jK}C^j\right] =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1}C^j\left[\frac{(\Delta t)^{j-1}}{(j-1)!} + \sum_{K=0}^{\infty}æ_{jK}\frac{(\Delta t)^{n+K}}{K!}\right].$$

Тому функцію $e^{C\cdot t}$ можна визначити з будь-якою заданою точністю за допомогою вже обчислених матриць $C^2, C^3, \dots, C^{n-1}$ та коефіцієнтів $æ$ без обчислення та складання степенів матриці C вище $n-1$.

Таким чином, розрахунок методом білінійних рівнянь складається з трьох основних етапів. На першому з них формуються білінійні моделі НП на інтервалах сталості структури. Далі згідно з формулою Кемпбела-Хаусдорфа білінійна модель згортається для періоду роботи НП. На останньому етапі обчислюється рішення отриманої моделі.

При знаходженні аналітичного рішення білінійних рівнянь доцільно також скористатись інтерполяційним поліномом Лагранжа-Сільвестра $r(c)$ для функції f на спектрі матриці C [3, 5].

Тоді при інтерполяції функції $x(t) = e^{C\cdot t}$ матимемо:

$$e^{C\cdot t} = r(c) = \sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k(t)C^k,$$

або у векторно-матричній формі:

$$x(\alpha_i) = \exp\left[C^{ij} \cdot \alpha_{ij}\right] = \sum_{i,j=0}^{m-1} \alpha_{ij}(\alpha_i) \cdot C^{ij} .$$

Векторно-матричні рівняння, що одержані, дають рекурентні співвідношення для визначення вектора стану в моменти $t = \alpha_i$ за відомим керуванням (α^{τ}) та відомим координатним і параметричним впливом. При цьому для реалізації мети керування (1) підлягає визначенню $F(\alpha_i)$, котре є функцією значень варіанти (α^{τ}), параметрів системи, зовнішніх впливів і початкових значень вектора x:

$$F(\alpha_i) = F'\left[x_1(\alpha_{i-1}),...,x_n(\alpha_{i-1}),v_1(t),.....,v_r(t),y_1(t),...,y_l(t),\alpha_{i1},...,\alpha_{im}\right].$$

Отримані вирази дають повне уявлення щодо динамічних процесів в СТ НП протягом такту, оскільки встановлюють зв'язок усіх його координат і $f(t)$ з векторами координатних і параметричних впливів. Тому ці вирази можуть розглядатися як динамічна модель СТ, причому ця модель адекватна меті керування СТ у кожному такті.

Таким чином, застосування положень теорії білінійних методів дослідження перетворювальних систем з багаторазовою модуляцією дозволило розробити узагальнену динамічну модель багатофункціональних НП, засновану на представленні диференціальних рівнянь білінійними формами.

Розроблено єдиний методологічний підхід до одержання умов інваріантності у вигляді вимоги незалежності рішення системи диференціальних рівнянь, яка описує НП, від вектора впливових координатно-параметричних збурень, що дозволило оптимізувати алгоритми координатно-параметричного керування багатофункціональними НП і підвищити точність реалізації умов інваріантності.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Адаптивные системы автоматического управления / В.Н. Антонов, А.М. Пришвин. В. А. Терехов, А.Э. Янчевский / Под ред. В.Б. Яковлева. – Л.: Изд-во Ленингр. Ун-та, 1984. – 204 с.
2. *Алиев Р.А.* Принцип инвариантности и его применение для проектирования промышленных систем управления. – М.: Энергоатомиздат, 1985. – 128 с.
3. *Анго А.* Математика для электро- и радиоинженеров. – М.: Наука, 1967. – 779 с.
4. *Наймарк М.А.* Теория представлений групп. – М.: Наука, 1976. – 559 с.
5. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1978. – 831 с.
6. *Смирнов В.С.* Инвариантная структура полупроводниковых преобразователей // Техн. електродинаміка. – 1998. – № 2. – Том 1. – С.17–20.
7. *Смирнов В.С., Устенко Л.В.* Инвариантные полупроводниковые преобразователи электроэнергии автономных объектов // Техн. Електродинаміка: Силова електроніка та енергоефективність. Темат. вип. – 2001. – Ч.2. – С. 53–56.
8. *Смирнов В.С.* Структурная организация электротехнических комплексов с вентильными преобразователями // Авиационно-космическая техника и технология. – Харьков: ХАИ, 1999. – Вып. 13. – С. 152–159.
9. Преобразователь напряжения: А.с.1814177 СССР, МКИ Н 02 М 7/48./В.И. Сенько, В.С. Смирнов, К.В. Трубицын, А.А. Мозоляко, А.П. Калиниченко (СССР – № 4880667; Заявл. 05.11.90; Опубл. 07.05.93, Бюл. № 17. – 8 с.

СМИРНОВ Володимир Сергійович – доктор технічних наук, професор кафедри теоретичної електротехніки Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут".

Наукові інтереси:

– силова електроніка;

– напівпровідникові перетворювачі інваріантних систем електроживлення автономних об'єктів.

Подано 13.01.03