УДК 622.257

Д.В. Бабець, аспір.
Національний гірничий університет України
Г.Т. Рубець, к.т.н., с.н.с.
Інститут геотехнічної механіки НАН України
О.О. Сдвижкова, к.т.н., доц.
Національний гірничий університет України

ПІДБІР ЕМПІРИЧНИХ РОЗПОДІЛІВ ЗА ДАНИМИ ВИПРОБУВАНЬ ГІРСЬКИХ ПОРІД НА МІЦНІСТЬ

У статті наведено огляд ймовірнісних моделей розподілу границі міцності гірських порід. Проаналізовано емпіричні дані та запропоновано логарифмічно нормальний закон розподілу як найбільш обгрунтовану ймовірнісну модель для оцінки коефіцієнта структурного ослаблення.

Аналіз феноменологічних критеріїв міцності, найбільш прийнятних для гірських порід, показує, що основною механічною константою є міцність порід на одноосьовий стиск, що визначається за даними випробувань зразків за стандартними методиками. Однак, визначена таким способом величина далека від свого істинного значення для даного типу порід. Це пояснюється впливом великої кількості випадкових факторів, що вплинули на формування структури масиву, але не виявляються при випробуванні зразків. Відмінність міцності масиву від середньої міцності зразків оцінюється коефіцієнтом структурного ослаблення, рівним їхньому відношенню. Аналіз показав [1], що на кінцеву оцінку суттєвий вплив має вид закону розподілу міцності структурних елементів масиву як випадкової величини.

Для опису емпіричних даних про розподіл міцності на гірських породах запропоновано багато різних функцій розподілу. У роботі [2] відзначається, що гірські породи формувалися в результаті накладення численних незалежних випадкових стаціонарних процесів, що діяли в різних напрямках із змінною інтенсивністю. Можна припустити, що в межах такої схеми для властивостей гірських порід буде справедливий закон, близький до нормального. Порушення перерахованих припущень призводить до відхилення розподілу властивостей від закону Гауса. Після утворення гірської породи відбуваються спрямовані зміцнення і розміцнення матеріалу, що призводять до появи негативної і позитивної асиметрії у розподілі міцності. Крім того, міцнісні властивості за своєю фізичною суттю є випадковими величинами не збірного (кумулятивного), а вибірного (вибіркового) характеру. Таким чином, закони розподілу характеризують не тільки частоту появи значень міцності й імовірність руйнування породи, але й відображають процеси її формування і перетворення.

Автором [2] вивчено 129 емпіричних розподілів міцнісних характеристик осадових, метаморфічних і магматичних гірських порід за статистичними даними, отриманими у лабораторії відділу механіки гірських порід ІГТМ АН України, у геологічних трестах і експедиціях департаментів геології і вугільної промисловості України. Аналіз розподілів дозволив здійснити їхню наближену класифікацію (табл. 1) за коефіцієнтом ексцесу b_1 й асиметрії b_2, обумовлених по вибірці відповідно до відомих формул [3].

Той факт, що емпіричні розподіли дозволяють застосовувати до них відразу кілька функцій, вносять невизначеність при вирішенні конкретних геомеханічних задач. Іноді це пов'язано з обмеженим обсягом вибіркових даних. Іноді – з недостатністю теоретичних передумов для обгрунтованого вибору того чи іншого гіпотетичного розподілу.

Теоретичні розподіли для міцності гірських порід з урахуванням особливостей емпіричних даних і фізичних уявлень повинні мати наступні властивості:

а) надійна апроксимація не тільки в області середніх значень міцності, але й в області малоймовірних значень;

б) нижня границя кривої розподілу повинна бути ненегативною величиною;

в) верхня границя міцності може бути як обмежена, так і необмежена;

г) наявність у теоретичного розподілу невеликого (2...3) числа параметрів і простих методів їхнього визначення;

д) інтегральна і диференціальна функції розподілу повинні мати простий аналітичний вигляд, без квадратур і спеціальних функцій;

ж) наявність таких властивостей у розподілу, що дозволяли б істотно спрощувати математичні викладення при розв'язуванні практичних задач.

Таблиця 1

Класифікація розподілів міцнісних характеристик

Коефіцієнт ексцесу b_2	Асиметрія $A = \sqrt{b_1}$				
	Лівоасиметричні		Симетричні	Правоасиметричні	
	Сильно (-1,25...0,75)	Помірно (-0,75...-0,25)	(-0,25...0,25)	Помірно (0,25...0,75)	Сильно (0,75...1,25)
Плосковершинні (1,5...2,5)	---	---	Рівномірний Параболічний	---	---
Помірновершинні (2,5...3,5)	---	Вейбулла Релея Максвелла Гамма Гальтона	Вейбулла Нормальне	Вейбулла Релея Максвелла Гамма Гальтона	---
Гостровершинні (3,5...6,5)	Вейбулла Гамма Гальтона Берра Бернштейна Фреше Гумбеля	Вейбулла Гамма Гальтона Берра Бернштейна	Логістичне	Вейбулла Гамма Гальтона Берра Бернштейна	Вейбулла Гамма Гальтона Берра Бернштейна Фреше Гумбеля

Для обґрунтованого вибору теоретичного розподілу випадкової величини – міцності порід, що вміщують вугілля, *на одноосьовий стиск* – *автором роботи побудовані емпіричні розподіли* цієї величини за даними ВО «Укргеологія» і «Донбасгеологія». Іспити проводилися по кернах розвідницьких свердловин при цілеспрямованому доборі проб у польових умовах. Границю міцності на одноосьовий стиск для пісчаників одержували на циліндричних зразках зі співвідношенням висоти зразка до діаметра, рівному одиниці. Для аргілітів і алевролітів ця характеристика отримана методом співвісних пуансонів. Експериментальні дані, які підлягають статистичній обробці, надані укладачами [4].

Статистична обробка даних полягає в побудові варіаційного ряду [5], графічним зображенням якого є гістограма частот, і визначень емпіричних моментів розподілу:

а) початковий момент k-го порядку:

$$\nu_K^* = \sum_{i=1}^{n_x} X_i^k W_i , \tag{1}$$

де W_i – відносна частота; X_i – варіанта; n_x – кількість значень, що спостерігаються, (варіант);

б) центральний момент k го порядку:

$$\mu_K^* = \sum_{i=1}^{m} \left(x_i - \overline{X} \right)^k W_i , \tag{2}$$

де $\overline{X}$ – середня вибіркова.

Зокрема:

– середня вибіркова:

$$\overline{X} = \nu_1 = \sum_{i=1}^{n_x} X_i W_i ; \tag{3}$$

– вибіркова дисперсія:

$$D^* = \mu_2 = \sum_{i=1}^{n_x} \left(X_i - \overline{X} \right)^2 W_i ; \tag{4}$$

– вибіркова оцінка асиметрії:

$$\sqrt{\beta_1^*} = \frac{\mu_3^*}{\left(\mu_2^* \right)^{3/2}} ; \tag{5}$$

– вибіркова оцінка ексцесу:

$$\beta_2^* = \frac{\mu_4^*}{\left(\mu_2^*\right)^2}. \tag{6}$$

Узагальнені результати обробки статистичних даних у вигляді квадрата показника асиметрії β_1 і показника гостровершинності β_2 зведені в таблицю 2.

Таблиця 2

Параметри статистичного розподілу

Марки вугілля	Вміщуючі породи	Параметри розподілу	
		β_1	β_2
Д-ДГ	Аргіліт	0,261	3,099
	Алевроліт	0,336	2,970
	Піщаник	0,213	2,421
Г-ГЖ	Аргіліт	0,637	2,623
	Алевроліт	0,545	2,875
	Піщаник	0,470	3,123
Ж, КЖ, ОС	Аргіліт	1,043	5,029
	Алевроліт	0,336	2,970
	Піщаник	0,514	3,003

Підбір розподілів за експериментальними даними здійснюється за допомогою графіка, запропонованого в монографії [3], на якому в осях координат β_1, β_2 побудовані криві, що відповідають різним теоретичним розподілам. У роботі [2] цей графік доповнений точками і кривими, що представляють розподіли: параболічне, логістичне, Берра, Максвелла, Релея, Гумбеля, Бернштейна і Фреше. Розподіли, що мають тільки два параметри (положення і масштабу), зображуються на графіку точкою. До них відносяться розподіли: рівномірний, параболічний, нормальний, Максвелла, Релея, логістичний, мінімальних і максимальних значень Гумбеля. Криві з трьома параметрами (третій – параметр форми) зображені лініями $\beta_1 = \varphi(\beta_2)$. До них відносяться розподіли: мінімальних і максимальних значень Вейбулла, гамма, Бернштейна, логарифмічно нормальний (Гальтона), Берра, мінімальних і максимальних значень Фреше. Бета-розподіл, що має два параметри форми, займає на цьому графіку визначену область. При цьому значна область зміни параметрів не охоплена жодним з відомих розподілів, що залишає дослідникам простір для побудови нових теоретичних розподілів, як це зроблено в [3], де наведена побудова розподілів Джонсона шляхом перетворень нормованої нормально розподіленої величини.

Нанесення на площину β_1, β_2 (рис. 1) емпіричних точок (β_1^*, β_2^*) показало, що сукупність цих точок займає порівняно невелику область між кривою, що відповідає нормальному логарифмічному розподілу, і областю U-образного бета-розподілу. При цьому експериментальні точки досить щільно групуються навколо точок області, що відповідають законам нормальному, рівномірному, Максвелла, Релея. Таким чином, напрошується висновок про те, що емпіричні дані можуть бути однаково добре (чи однаково погано) описані одним з перерахованих вище законів. Тому для одержання найбільш загального закону розподілу межі міцності на стиск вуглевміщуючих порід, що відображає все різноманіття форм кривих розподілу, скористаємося рекомендаціями, даними в [3], і застосуємо для опису емпіричних даних розподіли Джонсона.

Розташування емпіричних точок β_1 і β_2 свідчить на користь S_L – розподілу, диференціальна функція якого має вигляд:

$$f(x) = \frac{\xi}{\sqrt{2\pi}\left(x-\varepsilon'\right)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\gamma' + \eta' \ln\left(\frac{x-\varepsilon}{\lambda'}\right)\right]^2\right\}, \tag{7}$$

$x \geq \varepsilon$, $\xi \succ 0$, $-\infty \prec \gamma' \prec \infty$, $\lambda' \succ 0$, $-\infty \prec \varepsilon \prec \infty$.

Вводячи позначення:

$$\gamma^* = \gamma' - \xi \ln \lambda', \tag{8}$$

одержуємо

$$f(x) = \frac{\xi}{\sqrt{2\pi}\left(x - \varepsilon^{/}\right)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\xi^2\left[\frac{\gamma^{*}}{\eta^{/}} + \ln(x-\varepsilon)\right]^2\right\}, \tag{9}$$

$x \geq \varepsilon^{/}$.

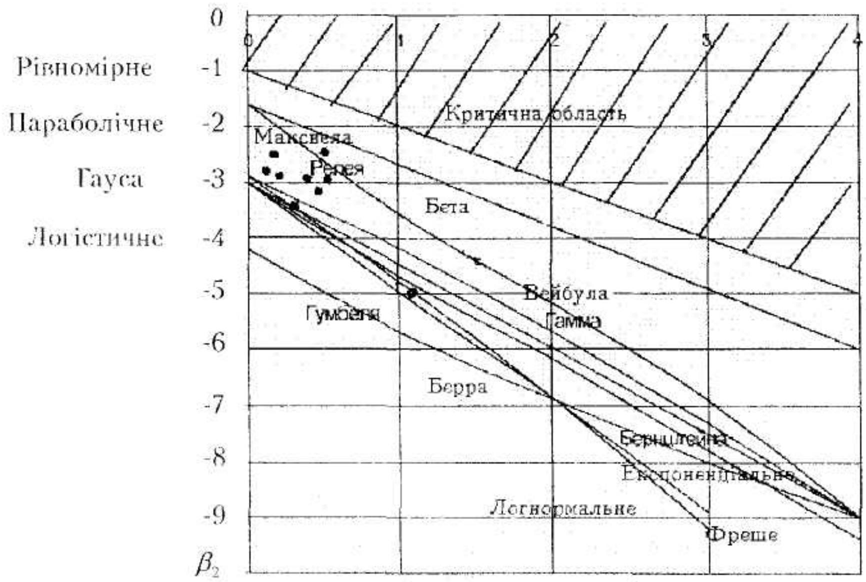

Рис. 1. Графік Пірсона для різних розподілів випадкових величин

Це логарифмічно нормальний розподіл вигляду:

$$f(x,\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}x\sigma}\exp\left[-\frac{\left(\ln(x-\varepsilon)\right)^2}{2\sigma^2}\right] \; x \succ 0 \; -\infty \succ \mu \prec +\infty \; \sigma \succ 0 \tag{10}$$

з трьома параметрами, де $\xi = 1/\sigma$ і $\gamma^{*} = -\mu/\sigma$, названих сімейством розподілу S_L Джонсона.

При перебуванні параметрів розподілу S_L Джонсона можливі наступні два випадки: 1) коли відомий параметр ε, що характеризує центр розподілу; 2) коли він невідомий і повинен оцінюватися на основі експериментальних даних.

Оскільки ε – нижня границя випадкової величини, що підбирається, він часто буває відомий з фізичних міркувань. Наприклад, у даному випадку, при аналізі випробувань міцності гірських порід на стиск у грубому наближенні можна вважати, що параметр $\varepsilon = 0$.

Логарифмічно нормальний розподіл описує випадкову величину, логарифм якої розподілений за нормальним законом з параметрами μ і σ, тобто щільність розподілу випадкової величини $y = \ln(x-\varepsilon)$ має вигляд:

$$f(y,a,\sigma) = 1\Big/\sigma\sqrt{2\pi}\,\exp\left(-(y-a)^2\Big/2\sigma^2\right).$$

Параметри μ і σ є тут відповідно математичним очікуванням $M(y)$ і дисперсією $D(y)$ нормального розподілу.

Тоді емпіричні оцінки параметрів μ^{*} і σ^{*} знаходяться за формулами:

$$\mu^{*} = \overline{y} = \sum_{i=1}^{n_x}\ln(x_i-\varepsilon)W_i, \tag{11}$$

$$\sigma^{*} = \sqrt{\frac{n}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n_x}\ln(x_i-\varepsilon)W_i - \mu^{*2}\right]}. \tag{12}$$

Якщо величина ε невідома заздалегідь і становить істотний інтерес для цілей дослідження, виникає необхідність оцінювання цього параметра за експериментальними даними.

Рівняння методу моментів мають вигляд:

$$\begin{cases} \exp\left(\mu + \dfrac{\sigma^2}{2}\right) + \varepsilon = \mu^*, \\ \exp\left(2\mu + \sigma^2\right)\left(e^{\sigma^2} - 1\right) = D^*, \\ \left(e^{\sigma^2} - 1\right)^{1/2}\left(e^{\sigma^2} + 2\right) = \sqrt{\beta_1^*}, \\ \sqrt{e^{\sigma^2} - 1}. \end{cases} \tag{13}$$

Розв'язки рівнянь (13) у явному вигляді записуються дуже громіздко, однак можна скласти на ЕОМ зручні таблиці, за допомогою яких оцінки параметрів розподілу знаходяться дуже просто в кожному конкретному випадку.

Дійсно, останнє рівняння з (13) залежить тільки від одного невідомого – σ. Шляхом заміни змінної $t = \left(e^{\sigma^2} - 1\right)^{1/2}$ його можна привести до кубічного рівняння відносно t:

$$t^3 + 3t - A, \tag{14}$$

де $A = \sqrt{\beta_1^*}$.

Це рівняння зважується в явному виді:

$$t^* = \sqrt[3]{\frac{A}{2} + \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + 1}} + \sqrt[3]{\frac{A}{2} - \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + 1}}. \tag{15}$$

Знаючи корінь рівняння t^* з (14), можна визначити параметр

$$\sigma = \sqrt{\ln\left(1 + t^2\right)}. \tag{16}$$

Параметр зсуву визначиться з виразу

$$\varepsilon = \bar{x} - \frac{D^*}{t}. \tag{17}$$

Величина μ запишеться:

$$\mu = \ln\left(\bar{x} - \varepsilon\right) - \frac{\sigma^2}{2}. \tag{18}$$

Для спрощення обчислень, зв'язаних з оцінкою параметрів, нами розрахована таблиця 3 для визначення σ й $1/t$ в залежності від величини вибіркової асиметрії в інтервалі $A \in (0{,}05...200)$.

Перевірка гіпотези про логнормальний розподіл міцності вуглевміщуючих порід за критерієм χ^2 при однопроцентному рівні значимості дала позитивні результати. Дані усіх вивчених вибірок не суперечать цій гіпотезі.

Логнормальний розподіл ймовірностей є досить широко розповсюдженою статистичною моделлю опису явищ і процесів у науках про землю [6]. Цьому розподілу відповідають вміст елементів і мінералів у виверженних гірських породах [7], [8], розміри часток осадових порід [9], розміри часток при дробленні твердих тіл зосередженою силою [10], [11], величини граничних руйнівних напружень для деяких типів порід [12] та інші гірничотехнічні характеристики.

Таблиця 3

Коефіцієнти для оцінки параметрів логарифмічно нормального розподілу за великими вибірками

Асиметрія A	Параметр форми σ	Коефіцієнт $1/t$	Асиметрія A	Параметр форми σ	Коефіцієнт $1/t$
1	2	3	4	5	6
0,05	0,017	59,88	1,05	0,328	2,97
0,10	0,031	30,03	1,10	0,342	2,84
0,15	0,050	20,04	1,15	0,355	2,73

Закінчення таблиці 3

1	2	3	4	5	6
0,20	0,066	15,04	1,20	0,368	2,62
0,25	0,083	12,06	1,25	0,381	2,53
0,30	0,100	10,01	1,30	0,394	2,44
0,35	0,116	8,61	1,35	0,407	3,26
0,40	0,132	7,55	1,40	0,419	2,28
0,45	0,148	6,72	1,45	0,431	2,21
0,50	0,163	6,07	1,50	0,443	2,15
0,55	0,180	5,52	1,55	0,455	2,09
0,60	0,195	5,07	1,60	0,466	2,03
0,65	0,211	4,69	1,65	0,478	1,97
0,70	0,227	4,36	1,70	0,489	1,92
0,75	0,241	4,09	1,75	0,500	1,88
0,80	0,256	3,84	1,80	0,510	1,84
0,85	0,271	3,62	1,85	0,521	1,79
0,90	0,286	3,43	1,90	0,531	1,75
0,95	0,300	3,26	1,95	0,541	1,71
1,00	0,314	3,11	2,00	0,551	1,68

Поширені випробування з визначення меж міцності на розтяг зразків гірських порід напівправильної форми сталевими співвісними клинами для осадових, магматичних і метаморфічних порід показали, що найбільш прийнятною статистичною моделлю для мінливості міцності є логарифмічно нормальний розподіл [13]. Отримані в роботі [14] дані міцнісних випробувань порід Хібинських родовищ за своїми статистичними характеристиками не суперечать моделі логнормального розподілу. У роботі [12] наведені дані випробувань міцності 1248 зразків кам'яної солі. Перевіркою було встановлено, що серед трьох передбачуваних законів (нормальний, Пірсона III типу, логарифмічно нормальний) для опису мінливості міцності кам'яної солі найбільш придатною моделлю є логарифмічно нормальний закон, як більш виправданий фізично. Крім того, перевірка за критерієм Пірсона показала, що теоретичний логнормальний розподіл не суперечить емпіричним даним з високим рівнем надійності.

Проведені в роботі [15] дослідження мінливості фізико-механічних властивостей гірських порід більше 45-ти поліметалевих родовищ Казахстану показали, що основні міцнісні характеристики (границя міцності на стиск, розтяг, коефіцієнт міцності, контактна міцність і зчеплення) розподілені в основному за законом з позитивною асиметрією, що свідчить про істотний вплив на механізм руйнування неоднорідностей речовинного складу порід, їхніх структурних особливостей і закономірностей розподілу речовин у просторі. Найбільш придатними статистичними моделями для оцінки розподілу цих характеристик автор пропонує логарифмічно нормальний закон, закон Вейбулла і гамма-розподілу.

Дослідження законів розподілу фізичних властивостей гірських порід, виконані в роботі [16], привели автора до висновку про універсальність логарифмічно нормального закону як основного статистичного закону властивостей гірських порід.

Автор роботи [6] узагальнив дослідження багатьох вчених і прийшов до висновку, що поширеність логнормальної функції розподілу є наслідком деяких фундаментальних статистико-термодинамічних законів, керуючих розподілом речовин. Доведення цього твердження проводиться на основі розгляду флуктуаційної моделі Больцмана.

Зупинимося на властивостях логнормального розподілу, що свідчать про його перевагу перед іншими розподілами. Сімейство кривих Джонсона являє логарифмічно нормальний розподіл, висновок отримано шляхом перетворень нормованих нормально розподілених величин. Перевага такого перетворення полягає в тому, що оцінки процентілей емпіричних розподілів можна одержувати, використовуючи таблиці площ під кривою нормального розподілу, що маються в будь-якій довідковій літературі.

Властивості логарифмічно нормального розподілу визначаються багато в чому властивостями відповідного нормального розподілу. Крім того, цей розподіл має найважливішу особливість: розподіл добутку n незалежних позитивних випадкових величин з логарифмічно нормальними розподілами знову підкоряється цьому розподілу [17]. Для нього має місце аналог центральної граничної теореми: розподіл добутку незалежних позитивних випадкових величин при деяких загальних умовах прагне в межі при необмеженому зростанні числа співмножників до логарифмічно нормального закону.

Наявність цих властивостей припускає те, що логарифмічно нормальний розподіл застосовується у всіляких областях – від економіки до біології, для опису процесів, у яких показник, що спостерігається, складає випадкову частку попереднього значення.

Застосовність логарифмічно нормального розподілу для опису міцнісних властивостей матеріалів може бути фізично обґрунтована з позиції т.зв. моделі Кептейна [18] – пропорційного ефекту нагромадження ушкоджень в процесі навантаження випробовуваних зразків. Нехай значення $l_0 < l_1 < l_2 < \ldots < l_n$ являють собою послідовність розмірів тріщини, що утвориться при навантаженні зразка, на різних етапах її росту.

Коли тріщина досягає критичного значення l_n, зразок руйнується. Будемо вважати, що збільшення розміру тріщини на кожному кроці $l_i - l_{i-1}$ пропорційно розміру l_{i-1} попередньої тріщини, тобто

$$l_i - l_{i-1} = \delta_i l_{i-1}, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots\ldots n,$$

де l_0 – первісна величина тріщини в зразку (порушення структури, порожнечі, породні включення тощо);

$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ – незалежні позитивні випадкові величини.

З попередньої формули маємо:

$$l_i = (1+\delta_i)(1+\delta_{i-1})\cdots(1+\delta_i)l_0. \tag{19}$$

Розподіл остаточних розмірів тріщин l_n представляється у вигляді добутку незалежних позитивних випадкових величин; якщо покласти в попередній рівності $i = n$, то одержимо, що

$$l_n = (1+\delta_n)(1+\delta_{n-1})\cdots(1+\delta_i)l_0. \tag{20}$$

Прологарифмувавши цей вираз, будемо мати

$$\ln(l_n) = \ln(1+\delta_n) + \ln(1+\delta_{n-1})\cdots + \ln(1+\delta_i) + \ln(l_0). \tag{21}$$

При великих n, відповідно до центральної граничної теореми, $\ln(l_n)$ має нормальний розподіл, кінцеві розміри тріщин l_n мають логарифмічно нормальний розподіл із щільністю:

$$f(l) = \frac{1}{\sigma_l l\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma_l^2}(\ln l - \mu_l)^2\right), \qquad l \ge 0. \tag{22}$$

Покладемо, що руйнівне напруження x зв'язане в першому наближенні лінійною залежністю з розміром тріщини, що передує руйнуванню:

$x = \alpha l + \varepsilon$, де α, ε – постійні.

Виразимо l через x і підставимо у вираз для щільності розподілу. Одержимо:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x (x-\varepsilon)\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma_x^2}(\ln(x-\varepsilon) - \mu_x)^2\right), \qquad l \ge 0, \tag{23}$$

де $\mu_x = \ln\alpha + \mu_l$ і $\sigma_x = \sigma_l$.

Аналогічний результат буде справедливий, якщо параметри $\{l_i\}$ розглядати як накопичене пошкодження, що розвивається в процесі навантаження матеріалу від початкового його стану l_0 до фінального l_n. Це може бути, наприклад, кількість зруйнованих зв'язків даної міцності в матеріалі, розглянутих як випадкові величини, й інші параметри процесу руйнування, що представляється як стохастичний процес деформування, руйнування зв'язків, перерозподілу напруг на уцілілі зв'язки й остаточне вичерпання зразком максимальної несучої здатності.

Таким чином, у ситуаціях, близьких до викладених, з повною впевненістю можна використовувати для оцінки розкиду міцнісних характеристик матеріалів модель логарифмічно нормального розподілу як найбільш загальну в теоретичному плані і підтверджену емпірично.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Достижения и приоритеты горных наук в России // Горн. журн. – 2000. – № 6. – С. 2–4.
2. *Рубец Г.Т.* Вероятностно-статистические методы оценки прочности пород и массива для совершенствования расчетных моделей надежности подземных сооружений / Дисс. канд. техн. наук. – Днепропетровск: ИГТМ АН УССР, 1983. – 181 с.
3. *Хан Г., Шапиро С.* Статистические модели в инженерных задачах. – М.: Мир, 1969. – 388 с.

4. Руководство по экспресс-определению предела прочности на одноосное сжатие углевмещающих пород Донбасса по генетической принадлежности осадка и акустическим измерениям кернов разведочных скважин. – Днепропетровск, 1984.
5. *Баженова С.Г.* Практическая статистика. – М.: МГУ, 1995. – 456 с.
6. *Карасев Б.В.* Статистический подход к изучению природы и некоторые закономерности распределения вещества Земли // Пути познания Земли. – М.: Наука, 1971. – С. 131–151.
7. *Родионов Д.А.* Функции распределения содержаний элементов и минералов в изверженных горных породах. – М.: Наука, 1964. – 102 с.
8. *Прохоров Ю.В.* К вопросу о логнормальном распределении в геохимических задачах // Теория вероятностей и ее применения. – 1965. – № 1.– С. 184–187.
9. *Крамбейн У., Грейбилл Ф.* Статистические модели в геологии. – М.: Мир, 1969. – 397 с.
10. *Колмогоров А.Н.* О логарифмически нормальном законе распределения размеров частиц при дроблении // ДАН СССР. – 1941. – Т. XXX1. – № 2. – С. 99–103.
11. *Филлипов А.Ф.* О распределении размеров частиц при дроблении // Теория вероятностей и ее применения. – 1961. – № 6. – С. 209–218.
12. *Матвиенко В.В.* Закон распределения предела прочности на сжатие каменной соли месторождения Яр-Бишкадак // Труды ВНИИПромгаз. – 1965. – Вып. 1. – С. 63–69.
13. *Барон Л.И.* Горно-технологическое породоведение. Предмет и способы исследований. – М.: Наука, 1977. – 324 с.
14. *Медведев Р.В.* Статистическая интерпретация результатов прочностных испытаний горных пород // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. – 1974. – № 4. – С. 29–34.
15. *Катин К.П.* Законы распределения физико-механических свойств скальных пород и их практическое использование // Соверш. техн. и технол. подземн. добычи руд цвет. мет. – Усть-Каменогорск: ВНИИЦветмет, 1981. – С. 104–120.
16. *Турицын К.С.* Основной статистический закон распределения физических свойств горных пород // Геофизические исследования при решении геологических задач в Восточной Сибири. Вып. 3. – М.: Недра, 1964. – С. 210–221.
17. *Прохоров А.В.* Логарифмически нормальное распределение // Математическая энциклопедия. Т. 3. – М.: Сов. энциклопедия, 1982. – С. 408.
18. *Гнеденко Б.В.* и др. Математические методы в теории надежности. – М.: Наука, 1965. – 524 с.

БАБЕЦЬ Дмитро Володимирович – аспірант Національного гірничого університету України.

Наукові інтереси:
– механіка гірських порід.

РУБЕЦЬ Григорій Тихонович – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник Інституту геотехнічної механіки НАН України.

Наукові інтереси:
– механіка гірських порід.

СДВИЖКОВА Олена Олександрівна – кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики Національного гірничого університету України.

Наукові інтереси:
– механіка гірських порід.

Подано 15.01.2003