

УДК 621.923

О.А. Гавриш, к.т.н., с.н.с.

*Казенне підприємство «ДЦТН артилерійсько-стрілецького озброєння України»***ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ПРОЦЕСУ ТЕРМОМЕХАНІЧНОГО ОБРОБЛЕННЯ ІНСТРУМЕНТАМИ З ГНУЧКИМИ РОБОЧИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ***Наведені результати теоретичного дослідження процесу термомеханічного оброблення інструментами з гнучкими робочими елементами.*

Метод поверхневої оздоблювально-зміцнюючої обробки (ПОЗО) термомеханічного оброблення (ТМО) за допомогою інструменту з гнучкими робочими елементами (ГРЕ) є досить складним і багатограним, оскільки для досягнення необхідної чистоти поверхні, яка досягається видаленням корозійного нашарування, та якісних показників цієї поверхні, дана поверхнева обробка поєднує в собі вплив теплофізичного процесу та пружно-пластичних деформацій. Діяння в комплексі кожного з наведених наслідків у кінцевому результаті приводить до отримання якісної поверхні виробу.

Особливість взаємодії робочих елементів з поверхнею полягає ще й в тому, що конструкція інструменту передбачає розподілення щіткових секцій з ГРЕ на струмопровідні, які безпосередньо з'єднані з джерелом електричного струму і внаслідок контакту з поверхнею слугують електродами при виникненні електродугового розряду, та від цього контакту, тобто щіткової секції ДСЩ, що виконують лише механічну функцію очисно-зміцнюючої поверхневої обробки. Згідно з такою конструкцією інструменту різні секції ГРЕ по різному впливають на процес обробки поверхні виробу.

Нижче розглядаються основні теоретичні положення послідовності впливу кожного з формуючих факторів процесу ТМО, адже залежності переміщення поверхневої обробки миттєвого теплового джерела у поєднанні з її деформуванням внаслідок динамічної взаємодії з робочими елементами інструменту є основною складовою даного технологічного процесу ПОЗО.

У процесі контактування ГРЕ струмопровідної секції її робочими торцями з поверхнею виробу відбувається поєднання двох переміщень – обертання діаметральної сталеві щітки (ДСЩ) навколо своєї осі з швидкістю  $V_{щ}$  та горизонтальне переміщення інструменту або поверхні обробки (подача) один відносно іншого із швидкістю  $S$ , – результатами яких є утворення у просторі складної траєкторії переміщення. Враховуючи умову зародження та період існування електродугового розряду (від розриву безпосереднього контакту з поверхнею обробки до віддалення від неї на максимальну відстань  $H_d$ ), проекція на площину обробки траєкторії переміщення у просторі робочого торця ГРЕ вказуватиме на геометричні розміри сліду лунки, утвореного електродугою.

Встановлення дійсної величини залишеного на поверхні сліду необхідне для наступного визначення особливостей утворення мікрогеометрії профілю поверхні, що оброблювалась методом ТМО ДСЩ.

Для встановлення кінематики переміщення у просторі поверхні, яка слугує електродом у період існування дуги, розглядатимемо етап максимального віддалення ГРЕ від поверхні виробу, тобто такий етап процесу, коли відбувається переривання стовпа електророзряду (рис. 1).

В точці О виникає дуговий розряд, оскільки відбувається переривання безпосереднього контакту між струмопровідним ГРЕ та поверхнею деталі. В точці А утворений дуговий розряд досягає своєї максимальної довжини –  $H_a$ , значення якої залежить від ряду технологічних факторів обробки (сила струму  $I$ ; напруга  $U$ ; газу, що заповнює міжелектродний проміжок, тощо).

Попередньо задаємо наступні основні технологічні режими ТМО ДСЩ: швидкість обертання щітки  $V_{щ}$ ; подача  $S$ ; радіус інструменту  $R$ ; натяг ГРЕ –  $H_n$  (величина наближення робочих поверхонь ГРЕ з поверхнею оброблення).

Приймаємо осі координат  $XOY$  початкової позиції схеми процесу. Абсолютним переміщенням робочих торців ГРЕ на даному етапі є рух коловою орбітою з радіусом  $R$  та сталою швидкістю, розкладаємо це переміщення на два складові рухи: переносний поступальний прямолінійний рух точки О разом з інструментом та її переміщення відносно поверхні обробки.

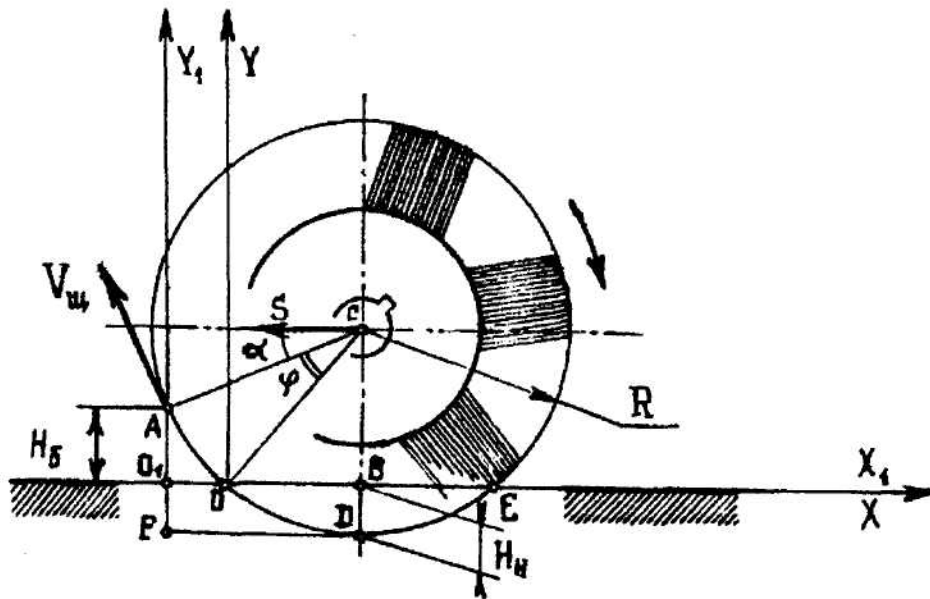


Рис. 1. Схема утворення довжини сліду дугового розряду на поверхні оброблення

Позначивши відносні координати системи  $X_1 O_1 Y_1$ , де вісь  $O_1 Y_1$  проходить через точку А, вкажемо умову додавання цих переміщень:

$$\begin{aligned} \text{або} \quad X_1 &= X_{01} + f_1(t); & Y_1 &= Y_{01} + f_2(t), \\ X_1 &= X_{01} + X, & Y_1 &= Y_{01} + Y. \end{aligned} \quad (1)$$

Вказавши кути, утворені поворотом одиничного ГРЕ, встановлюємо абсолютні координат точки О, як точки на робочій поверхні інструменту:

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= R \sin(\beta + \varphi) \\ Y_1 &= R \sin \alpha \end{aligned} \right\}$$

Оскільки довжина дуги  $AO = R \cdot \varphi = V_{щ} \cdot t$ , то  $\angle \varphi$  визначатиметься з виразу

$$\varphi = (V_{щ} t) / R.$$

Координати початку відносної системи відліку

$$\left. \begin{aligned} X_{01} &= St = (SR\varphi) / V \\ Y_{01} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Після підставлення в залежність (2.1.1)

$$\left. \begin{aligned} R \sin(\beta + \varphi) &= \frac{SR\varphi}{V} + X \\ R \sin \alpha &= Y \end{aligned} \right\}$$

Таким чином, параметричне рівняння відносної траєкторії переміщення у просторі робочої поверхні ГРЕ (рівняння кривої руху) становитиме:

$$\left. \begin{aligned} X &= R \sin(\beta + \varphi) - (SR\varphi) / V \\ Y &= R \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Для зручності розрахунку одержаної системи рівнянь згідно з рис. 1 встановлені значення кутів провірчування одиничного ГРЕ, застосовуючи прийняті вище параметри,

$$\alpha = \text{Arcsin} \left[ \frac{R - (H_H + H_\delta)}{R} \right];$$

$$\beta = \text{Arc cos} \left( \frac{R - H_H}{R} \right);$$

$$\varphi = \text{Arc sin} \left( \frac{R - H_H}{R} \right) - \text{Arc sin} \left[ \frac{R - (H_H + H_\delta)}{R} \right].$$

Підставивши одержані значення величин кутів у рівняння (2) та провівши певні математичні перетворення, отримано остаточний вираз для встановлення координат точок траєкторії їх переміщення у просторі:

$$\begin{aligned} X &= \left[ 2(H_H + H_\delta)R - (H_H + H_\delta)^2 \right]^{0,5} + [(SR\varphi) / V_{щ}] \\ Y &= R - (H_H + H_\delta) \end{aligned} \quad (3)$$

Проекція цієї траєкторії на поверхню оброблення вказуватиме розміри сліду дугового розряду, що з врахуванням значень  $V_{щ}$  та  $S$  дозволить встановлювати час впливу теплового джерела на поверхню, що важливо для визначення ступеня теплового зміцнення та фізико-механічних змін поверхневого шару основного металу виробу.

Вплив високотемпературної електродуги на поверхню металу в процесі ТМО в основному сприяє формуванню необхідних якісних параметрів поверхневого шару деталі. В свою чергу, механічне обертання інструменту з достатньо високою швидкістю за умови горизонтального переміщення виробу в напрямі подачі з певною трансляційною швидкістю дає змогу повністю вразити поверхню обробки хаотично розташованими слідами-лунками, що утворені як наслідок впливу дискретних електродугових розрядів.

Розглядаючи відрізок прямої переміщення поверхнею оброблення локального теплового джерела і безпосередньо точку переривання дугового розряду (максимальне віддалення робочої торцевої поверхні ГРЕ від поверхні деталі), в якій наведений відрізок розташований перпендикулярно напрямку подачі і здійснює переміщення в її напрямі з швидкістю  $V_{щ}$ , припускаємо, що на даному відрізку виникатимуть одночасно кілька електродугових розрядів. Відстань між двома сусідніми слідами-лунками буде рівною  $2b$ , що становитиме середньомовірнісну відстань  $lp$ .

Температурне поле, що поширюється в матеріалі деталі і утворене внаслідок дії концентрованого теплового джерела від одиничного ГРЕ, впливає відповідно на поширення температурного поля сусіднього дугового розряду, формуючи в цілому поширення теплового поля всією певною товщиною поверхневого шару виробу. Вважаючи, що кожне одиничне електродугове температурне джерело виділяє абсолютно однакову теплову потужність, приймаємо для розгляду механізму поширення теплоти наступну модель процесу впливу сукупності теплових джерел на тришарову поверхню – корозійне нашарування з послідовно розташованими прошарками іржі, прокатної окалини та основного металу виробу.

Вважатимемо, що розподіл густини теплового потоку елементарного (одиничного) теплового джерела підпорядковується нормальному круговому закону.

Окреме теплове джерело переміщується з швидкістю  $V_{щ}$  поверхнею, за умови, що  $Z = 0$  (рис. 2), нерухомої системи координат XYZ у позитивному напрямі стосовно осі  $O_1X$ . Рівняння, що описує прийнятий закон розподілу, відповідає наступному виразу:

$$q_1(X', Y) = q_0 \exp[-k_0(X'^2 + Y^2)].$$

Виходячи з умови переміщення теплового джерела  $q_1(X', Y)$  із сталою швидкістю, рівняння розподілу густини теплового потоку, за умови врахування змінної  $X' = (X - V_{щ}t)$ , отримуватиме вигляд:

$$q(X, Y, t) = q_0 \exp[-k_0(X' - V_{щ}t)^2] \exp[-k_0Y^2],$$

де  $q_0$  – максимальне значення густини розподілу тепловиділення у центрі плями нагрівання;

$k_0$  – коефіцієнт ущільнення теплового потоку;

$X, Y$  – відповідні координати точки, необхідні для встановлення радіальної відстані  $r$  від даної точки в зоні дії теплового джерела до його осі симетрії ( $r = (X^2 + Y^2)^{0,5}$ );

$X'$  – абсциса певної точки в рухомій системі координат.

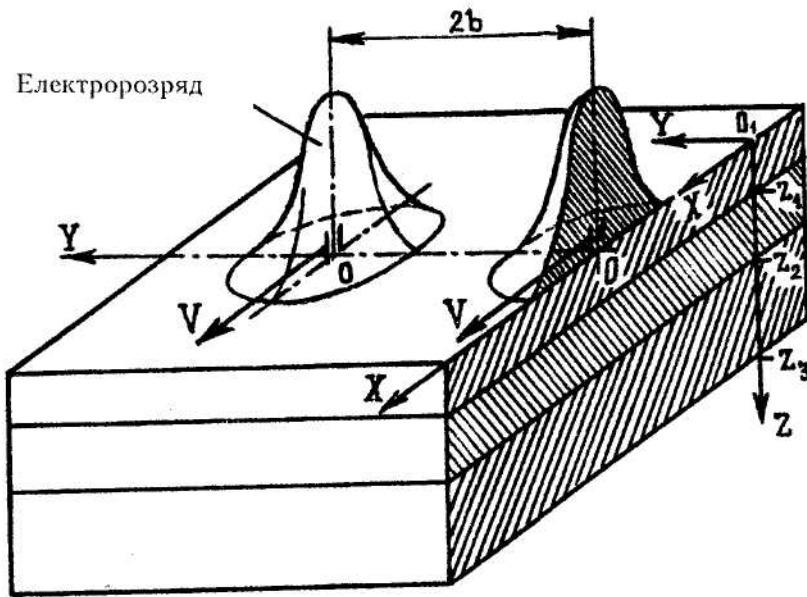


Рис. 2. Схема впливу концентрованого теплового потоку на багатощарову поверхню у процесі переміщення високотемпературного джерела

Величина середньої потужності тепловиділення  $W$ , що чисельно рівна об'єму фігури, обмеженої поверхнею, яка описується функцією  $q_1(X', Y)$  [1], встановлюється згідно з залежністю

$$W = q_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R_H} r \exp(-k_0 r^2) dr = \frac{q_0}{k_0} \pi [1 - \exp(-k_0 R_H^2)] = \pi \frac{q_0}{k_0} [1 - \exp(-k_0 (X'^2 + Y^2))],$$

де  $\varphi$  – центральний круг утвореної фігури.

Функція  $\exp[-k_0 (X_H'^2 + Y_H'^2)]$  перетворюється в нуль  $(X'; Y) \rightarrow +\infty$ .

Теоретичні розміри нормально-кругового теплового джерела є необмеженими, однак за умови, що  $\exp[-k_0 (X_H'^2 + Y_H'^2)] < 0,5$  та виразу  $k_0 R_H^2 = k_0 (X_H'^2 + Y_H'^2) > 3,0$ , ордината на колі радіусом  $R_H = (X_H'^2 + Y_H'^2)^{0,5} = (3 / k_0)^{0,5}$  становить лише 5 % від величини ординати, що розташована в центрі теплового джерела. Тому, приймаючи  $k_0 = 3 / R_H^2$ , отримуємо

$$q_0 = \frac{W k_0}{\pi(1 - 0,05)} = \frac{3W}{0,9\pi R_H^2} = 1,005189 \frac{W}{R_H^2}, \tag{4}$$

де  $R_H$  – радіус плями нагрівання поверхні оброблення, величину якого встановлюємо згідно з залежністю [2]:

$$R_H = [I / (\pi j)]^{0,5},$$

де  $j$  – питома вага струму в стовпі електродуги.

Ефективна потужність електродуги з врахуванням її коефіцієнта корисної дії ( $\eta = 0,7 / 12I$ ) визначається на основі залежності

$$W_e = \eta I U, \tag{5}$$

де  $I, U$  – відповідно сила струму і напруга на електродах, між якими виникає електродуга.

Використовуючи відому залежність між величинами  $I$  та  $U$  (стандарт ГОСТ 95-77),

$$U = 20 + 0,04I,$$

та застосовуючи вирази (4) і (5), отримуємо:

$$q_0 = 1,005189(20 + 0,04I) \frac{I}{R_H} \eta. \tag{6}$$

Величина сили струму  $I$  встановлюється згідно з залежністю, яка характерна для даного методу ТМО ДСЦ і враховує всі необхідні властивості матеріалу обробки геометричних та конструктивних особливостей інструменту [3]:

$$I = \frac{SV_{\delta}c\gamma}{UC_c\eta} \left( \frac{\pi DB}{C_c N_k} \right)^{0,5}, \quad (7)$$

де  $S$  – швидкість переміщення подачі заготовки інструменту;

$V_{\delta}$  – швидкість переміщення теплового джерела поверхню оброблення;

$c\gamma$  – питома теплоємність зовнішнього верхнього корозійного шару;

$C_c$  – кількість струмопровідних секцій ДСЦ;

$D$  – діаметр інструменту зовнішньої торцевої поверхні виступаючих ГРЕ;

$B$  – ширина робочої поверхні струмопровідних секцій ДСЦ;

$N_k$  – кількість ГРЕ струмопровідної секції, які розташовані на її робочій ширині.

Відомо, що поверхня, описана нормально-круговим законом, є симетричною відносно осі  $O_1X$  (в напрямку  $O_1Y$ ), то вважатимемо площину  $XO_1Y$  адіабатичною. Для спрощення викладу наступних математичних залежностей вважатимемо, що площина, яка проходить через точку з координатою  $Y_2 = b$ , паралельна площині  $XO_1Z$ , тобто проходить серединою між центрами двох сусідніх теплових джерел, і також є адіабатичною. Отже, теплообмін через вказані площини абсолютно відсутній.

*Задача* нестационарної теплопровідності для обмеженої тришарової пластини, граничною поверхнею якої переміщується нормально-кругове джерело теплоти. Маємо вздовж одного координатного напрямку необмежену тришарову призматичну пластину з початковою температурою  $T = T_o = 0$  °С. В початковий момент часу ( $t = 0$ ) на одній з граничних поверхонь ( $Z = 0$ ) в межах точки починається вплив теплового джерела, питома потужність якого становить  $q_1(X, Y)$ . Одночасно з початком температурного впливу це теплове джерело починає рівномірно і прямолінійно переміщуватися віссю  $OX$  з швидкістю  $V_{\delta}$ . В даному випадку розподіл теплового потоку описується залежністю (3), а зміна температури у кожному з трьох поверхневих шарів пластини відбувається у трьох координатних напрямках.

На межах контакту кількох корозійних шарів з характерними тільки їм теплофізичними властивостями, має місце ідеальний тепловий контакт, тобто підтверджується умова неперервності теплового потоку на контактних площинах.

Вздовж осі  $O_1X$  призматична пластинка обмежена, а вздовж осі  $O_1Y$  вона обмежена двома паралельними адіабатичними площинами, які проходять через точки  $Y_1 = 0$  та  $Y_2 = b$ .

Даною задачею необхідно встановити математичні залежності, що дозволяють визначити розподіл температури окремо в кожному з поверхневих корозійних шарів призматичної пластини у будь-який момент часу  $t$ .

Математично сформульована задача зводиться до розв'язку наступних диференціальних рівнянь (4):

$$\frac{1}{a_j} \frac{\partial T_j(X, Y, Z, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_j(X, Y, Z, t)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T_j(X, Y, Z, t)}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 T_j(X, Y, Z, t)}{\partial Z^2},$$

де  $a_j = \lambda_j / c_j \rho_j$  – коефіцієнт теплопровідності матеріалу одного з корозійних шарів пластини /5, 6, 7/;

$j = (1, 2, 3, \dots)$  – прийнята нумерація поверхневих шарів, де початком є верхній шар, тобто шар іржі;

$\lambda_j, c_j, \rho_j$  – відповідно коефіцієнти теплопровідності, масової теплоємності та густини окремо для кожного з поверхневих корозійних шарів.

Межі зміни змінних величин:  $-\infty < x < +\infty, 0 \leq Y \leq b,$

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq Z \leq Z_1, j = 1 \\ Z_1 \leq Z \leq Z_2, j = 2 \\ Z_2 \leq Z \leq Z_3, j = 3 \end{aligned} \right\}. \quad (9)$$

Початкова умова:

$$[T_j(x, y, z, t)]_{t=0} = 0. \quad (10)$$

Граничні умови:

– умова необмеженості розмірів пластини вздовж координати:

$$[T_j(X, Y, Z, t)]_{X \rightarrow \pm\infty} < +\infty, \quad \left[ \frac{\partial T_j(X, Y, Z, t)}{\partial X} \right]_{X \rightarrow \pm\infty} < +\infty; \quad (11)$$

– умова відсутності теплового потоку через бокові поверхні пластини (гранична умова 2-го роду):

$$\left[ \frac{\partial T_j(X, Y, Z, t)}{\partial Y} \right]_{Y=0} = 0, \quad \left[ \frac{\partial T_j(X, Y, Z, t)}{\partial Y} \right]_{Y=b} = 0; \quad (12)$$

– умова теплообміну системи, що складається з двох сусідніх шарів, які знаходяться в ідеальному тепловому контакті (гранична умова 4-го роду):

$$\left[ \lambda_1 \frac{\partial T_1(X, Y, Z, t)}{\partial Z} = \lambda_2 \frac{\partial T_2(X, Y, Z, t)}{\partial Z} \right]_{Z=Z_1}; \quad (13)$$

$$[T_1(X, Y, Z, t) = T_2(X, Y, Z, t)]_{Z=Z_1}; \quad (14)$$

$$\left[ \lambda_2 \frac{\partial T_2(X, Y, Z, t)}{\partial Z} = \lambda_3 \frac{\partial T_3(X, Y, Z, t)}{\partial Z} \right]_{Z=Z_2}; \quad (15)$$

$$[T_2(X, Y, Z, t) = T_3(X, Y, Z, t)]_{Z=Z_2}; \quad (16)$$

– умова конвективного теплообміну між нижньою поверхнею пластини  $Z = Z_3$  та оточуючим зовнішнім середовищем з  $T_0 = 0$ , що підпорядковується закону Ньютона (гранична умова 3-го роду):

$$\left[ -\lambda_3 \frac{\partial T_3(X, Y, Z, t)}{\partial Z} + \alpha_3 T_3(X, Y, Z, t) \right]_{Z=Z_3} = 0, \quad (17)$$

де  $\alpha_3$  – коефіцієнт теплообміну між поверхнею пластини та оточуючим середовищем;

– умова дії теплового джерела на верхній площині пластини ( $Z = 0$ ) за законом розподілу (3) теплового потоку (гранична умова 2-го роду):

$$q(X, Y, t) = \left[ -\lambda_1 \frac{\partial T_1(X, Y, Z, t)}{\partial Z} \right]_{Z=0} q_0 \exp[-k_0(x - Vt^2)] \exp[-k_0 Y^2]. \quad (18)$$

Аналізуючи диференційне рівняння (8), початкові умови (10)–(18), відзначаємо, що вони є однорідними крім крайньої умови (18), яка є неоднорідною. Також зауважимо, що наведені вирази (8)–(18) слід віднести до лінійних.

Розв'язування поставленої задачі проводиться методом виділення змінних або методом Фур'є [8, 9, 10]. Метод Фур'є застосовуємо для отримання розв'язку рівняння теплопровідності параболічного типу [11].

Даний метод полягає у знаходженні розв'язку задачі за певною системою ортогональних функцій, які визначаються задачею Штурма-Ліувілья [12].

Розв'язок рівняння (8) –  $T_j(X, Y, Z, t)$  – виражаємо у вигляді функції

$$T_j(X, Y, Z, t) = U_j(X, Y, Z, t) + W_j(X, Y, Z, t) + V_j(X, Y, Z, t), \quad (19)$$

де  $U_j(X, Y, Z, t)$  – функція, що дає змогу перевести неоднорідні граничні умови (8) у початкові умови та перетворити вихідне диференційне рівняння з однорідного в неоднорідне;

$W_j(X, Y, Z, t)$  – функція, що отримана внаслідок розв'язування крайової задачі, яка складається з неоднорідного диференційного рівняння та однорідних початкових умов;

$V_j(X, Y, Z, t)$  – функція, що отримується як наслідок розв'язку крайової задачі з вихідними однорідними диференційними рівняннями, однорідними граничними та неоднорідними початковими умовами.

Розв'язування поставленої задачі:

а) *Визначення функції для отримання однорідних граничних умов.*

Функцію  $U_j(X, Y, Z, t)$  визначаємо у вигляді:

$$\left. \begin{aligned} U_1(X, Y, Z, t) &= A + Bz \\ U_2(X, Y, Z, t) &= C + Dz \\ U_3(X, Y, Z, t) &= K + Mz \end{aligned} \right\}, \quad (20)$$

де  $A, B, C, D, K, M$  – відповідні коефіцієнти;

$Z$  – змінна величина.

Позначивши

$$F_j(X, Y, Z, t) = W_j(X, Y, Z, t) + V_j(X, Y, Z, t),$$

а також застосовуючи вираз (19), підставивши його в (8), (10), (13)–(18), одержуємо наступні крайові умови для визначення функції  $U_j(X, Y, Z, t)$  та  $F_j(X, Y, Z, t)$ :

$$\left. \begin{aligned} \left[ -\lambda_1 \frac{\partial U_j(X, Y, Z, t)}{\partial Z} \right]_{Z=0} &= q(X, Y, t) \\ \left[ -\lambda_j \frac{\partial U_j(X, Y, Z, t)}{\partial Z} = \lambda_{j+1} \frac{\partial U_j(X, Y, Z, t)}{\partial Z} \right]_{Z=Z_j} & \end{aligned} \right\}, \quad (21)$$

$$\left. \begin{aligned} [U_j(X, Y, Z, t) = U_{j+1}(X, Y, Z, t)]_{Z=Z_j} \\ \left[ \lambda_3 \frac{\partial U_3(X, Y, Z, t)}{\partial Z} + \alpha_3 U_3(X, Y, Z, t) \right]_{Z=Z_j} &= 0, \\ [U_j(X, Y, Z, t)]_{t=0} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (22)$$

$$\left. \begin{aligned} \left[ -\lambda_1 \frac{\partial F_1(X, Y, Z, t)}{\partial Z} \right]_{Z=0} &= 0 \\ [F_j(X, Y, Z, t) = F_{j+1}(X, Y, Z, t)]_{Z=Z_j} \\ \left[ \lambda_3 \frac{\partial F_3(X, Y, Z, t)}{\partial Z} + \alpha_3 F_3(X, Y, Z, t) \right]_{Z=Z_j} &= 0 \\ [F_j(X, Y, Z, t) = -U_j(X, Y, Z, t)]_{t=0} \\ \left[ \lambda_j \frac{\partial F_j(X, Y, Z, t)}{\partial Z} = \lambda_{j+1} \frac{\partial F_{j+1}(X, Y, Z, t)}{\partial Z} \right]_{Z=Z_j} & \end{aligned} \right\}, \quad (23)$$

$$\frac{1}{a_j} \frac{\partial F_j(X, Y, Z, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 F_j(X, Y, Z, t)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 F_j(X, Y, Z, t)}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 F_j(X, Y, Z, t)}{\partial Z^2} + f_j(X, Y, Z, t), \quad (24)$$

де  $f_j(X, Y, Z, t)$  – функція, що встановлюється згідно з наступним виразом:

$$f_j(X, Y, Z, t) = \frac{\partial^2 U_j(X, Y, Z, t)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U_j(X, Y, Z, t)}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 U_j(X, Y, Z, t)}{\partial Z^2} - \frac{1}{a_j} \frac{\partial U_j(X, Y, Z, t)}{\partial t}. \quad (25)$$

Розглядаючи вираз (21), отримано наступну систему лінійних рівнянь, на основі якої визначаються невідомі коефіцієнти:

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda_1 B &= q(X, Y, t) \\ \lambda_1(BZ_1) &= \lambda_2(DZ_1) \\ \lambda_2(DZ_2) &= \lambda_3(MZ_2) \\ (A + BZ_1) &= (C + DZ_1) \\ (C + DZ_2) &= (K + MZ_2) \\ \lambda_3(MZ_3) + \alpha_3(K + MZ_3) &= 0 \end{aligned} \right. \left\{ \begin{aligned} B &= -\frac{1}{\lambda_1} q(X, Y, t), \\ D &= -\frac{1}{\lambda_2} q(X, Y, t), \\ M &= -\frac{1}{\lambda_3} q(X, Y, t), \\ A &= \left[ \left( 1 + \frac{\alpha_3}{\lambda_3} \right) Z_3 + \left( \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_3} \right) Z_2 + \left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) Z_1 \right] q(X, Y, t), \\ C &= \left[ \left( 1 + \frac{\alpha_3}{\lambda_3} \right) Z_3 + \left( \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_3} \right) Z_2 \right] q(X, Y, t), \\ K &= Z_3 \left( 1 + \frac{\alpha_3}{\lambda_3} \right) q(X, Y, t). \end{aligned} \right.$$

Використовуючи систему (21), отримуємо наступне:

$$\left. \begin{aligned} U_1(X, Y, Z, t) &= \left[ \left( 1 + \frac{\alpha_3}{\lambda_3} \right) Z_3 + \left( \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_3} \right) Z_2 + \left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) Z_1 - \frac{1}{\lambda_1} Z \right] q(X, Y, t); \\ U_2(X, Y, Z, t) &= \left[ \left( 1 + \frac{\alpha_3}{\lambda_3} \right) Z_3 + \left( \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_3} \right) Z_2 - \frac{1}{\lambda_1} Z \right] q(X, Y, t); \\ U_3(X, Y, Z, t) &= \left[ \left( 1 + \frac{\alpha_3}{\lambda_3} \right) Z_3 - \frac{1}{\lambda_1} Z \right] q(X, Y, t). \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Застосовуючи рівняння розподілу густини теплового потоку (3), з рівняння (25) визначена функція:

$$f_j(X, Y, Z, t) = \left[ \left( 1 + (X - Vt)^2 4k_0^2 - \left( 1 + \frac{V}{a_j} (X - Vt) \right) \right) 2k_0 \right] U_j(X, Y, Z, t). \quad (27)$$

б) *Крайова задача з однорідним диференціальним рівнянням, граничними умовами та неоднорідними початковими умовами.*

Математичне формулювання даної крайової задачі представлено в наступному вигляді:

$$\frac{1}{a_j} \frac{\partial W_j(X, Y, Z, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 W_j(X, Y, Z, t)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W_j(X, Y, Z, t)}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 W_j(X, Y, Z, t)}{\partial Z^2}; \quad (28)$$

$$[W_j(X, Y, Z, t) = -U_j(X, Y, Z, t)]_{t=0} = -\Phi_j(X, Y, Z); \quad (29)$$

$$[W_j(X, Y, Z, t)]_{X \rightarrow \pm\infty \leftarrow +\infty}; \quad \left[ \frac{\partial W_j(X, Y, Z, t)}{\partial X} \right]_{X \rightarrow \pm\infty} < +\infty \quad (30)$$

$$\left[ \frac{\partial W_1(X, Y, Z, t)}{\partial Z} \right]_{Z=0} = 0; \quad (31)$$

$$\left[ \lambda_j \frac{\partial W_j(X, Y, Z, t)}{\partial Z} = \lambda_{j+1} \frac{\partial W_{j+1}(X, Y, Z, t)}{\partial Z} \right]_{Z=Z_j}; \quad (32)$$

$$[W_j(X, Y, Z, t) = W_{j+1}(X, Y, Z, t)]_{Z=Z_j}; \quad (33)$$

$$\left[ \lambda_3 \frac{\partial W_3(X, Y, Z, t)}{\partial Z} + \alpha_3 W_3(X, Y, Z, t) \right]_{Z=Z_3} = 0; \quad (34)$$

$$\left[ \frac{\partial W_j(X, Y, Z, t)}{\partial Y} \right]_{Y=0} = \left[ \frac{\partial W_j(X, Y, Z, t)}{\partial Y} \right]_{Y=b}.$$

Задача у декартовій системі координат відноситься до тримірних. Розв'язок проводиться у вигляді добутку власних функцій вздовж напрямку кожної з координат. Для визначення власних функцій та значень застосовуємо три задачі Штурма-Ліувілля [8, 12], які сформульовані для звичайних диференціальних рівнянь.

Метод Фур'є, метод відокремлення змінних, вимагає представити розв'язок однорідного диференційного рівняння (28) у вигляді добутку певних функцій, які є розв'язками відповідних одномірних задач:

$$W_j(X, Y, Z, t) = H_{xj}(X, t) \cdot H_{yj}(Y, t) \cdot H_{zj}(Z, t), \quad (35)$$

або

$$W_j(X, Y, Z, t) = \Psi_j(X, Y, Z) \cdot B_j(t), \quad (36)$$

де  $\Psi_j(X, Y, Z)$  – власна функція розв'язування одномірних задач;

$H_j(t)$ ,  $B_j(t)$  – функції, що забезпечують відокремлення змінних величин.

Підставляючи вираз (35) в (28), отримуємо:

$$H_y H_z \left( \frac{\partial^2 H_x}{\partial X^2} - \frac{1}{a_j} \frac{\partial H_x}{\partial t} \right) + H_x H_z \left( \frac{\partial H_y}{\partial Y^2} - \frac{1}{a_j} \frac{\partial H_y}{\partial t} \right) + H_x H_y \left( \frac{\partial H_z}{\partial Z^2} - \frac{1}{a_j} \frac{\partial H_z}{\partial t} \right) = 0.$$

Поділивши отримане на добуток  $H_{xj} \cdot H_{yj} \cdot H_{zj}$ , встановлюємо



$$\frac{1}{H_x} \left( \frac{\partial^2 H_x}{\partial X^2} - \frac{1}{a_j} \frac{\partial H_x}{\partial t} \right) + \left( \frac{\partial^2 H_y}{\partial Y^2} - \frac{1}{a_j} \frac{\partial H_y}{\partial t} \right) \frac{1}{H_y} + \frac{1}{H_z} \left( \frac{\partial^2 H_z}{\partial Z^2} - \frac{1}{a_j} \frac{\partial H_z}{\partial t} \right) = 0. \quad (37)$$

Далі розглядаються три однорідні задачі на визначення власних значень та власних функцій:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_x}{\partial X^2} - \frac{1}{a_j} \frac{\partial H_x}{\partial t} &= 0; \\ \frac{\partial H_y}{\partial Y^2} - \frac{1}{a_j} \frac{\partial H_y}{\partial t} &= 0; \\ \frac{\partial H_z}{\partial Z^2} - \frac{1}{a_j} \frac{\partial H_z}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

або в загальному вигляді:

$$\frac{\partial^2 H_\sigma(\sigma, t)}{\partial \sigma^2} = \frac{1}{a_j} \frac{\partial H_\sigma(\sigma, t)}{\partial t}, \quad (39)$$

де  $\sigma$  – узагальнююча координата ( $\sigma = \{X, Y, Z\}$ ).

Ці залежності дозволяють якісно описати ПОЗО ТМО гнучким робочим елементом за допомогою ПЕОМ, дослідити вплив окремих технологічних факторів на параметри обробки поверхні.

#### ЛІТЕРАТУРА:

1. Резников А.Н., Резников Л.Н. Тепловые процессы в технологических системах. – М.: Машиностроение, 1990. – 288 с.
2. Зарубин В.С. Инженерные методы решения задач теплопроводности. – Энергоиздат, 1983. – 328 с.
3. Куліченко І.Я. Термомеханічна поверхнева очисно-зміцнююча обробка металу. – Львів: Кобзар, 1997. – 216 с.
4. Броун М.Я., Погудин Г.И. Термическая теория электросварочной дуги. – М.: Машгиз, 1951. – 124 с.
5. Северденко В.П., Макушек Е.М. Окалина при горячей обработке металлов азвлением. – М.: Металлургия, 1977. – 208 с.
6. Архаров В.И. Окисление металлов. – М.: Металлургиздат, 1945. – 171 с.
7. Браун М.Я., Погудин Г.И. Термическая теория электросварочной дуги. – М.: Машгиз, 1951. – 124 с.
8. Беляев М.М., Рядно О.А. Математические методы теплопроводности. – Киев: Вища школа, 1992. – 415 с.
9. Зарубин В.С. Инженерные методы решения задач теплопроводности. – М.: Энергоиздат, 1983. – 328 с.
10. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. – М.: Физматгиз, 1962. – 708 с.
11. Карташев Е.М. Аналитические методы теплопроводности. – Киев: Вища школа, 1985. – 480 с.
12. Положий Г.Н. Уравнения математической физики. – М.: Вища школа, 1989. – 560 с.

ГАВРИШ Олег Анатолійович – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, начальник науково-дослідного і проектно-конструкторського бюро Казенного підприємства «Державний науково-технічний центр артилерійсько-стрілецького озброєння України».

Наукові інтереси:

– фінішні методи оздоблювальної обробки матеріалів.