

УДК 539.376

В.В. Михайленко, д.ф.-м.н.
Житомирський інженерно-технологічний інститут
А.Ц. Франовський, к.ф.-м.н., доц.
Житомирський державний педагогічний університет ім. І.Франка

МОДЕЛЮВАННЯ ОДНОЧАСТОТНИХ КОЛИВАНЬ П'ЕЗОЕЛЕМЕНТІВ В УМОВАХ СИЛЬНОГО ДИСИПАТИВНОГО РОЗІГРІВУ І ЧАСТКОВОЇ ТЕПЛОВОЇ ДЕПОЛЯРИЗАЦІЇ

Представлені результати розрахунків електромеханічних коливань п'єзокерамічного циліндра і кулі з отвором в умовах сильного дисипативного розігріву і часткової теплової деполаризації п'єзоматеріалу.

Сильна залежність електромеханічних властивостей п'єзоматеріалу від температури і його слабка теплопровідність призводять до того, що ефективне збудження резонансних режимів коливань п'єзоелементів протягом тривалого часу можливе лише при автопідстроюванні частоти (АПЧ) навантаження. В протилежному випадку резонансна частота в результаті вібророзігріву змінює своє номінальне значення і для підтримування амплітуд вихідних функціональних характеристик п'єзоелемента на незмінному рівні потрібне додаткове підведення потужності. Крім того, в залежності від рівня навантаження та умов теплообміну температура дисипативного розігріву в деяких областях п'єзоелемента може досягати точки Кюрі, в результаті чого ці області деполаризуються [1].

Постановка задачі про коливання та дисипативний розігрів п'єзоелементів з врахуванням залежності властивостей п'єзоматеріалу від температури базується на припущенні, що тривалістю перехідних процесів електромеханічних коливань в порівнянні з часом суттєвої зміни температури дисипативного розігріву можна знехтувати. В термінах комплексних амплітуд електромеханічних змінних і усередненої за період коливань температури дисипативного розігріву T така постановка задачі включає в себе [2]:

а) стаціонарну задачу електромеханіки:

$$\tilde{\sigma}_{ij,i} + \rho\omega^2 \tilde{u}_j = 0, \quad \tilde{D}_{j,i} = 0, \tag{1}$$

$$\tilde{\varepsilon}_y = \frac{1}{2}(\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{j,i}), \quad \tilde{E}_j = -\tilde{\varphi}_{,j}, \tag{2}$$

$$\tilde{\sigma}_{ij} n_j = \tilde{t}_i \quad \text{на } S_\sigma, \quad \tilde{u}_j = \tilde{u}_j \quad \text{на } S_u, \tag{3}$$

$$\tilde{D}_i n_i = -\tilde{\delta}_{noa} \quad \text{на } S_D, \quad \tilde{\varphi} = \tilde{\varphi} \quad \text{на } S_\varphi, \tag{4}$$

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{C}_{ijkl}^E \tilde{\varepsilon}_{kl} - \tilde{e}_{kij} \tilde{E}_k, \quad \tilde{D}_k = \tilde{e}_{kij} \tilde{\varepsilon}_{ij} + \tilde{\mu}_{kl} \tilde{E}_l; \tag{5}$$

б) нестационарну задачу теплопровідності:

$$\rho c_T \dot{T} = (\lambda_{ij} T_{,j})_{,i} + D', \quad D' = \frac{\omega}{2} \text{Im}(\tilde{\sigma}_{ij} \tilde{\varepsilon}_{ij} + \tilde{E}_j \tilde{D}_j), \tag{6}$$

$$-\lambda_{ij} T_{,j} n_i = \alpha_T (T - T^c) \quad \text{на } S, \quad T = T_0 \quad \text{при } t = 0.$$

Коефіцієнти у визначальних рівняннях (5) є функціями частоти ω і температури T , тобто

$$\tilde{C}_{ijkl}^E = \tilde{C}_{ijkl}^E(\omega, T), \quad \tilde{e}_{kij} = \tilde{e}_{kij}(\omega, T), \quad \tilde{\mu}_{ij} = \tilde{\mu}_{ij}(\omega, T). \tag{7}$$

Перехід від комплексних амплітуд електромеханічних змінних

$$\tilde{p} = \left\{ \tilde{\sigma}_{ij}; \tilde{u}_j; \tilde{\varepsilon}_{ij}; \tilde{D}_j; \tilde{E}_j; \tilde{\varphi}; \tilde{t}_j; \tilde{U}_j; \tilde{\delta}_{noa}; \tilde{\varphi} \right\} = p + ip^*$$

до дійсних величин приводиться за формулою:

$$p = \text{Re}(\tilde{p} e^{i\omega t}) = p' \cos \omega t - p'' \sin \omega t. \tag{8}$$

Наведений вище варіант постановки задачі уже з самого початку визначає і алгоритми її розв'язання, а саме: дисипативна функція D' із (6) в процесі інтегрування рівняння теплопровідності (6) повинна в певні моменти часу уточнюватись за результатами розв'язання

відповідних цим моментам (розподілам температури в ці моменти часу) стаціонарних задач електромеханіки, тобто алгоритм повинен бути покроковим у часі [2].

Із врахуванням автопідстроювання частоти покроковий алгоритм зводиться до розв'язання на n -му часовому кроці таких лінійних неоднорідних задач:

- 1) за температурою T знаходиться резонансна частота ω_p^n (уточнюється резонансна частота ω_p^{n-1} , знайдена на попередньому кроці);
- 2) на частоті ω_p^n і при температурі T знаходиться розподіл механічних та електричних полів;
- 3) за знайденим розподілом електромеханічних польових величин уточнюється дисипативна функція і визначається температура T шляхом розв'язання задачі теплопровідності з початковою температурою T^{n-1} . За початкову температуру вибирається температура $T^0 = T_0$.

Лінійні неоднорідні задачі на кожному часовому кроці (ітерації) розв'язуються з використанням методу скінченних елементів (МСЕ) і тому формулюються у варіаційній постановці [2]. Як базовий використовується ізопараметричний чотирикутний елемент з квадратичною апроксимацією переміщень, електричного потенціалу і температури. Дискретизовані рівняння електромеханіки і теплопровідності мають вигляд:

$$(\tilde{\mathbf{K}} - \omega^2 \mathbf{M})\tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{P}}\tilde{\phi} = \tilde{\mathbf{F}}, \quad \tilde{\mathbf{P}}^T \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{D}}\tilde{\phi} = \tilde{\mathbf{Q}}, \quad (9)$$

$$\mathbf{HT} + \mathbf{CT} = \mathbf{q}, \quad (10)$$

де $\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\phi}$ – шукані вектори вузлових значень переміщень і електричного потенціалу; $\tilde{\mathbf{K}}, \tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{D}}$ – матриці механічної, “п’єзоелектричної” та “діелектричної” жорсткості; \mathbf{M} – матриця мас; $\tilde{\mathbf{F}}$ – вектор сил збудження; $\tilde{\mathbf{Q}}$ – вектор вузлових зарядів; $\tilde{\mathbf{H}}$ – матриця теплопровідності; \mathbf{T} – вектор вузлових температур; \mathbf{C} – матриця теплоємності. В тепловому джерелі \mathbf{q} враховуються всі типи внутрішніх втрат п’єзоматеріалу: механічні, діелектричні, “п’єзоелектричні”. Інтегрування рівняння (10) в часі проводиться з використанням неявної різницевої схеми першого порядку. У зв'язку з тим, що втрати суттєво не впливають на резонансні та антирезонансні частоти коливань, останні знаходяться в результаті розв'язання задач про вимушені коливання електропружного тіла (в (9) всі величини слід вважати дійсними), які збуджуються електричною напругою на електродах п’єзоелемента. При цьому використовується зміна знаку електричного заряду Q при переході через резонансні ($Q = \infty$) та антирезонансні ($Q = 0$) частоти.

Розрахунки приводились для п’єзоелементів із п’єзокераміки ЦТСТБС-2, експериментальні температурні залежності механічних, діелектричних та п’єзоелектричних властивостей якої в інтервалі температур 20–180 °С наведені в роботі [3]. Згідно з цими експериментальними даними при 160–180 °С в даному п’єзоматеріалі спостерігається аномальне падіння п’єзомодулів, а також аномальна зміна механічних та діелектричних властивостей, що свідчить про розвиток в ньому деполаризаційних процесів [1]. При моделюванні коливань з врахуванням цих процесів за точку Кюрі приймалась температура 180 °С. Якщо в якій-небудь точці тіла температура досягала 180 °С, п’єзомодуль в цій точці покладались рівними нулю і в подальших розрахунках не враховувались.

Ефективність електромеханічного перетворення енергії п’єзоелементом характеризується коефіцієнтом електромеханічного зв'язку (КЕМЗ). Квадрат КЕМЗ k_e^2 вводиться як відношення здатної до обернення накопиченої на даній деформації в об'ємі п’єзоелемента електричної (механічної) енергії до всієї підведеної ззовні до п’єзоелемента механічної (електричної) енергії [4]. Для КЕМЗ з врахуванням втрат в матеріалі отримані такі формули [5]:

$$k_e^2 = \frac{k^2}{1+k^2}, \quad k^2 = \frac{|\tilde{\mathbf{Q}}_l - \tilde{\mathbf{C}}_e \Delta\tilde{\phi}|^2}{2U_T - C'_e |\Delta\tilde{\phi}|^2} \cdot \frac{C'_e}{|\tilde{\mathbf{C}}_e|^2}, \quad (11)$$

$$U_T = \frac{1}{2} \int_V (\sigma'_{ij} \varepsilon'_{ij} + \sigma''_{ij} \varepsilon''_{ij} + E'_k D'_k + E''_k D''_k) dV,$$

де V – об’єм п’єзоелемента; $\bar{Q}_1, \Delta\bar{\phi}$ – комплексні амплітуди електричного заряду і напруги на електродах; $\bar{C}_e = C'_e + iC''_e$ – комплексна ємність п’єзоелемента на нульових деформаціях, яка знаходиться із розв’язання електростатичної задачі з врахуванням діелектричних втрат.

Нааявність різного роду втрат, а також температурна залежність коефіцієнтів, що описують ці втрати, значно ускладнюють кількісний аналіз дисипації енергії при коливаннях п’єзоелектричних тіл. В роботі [6] введена та енергетично обґрунтована універсальна характеристика внутрішньої дисипації в п’єзоелектричних тілах, яка визначається як відношення електромеханічної енергії, дисипованої в об’ємі тіла за період коливань, до подвоєної середньої за період накопиченої електромеханічної енергії. Ця характеристика, яку в [6] названо коефіцієнтом затухання електромеханічних коливань (КЗЕМК), виражається через польові електромеханічні величини таким чином:

$$\psi = 2\pi \frac{\bar{D}_V}{\bar{U}_V}, \tag{12}$$

де

$$\bar{D}_V = \int_V (\sigma''_{ij} \epsilon'_j - \sigma'_i \epsilon''_{ij} + E''_k D'_k - E'_k D''_k) dV,$$

$$\bar{U}_V = \int_V (\sigma'_i \epsilon'_i + \sigma''_{ij} \epsilon''_{ij} + E'_j D'_j + E''_j D''_j) dV.$$

Далі представлені деякі результати розрахунків резонансних коливань п’єзоелементів з АПЧ в умовах, при яких температура дисипативного розігріву в деяких областях п’єзоелемента досягає точки Кюрі, в результаті чого ці області деполяризуються. Дослідження проведені на прикладі коливань п’єзокерамічних поляризованих за радіусом порожнистих циліндра і кулі з отвором, половини меридіональних перерізів яких показано на рис. 1.

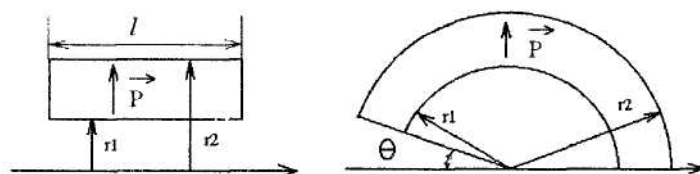


Рис. 1

Коливання збуджуються електричною напругою на електродах, що покривають циліндричні поверхні п’єзочиліндра і сферичні поверхні порожнистої кулі. Геометричні розміри циліндра і кулі взято із роботи [2]. Крім того, для початкової температури і температури зовнішнього середовища, а також коефіцієнта тепловіддачі приймалися такі значення: $T_0 = T^c = 20 \text{ }^\circ\text{C}$,

$$\alpha_1 = 20 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{град}}.$$

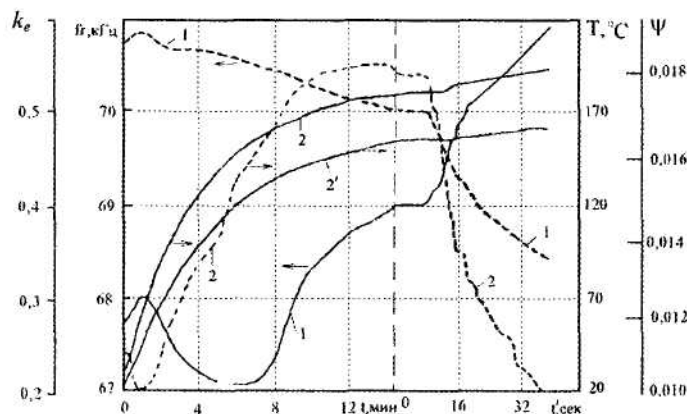


Рис. 2

На рис. 2 показано зміну в часі (суцільні лінії) резонансної частоти циліндра (крива 1), максимальної (крива 2) і середньої в об'ємі (крива 2') температури вібророзігріву. Штрихові лінії характеризують часові еволюції КЕМЗ (крива 1) і КЗЕМК (крива 2). Штрихова вертикальна лінія відповідає моменту початку деполяризації і ділить рисунок на дві частини. Ліва частина відповідає коливанням циліндра без деполяризації, права – коливанням в умовах виникнення і розширення в часі деполяризованої зони. Характер навантаження циліндра показано у верхній частині рис. 3.

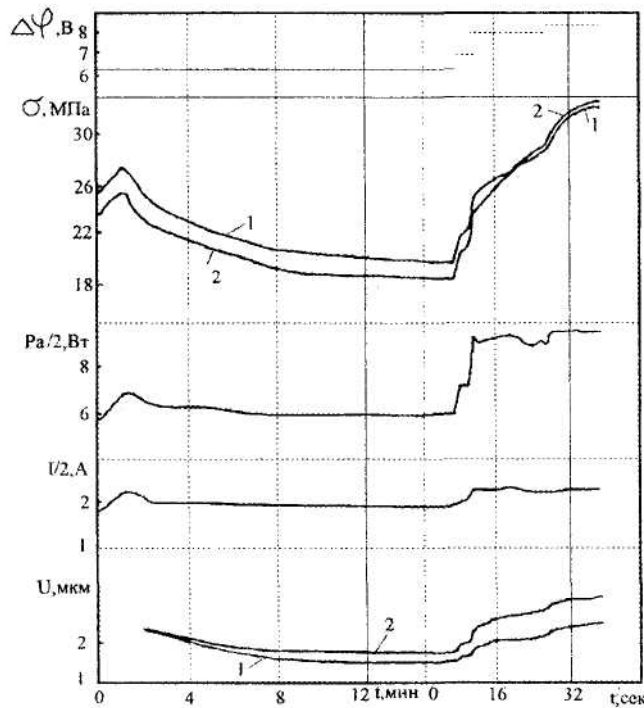


Рис. 3

Тут також представлені криві зміни в часі максимальних амплітуд колового (крива 1) і осового (крива 2) напружень; активної потужності P_a , що розсіюється в циліндрі (потужності втрат); амплітуди струму I ; максимальних амплітуд радіального (крива 1) і осового (крива 2) переміщень. Аналіз кривих на рис. 2 показує, що розвиток деполяризаційних процесів супроводжується швидким зменшенням КЕМЗ і зсувом резонансної частоти в область вищих частот. Викликане розігрівом суттєве початкове підвищення КЗЕМК з початком деполяризації змінюється швидким зменшенням цієї характеристики коливань, хоча температура продовжує наростати. На поведінку величин із рис. 3 впливає як характер навантаження п'єзоелемента, що проявляється в стрибкоподібному зростанні цих величин, так і деполяризація матеріалу. Це видно, наприклад, із зростання механічних напружень в межах однієї і тієї ж різниці потенціалів $\Delta\phi$ (наприклад, $\Delta\phi = 8V$), що прикладається. Така поведінка механічних напружень вказує на можливість ситуації, коли часткова деполяризація матеріалу в процесі резонансних коливань з АПЧ буде передувати механічному руйнуванню п'єзоелемента або, навіть, виступати причиною такого руйнування.

Відомо, що при коливаннях на п'єзоактивних резонансних частотах якісна картина розподілу температури дисипативного розігріву кулі залежить від величини отвору кулі [2]. Якщо при малих величинах отвору максимум температури спостерігається в околі отвору, то із збільшенням цього отвору максимум температури зсувається в полюс кулі. У зв'язку з цим нижче представлені результати розрахунків для двох величин отвору кулі, а саме: для величини $\theta = 30^\circ$, якій відповідає максимум температури вібророзігріву в полюсі, і для $\theta = 15^\circ$ з максимумом температури в околі отвору.

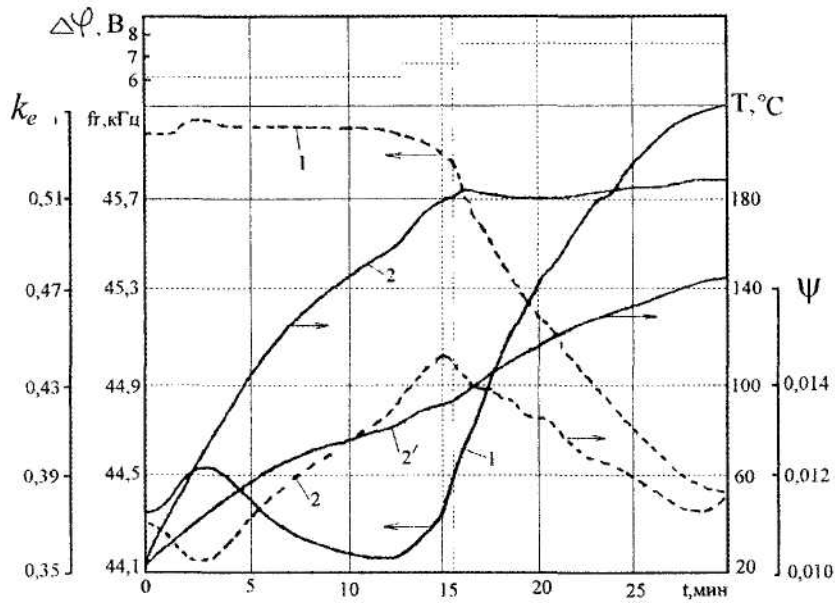


Рис. 4

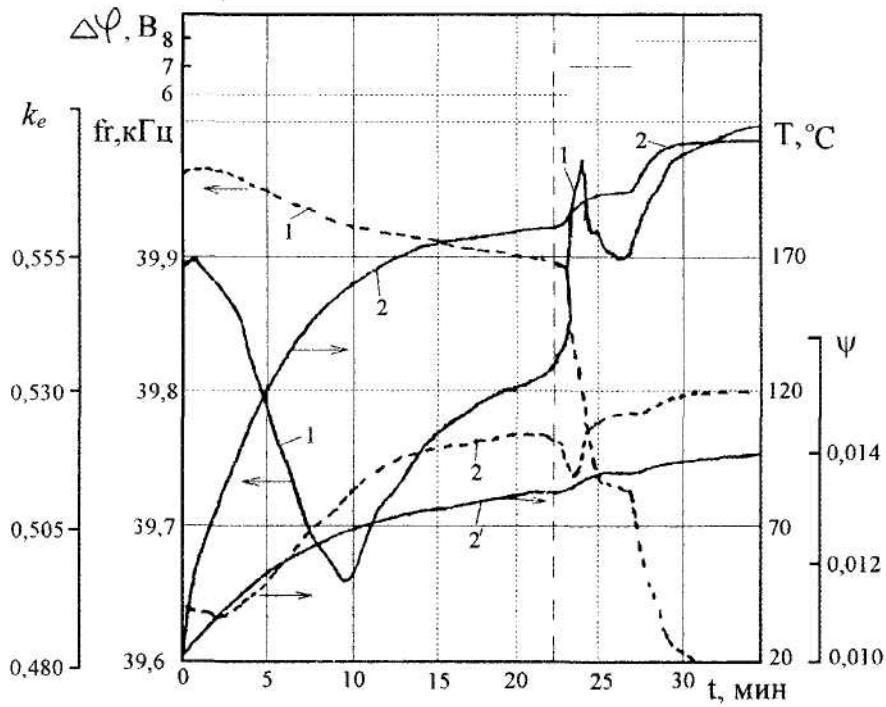


Рис. 5

На рис. 4, 5 наведені криві зміни в часі тих же величин і в тих же позначеннях, що і на рис. 2, відповідно при $\theta=30^\circ$ і $\theta=15^\circ$. Той же смисл має і вертикальна штрихова лінія. Характер навантаження показано у верхніх частинах рисунків.

Порівняння кривих на рис. 4, 5 показує, що зміна в часі температури, резонансної частоти, КЕМЗ і КЗЕМК для циліндра і кулі з отвором $\theta=30^\circ$ якісно аналогічні. Зростання максимальної температури (в полюсі кулі) з початком деполяризації сильно уповільнюється і мало реагує на збільшення напруги, що прикладається. Діапазони відхилень резонансної частоти, КЗЕМК і КЕМЗ від номінальних значень на рис. 4 не такі значні, як на рис. 2. Це пов'язано з тим, що циліндр знаходиться в більш розігрітому стані в порівнянні з кулею. Про це свідчать криві 2, 2' на рис. 2, 4. Напружений стан кулі при $\theta=30^\circ$ протягом всього процесу

коливань визначається коловим та тангенціальним напруженнями, амплітуди яких досягають своїх максимальних значень в полюсі кулі на її внутрішній поверхні.

Величини вказаних максимальних значень амплітуд напружень (в полюсі кулі амплітуда колового і тангенціального напружень співпадають) для деяких моментів часу із інтервалу на рис. 4 наведені в табл. 1.

Таблиця 1

t, хв.	0	8,5	13	15,5	16	17	19,5	24	29,5
$\Delta\varphi$, В	6,3	6,3	7	7	8	8	8	8	8
σ , МПа	20,7	20,5	21,8	19,5	22,3	21,6	21,1	23,7	24,7

Таблиця 2

t, хв.	0	2,5	4,5	10	20	23	23,5	24	27
$\Delta\varphi$, В	6	6	6	6	6	6	7	7	8
σ , МПа	41,0	42,3	41,8	38,3	36,9	37,2	43,5	42,9	44,9

Дані табл. 2 свідчать про небезпеку механічного руйнування кулі в околі отвору раніше, ніж в ній можуть проявитись деполяризаційні процеси.

Із зменшенням отвору кулі до величини $\theta = 15^\circ$ зона підвищеного дисипативного розігріву локалізується протягом всього процесу коливань в околі отвору, що суттєво (практично на порядок) обмежує відхилення резонансної частоти f_r від свого номінального значення (рис. 5) в порівнянні з попереднім випадком (рис. 4).

З початком деполяризації у часових еволюціях f_r на рис. 4, 5 спостерігається суттєва якісна відмінність, яка проявляється в екстремальній поведінці кривої 1 рис. 5 в порівнянні з монотонним зростанням кривої 1 (рис. 4). Резонансні коливання кулі при $\theta = 15^\circ$ характеризуються зоною високої механічної напруженості в околі отвору, що визначається коловим напруженням. В табл. 2 наведені максимальні значення амплітуд цього напруження в різні моменти часу до і після деполяризації. Амплітуди колового напруження в полюсі кулі, що відповідають моментам часу (із табл. 2), не перевищують 9 МПа.

Слід відмітити, що в розглянутих вище задачах максимальні значення амплітуд електричної напруженості суттєво нижчі тих значень, що характеризують електричну міцність п'єзоелектрика, так і тих значень, при яких спостерігається деполяризація нетемпературної природи [1].

Отже, наведені результати свідчать, що в режимі резонансних коливань з АПЧ і при відсутності вимушеного теплообміну можливість деполяризації (досягнення температурою точки Кюрі) не виключається навіть для відносно низьких рівнів навантаження, при яких небезпека механічного чи електричного руйнувань не виникає (циліндр, куля з отвором $\theta = 30^\circ$). В деяких випадках на перше місце виступає саме небезпека механічного руйнування п'єзоелемента (куля з отвором $\theta = 15^\circ$).

На закінчення відмітимо наступне. Проведені розрахунки основані на припущенні, що для механічних і діелектричних властивостей матеріалу при температурах, що перевищують 180°C , можна в першому наближенні використовувати ті ж значення, що і при 180°C . Через аномальну поведінку вказаних властивостей в околі точки Кюрі ($T_k = 180^\circ\text{C}$) і, перш за все, аномальне зростання механічної жорсткості і добротності матеріалу, таке припущення може призвести лише до завищення потужності дисипації і температури дисипативного розігріву в деполяризованих зонах. Проте навіть у цьому випадку розрахунки свідчать про незначне протягом всього процесу коливань відхилення температури дисипативного розігріву в деполяризованих зонах від 180°C . На основі аналізу отриманих вище результатів пропонується розглядати точку Кюрі як порогову точку дисипативного розігріву п'єзокераміки внаслідок механічних і діелектричних втрат (питання, пов'язані з розігрівом внаслідок температурного зростання чисто омичної провідності не розглядалися).

ЛІТЕРАТУРА:

1. Яффе Б., Кук У., Яффе Г. Пьезоэлектрическая керамика. – М.: Мир, 1974. – 288 с.

2. Карнаухов В. Г., Козлов В.И., Михайленко В.В. Метод конечных элементов в связанных задачах термоэлектровязкоупругости // Прикл. механика. – 1989. – 25, № 2. – С. 19–28.
3. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Электроупругость. – К.: Наук. думка, 1989. – 279 с. – (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 6-ти т.; Т. 3).
4. Шульга Н.А., Болкисев А.М. Колебания пьезоэлектрических тел. – К.: Наук. думка, 1990. – 228 с.
5. Михайленко В.В. Нахождение коэффициентов электромеханической связи при колебаниях вязкоупругих пьезоэлектрических тел // Докл. НАН України. Сер. А. – 1997. – № 6. – С. 66–69.
6. Михайленко В.В. До питання про дисипацію та накопичення електромеханічної енергії при коливаннях в'язкопружних п'єзоелектричних тіл // Вісник Київського ун-ту, серія: фіз.-мат. науки. – 1997. – С. 128–132.

МИХАЙЛЕНКО Василь Васильович – доктор фізико-математичних наук, завідувач кафедри вищої математики Житомирського інженерно-технологічного інституту.

Наукові інтереси:

– механіка деформівного твердого тіла.

ФРАНОВСЬКИЙ Анатолій Цезарович – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики Житомирського державного педагогічного університету ім. І. Франка.

Наукові інтереси:

– механіка деформівного твердого тіла.

Подано 08.10.2002