УДК 517.977.58, 519.872.6

Р.В. Тищук
Донецький національний технічний університет

ЗАДАЧА ПРО МАКСИМАЛЬНИЙ БАГАТОТОВАРНИЙ ПОТІК В НЕЧІТКІЙ МЕРЕЖІ ЗІ СПІЛЬНИМ ПРИЙМАЧЕМ

Досліджено задачу визначення максимального потоку у багатотоварній мережі зі спільним приймачем в умовах нечітких початкових даних. Показано методику модифікацій потокових мереж для рішення складних оптимізаційних задач. Розроблено алгоритм рішення задачі визначення максимального багатотоварного потоку в нечіткій мережі зі спільним приймачем з використанням методів агрегування. Продемонстровано роботу алгоритму на ілюстративних прикладах.

1. Вступ

У складних транспортних та комунікаційних системах між множиною пар джерел та приймачів можуть переміщуватися незалежно один від одного декілька товарів або інформаційних потоків.

Задача визначення величини максимального потоку між двома вузлами мережі добре відома як «задача про максимальний потік у мережі». Узагальненням цієї задачі є задача визначення максимального значення потоків, які незалежно можуть виникати між множиною пар вузлів мережі. Ця задача відома як «задача про максимальний багатотоварний потік у мережі».

На сьогоднішній день запропоновано багато методів для рішення цих задач для мереж, у яких характеристики задані чіткими числами [1–2,11]. Однак на практиці потоки та пропускні здатності мереж часто визначаються неточно. У зв'язку з цим резонно задавати ці мережеві характеристики інтервальними величинами або нечіткими числами [3–4]. У даній роботі наведено рішення задачі про багатотоварний потік у мережі зі спільним приймачем та нечіткими пропускними здатностями та потоками. Цей підхід є аналогом алгоритму рішення цієї задачі для чітких мереж [5].

Нехай $G = (V, E, L)$ – направлений граф, де V – множина вузлів, E – множина направлених ребер, L – множина N товарів. Нехай $\mathrm{f}^{\ell}(i,j)$ – потік товару ℓ через ребро (i,j). Множина $\mathrm{f}^{\ell}(i,j)$, яка задовольняє відповідним умовам збереження, називається планом розподілу ℓ товару (F^{ℓ}). Нехай джерело та приймач задані різними вузлами мережі: товар виникає у джерелі v_{S_ℓ} та поглинається у приймачі v_{T_ℓ}. Тоді $\mathrm{f}^{\ell}{}_{S_\ell,T_\ell}$ – величина потоку товару ℓ від джерела v_{S_ℓ} до приймача v_{T_ℓ}. Умови збереження та обмеження за пропускною здатністю визначаються за аналогією із випадком однотоварного потоку наступним чином:

$$\mathrm{f}^{\ell}(i,v)-\mathrm{f}^{\ell}(v,i)=\begin{cases}\mathrm{f}^{\ell}{}_{S_\ell,T_\ell}\text{, якщо } i=S_\ell;\\ 0\text{, якщо } i\neq S_\ell,T_\ell \text{ для всіх } i,\ell;\\ \mathrm{f}^{\ell}{}_{S_\ell,T_\ell}\text{, якщо } i=T_\ell;\end{cases} \tag{1}$$

$$\mathrm{c}(i,j)\geq\sum_{\ell=1}^{N}\mathrm{f}^{\ell}(i,j) \qquad \text{для всіх (i,j);} \tag{2}$$

$$\mathrm{f}^{\ell}(i,j)\geq 0 \qquad \text{для всіх (i,j) та } \ell. \tag{3}$$

Існує досить багато застосувань, у яких використовуються нечіткі мережі. У зв'язку з цим існує декілька визначень нечіткої мережі, які залежать від предметної області. За класифікацією, наведеною у [10], нечітка потокова мережа являє собою чітку мережеву модель з нечіткими вагами. Таким чином, в нечіткій потоковій мережі з кожним ребром зв'язана пропускна здатність $\widetilde{c}(i,j)$, яка задана у вигляді нечіткого числа. Отже, у загальному випадку потік у нечіткій мережі, визначений на парах вершин (i,j) VxV, буде заданий також нечітким числом $\widetilde{\mathrm{f}}(i,j)$.

Умова збереження та обмеження за пропускною здатністю у нечітких мережах визначаються так само, як і в (1)–(3) з трансформацією чіткої пропускної здатності $c(i,j)$ в нечітку пропускну здатність $\tilde{c}(i,j)$ та чіткого потоку $f^{\ell}(i,j)$ в нечіткий потік $\tilde{f}^{\ell}(i,j)$.

Особливим випадком багатотоварних мереж є потокова мережа з одним вузлом-приймачем та необмеженим числом N вузлів-джерел. Без втрати загальності буде коректно припустити, що кожен вузол-джерело виробляє один єдиний та відмінний від інших товар (рис.1).

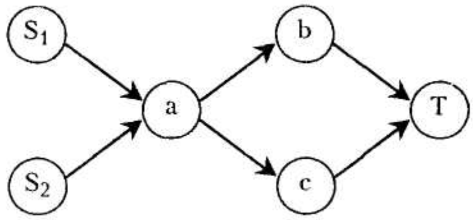

Рис.1. Багатотоварна мережа зі спільним приймачем

2. Формулювання проблеми

Теорія мережевих потокових систем пропонує моделі потокових систем для великої кількості практичних задач. Однак на практиці наші уявлення про реальний світ часто недостатньо точно визначені. Основні причини виникаючих невизначеностей при визначенні пропускних здатностей та потоків виглядають наступним чином:

– виникнення помилок при визначенні мережевих характеристик;

– інколи пропускні здатності та мережеві потоки можуть бути визначені тільки в межах деяких діапазонів або інтервалів із-за розкиду значень і неможливості одержання точної інформації. Крім того, мережеві характеристики можуть змінюватися в часі.

Таким чином, дані фактори показують, що пропускні здатності і мережеві потоки можуть мати неточно визначені значення, і дані невизначеності найкраще можна описати за допомогою нечітких чисел.

Однією з основних проблем при рішенні мережевих потокових задач є інтерпретація обмеження за пропускною здатністю через необхідність порівняння двох нечітких чисел. Однак іноді неможливо знайти більше із двох нечітких чисел, тому що вони можуть значною мірою перекриватися. Використовуючи основні коефіцієнти порівняння нечітких чисел теорії можливостей (PSE, PS, NSE, NS) [7, 8], можна визначити наступні два варіанти обмеження за пропускною здатністю (рис. 2):

$$\mathrm{Nec}\,(\underline{c} > \overline{f}) = 1, \tag{4}$$

$$\begin{cases} \mathrm{Nec}(\underline{c}\ \ \underline{f}) = 1, \\ 0 \le \mathrm{Pos}\,(\overline{f} > \underline{c}) \le 1, \\ \mathrm{Pos}\,(\overline{f} > \bar{c}) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Перший варіант (4) відповідає чіткій задачі визначення максимального потоку в мережі, де ступінь розмитості потоку $\tilde{f}$ зменшується до 0 і $\tilde{c}$ стає $\underline{c}$.

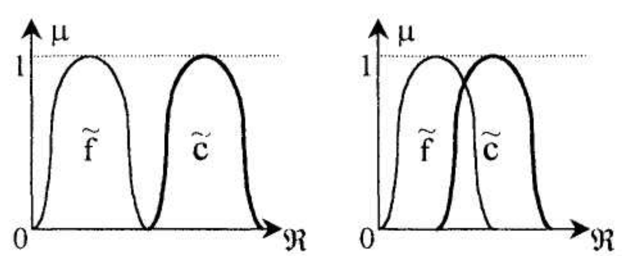

Рис. 2. Обмеження за пропускною здатністю в нечіткій мережі

Як розширення проблеми порівняння двох нечітких чисел існує проблема вибору мінімального нечіткого числа в процедурі розставлення міток, що досить часто використовується в оптимізаційних потокових мережевих задачах. Для визначення операції мінімуму в даному випадку не можна використовувати коефіцієнти порівняння теорії можливостей, а необхідно використовувати операцію "нечіткого" мінімуму, визначену як мінімум для лівих і правих границь для кожного α-рівня нечітких чисел.

Крім того, ключовою процедурою в задачі визначення максимального потоку в мережі є процес визначення шляху, що збільшує. У нечіткому випадку необхідно, щоб величина потоку, що збільшує, задовольняла умові зворотної операції (тобто операція визначення величини потоку, що збільшує, повинна бути зворотньою до операції визначення величини максимального потоку).

У процесі рішення задачі визначення максимального потоку в нечіткій мережі необхідно приймати до уваги наступні моменти:

– у загальному випадку не можна використовувати метод декомпозиції при рішенні оптимізаційних мережевих потокових задач в умовах нечітких початкових даних. Представлення нечіткої мережі кінцевим числом чітких мереж, рівним кількості α-рівнів, помноженим на 2 [3], може призвести до виникнення суперечливих і некоректних проміжних і кінцевих результатів [6];

– у загальному випадку не можна використовувати класичний алгоритм визначення шляху, що збільшує, у мережі з нечіткими початковими даними, замінюючи чіткі значення потоків і пропускних здатностей на нечіткі. Основною причиною цього є властивість незбалансованості нечіткої потокової мережі. Вона означає, що загальна величина потоку, який можна пропустити через вузол, може бути більше суми величин окремих потоків, що збільшують, через той же вузол при використанні процедури розставлення міток і проводячи операції з нечіткими числами за аналогією з чітким випадком [6].

Алгоритм визначення максимального потоку у багатотоварній мережі зі спільним приймачем для чіткого випадку запропоновано у [5]. Цей алгоритм основано на введенні в модель додаткового нового вузла – джерела v_S. Далі послідовно вводяться нові ребра (S, S_i) з необмеженою пропускною здатністю для усіх $i = \overline{1,N}$, де N – кількість вузлів-джерел. Після цього вирішуються послідовно задачі максимізації (S-T) потоків, використовуючи алгоритм розставлення міток і розглядаючи всі потоки як однотоварний потік.

Однак даний алгоритм не може бути застосований до мережі з нечіткими характеристиками, тому що при рішенні окремих оптимізаційних задач у підсумку можуть виникнути некоректні представлення нечітких чисел. Крім того, використовуючи цей метод, не завжди можливо знайти оптимальне рішення задачі.

Наступний приклад демонструє виникнення подібних некоректних ситуацій на прикладі мережі на рис. 1 з наступними початковими даними, представленими інтервальними нечіткими числами: $\tilde{c}(S_1,a) = (2,4)$; $\tilde{c}(S_2,a) = (2,4)$; $\tilde{c}(a,b) = (2,3)$; $\tilde{c}(a,c) = (2,2)$; $\tilde{c}(b,T) = (2,3)$; $\tilde{c}(c,T) = (2,2)$; усі початкові потоки приймаються рівними 0. Підсумковий результат даного прикладу буде наступним: $\tilde{f}(S_1,a) = (2,4)$; $\tilde{f}(S_2,a) = (1,1)$; $\tilde{f}(a,b) = (2,3)$; $\tilde{f}(a,c) = (1,2)$; $\tilde{f}(b,T) = (2,3)$; $\tilde{f}(c,T) = (1,2)$. Легко перевірити, що даний результат не є максимальним потоком, а тільки можливим потоком.

Таким чином, при рішенні оптимізаційних мережевих потокових задач в умовах нечітких початкових даних не можна використовувати фрагментацію загальної задачі на підзадачі і не можна використовувати декомпозицію початкової нечіткої мережі на кінцеве число чітких мереж.

3. Алгоритм рішення задачі про максимальний багатотоварний потік в нечіткій мережі зі спільним приймачем

Для рішення даної задачі пропонується використовувати комплексний розгляд нечіткої потокової мережі і провести деякі модифікації для спрощення структури мережі.

3.1. Метод агрегування

Одним з методів, що дозволяє спростити рішення задачі, є метод агрегування, сутністю якого є заміна деякої безлічі об'єктів (наприклад, вузлів мережі) одним єдиним об'єктом. Цей метод пропонується застосовувати для рішення задачі про максимальний багатотоварний потік в нечіткій мережі зі спільним приймачем, використовуючи агрегування вузлів-джерел (рис. 3). У цьому випадку рішення задачі зведеться до рішення оптимізаційної однотоварної мережевої потокової задачі з одним джерелом і одним приймачем.

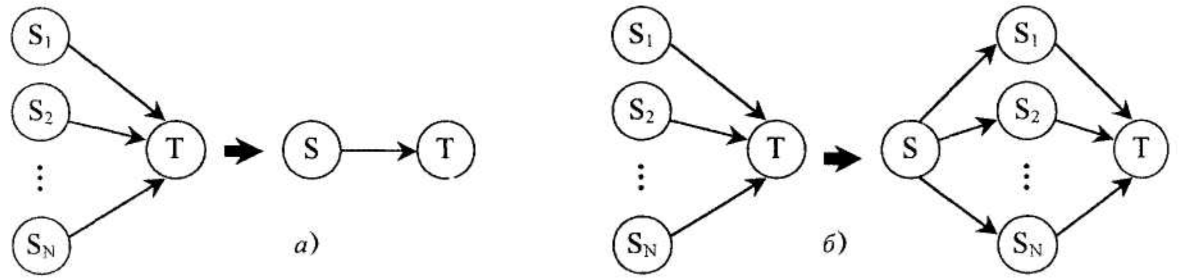

Рис. 3. Способи агрегування вузлів-джерел у багатотоварній потоковій мережі

У загальному випадку рішення задачі, отримане з використанням першого методу агрегування (рис. 3,*а*), не буде оптимальним. Крім цього, у деяких випадках в агрегованій подібним чином мережі неможливо буде знайти оптимальне рішення при тому, що воно буде існувати в початково заданій мережі. До того ж, використовуючи даний метод агрегування, неможливо буде провести декомпозицію по квазі-шляхах, тобто неможливо буде визначити величини потоків для кожного конкретного товару.

Дані факти зводять нанівець використання даного способу і призводять до необхідності використання другого методу агрегування (рис. 3,*б*). Для доведення адекватності даної техніки необхідно установити відповідність між параметрами початкової й агрегованої мереж.

Очевидно, що для збереження цілісності параметри ребер (S, v_{S_i}) повинні бути визначені в такий спосіб:

$$\widetilde{c}(S,v_{S_i}) = \sum_{j=1}^{K_{S_i}} \widetilde{c}(v_{S_i}, j) \quad \text{для всіх } i=\overline{1,N}, \tag{6}$$

де N – кількість вузлів-джерел; K_{S_i} – кількість ребер, що виходять з i-го вузла-джерела. Для простоти обчислень і для запобігання суперечливих ситуацій, зв'язаних з арифметичними операціями з нечіткими числами, було б краще використовувати наступне визначення:

$$\widetilde{c}(S,v_{S_i}) = \infty, \tag{7}$$

обмежуючи тим самим пропускну здатність ребра (S, v_{S_i}) пропускними здатностями ребер (v_{S_i}, j).

Значення потоків $\widetilde{f}(S,v_{S_i})$ необхідно визначити як (1), визначаючи значення потоків $\tilde{f}(S,v_{S_i})$ значеннями потоків $\widetilde{f}(v_{S_i},j)$ у випадку, коли початкові потоки не дорівнюють нулю.

Задача визначення максимального потоку в багатотоварній мережі зі спільним приймачем в умовах нечітких початкових даних формулюється в такий спосіб:

$$\sum_{t=1}^{N} \widetilde{f}^{\,t}{}_{S_t,T} \to \widetilde{\max}, \tag{8}$$

тобто величина потоку, що входить у приймач T, повинна бути максимальною.

Звідси випливає, що, оскільки параметри ребер (S, v_{S_i}) визначаються параметрами множини ребер (v_{S_i}, j), агрегована мережа буде еквівалента початковій мережі. Тобто рішення задачі про максимальний потік у початковій мережі для агрегованої мережі буде також коректним, і величина цільової функції не зміниться.

Таким чином, задача визначення максимального потоку в багатотоварній мережі зі спільним приймачем в умовах нечітких початкових даних вирішується на еквівалентній агрегованій мережі з одним джерелом та одним приймачем, використовуючи алгоритм рішення задачі про максимальний потік у нечіткій однотоварній мережі [6].

3.2. Загальна схема алгоритму

Крок 1. Увести новий вузол-джерело S.

Крок 2. Увести нові ребра (S, S_i) з необмеженими пропускними здатностями.

Крок 3. Знайти максимальний (S-T) потік, використовуючи алгоритм визначення максимального потоку в мережі в умовах нечітких вихідних даних [6] і розглядаючи всі потоки як потік одного товару.

Крок 4. Провести декомпозицію по квазі-шляхах, використовуючи план розподілу товару.

3.3. Ілюстративний приклад

Наступний приклад демонструє функціональність алгоритму, що максимізує $\sum_{i=1}^{2}\tilde{\mathbf{f}}^{i}_{S_i T}$ для мережі, зображеної на рис. 1, з наступними початковими характеристиками, представленими інтервальними нечіткими числами (рис. 4). Потік через ребро показаний над підкресленням, пропускна здатність ребра показана під підкресленням, мітка вузла показана в сірому прямокутнику.

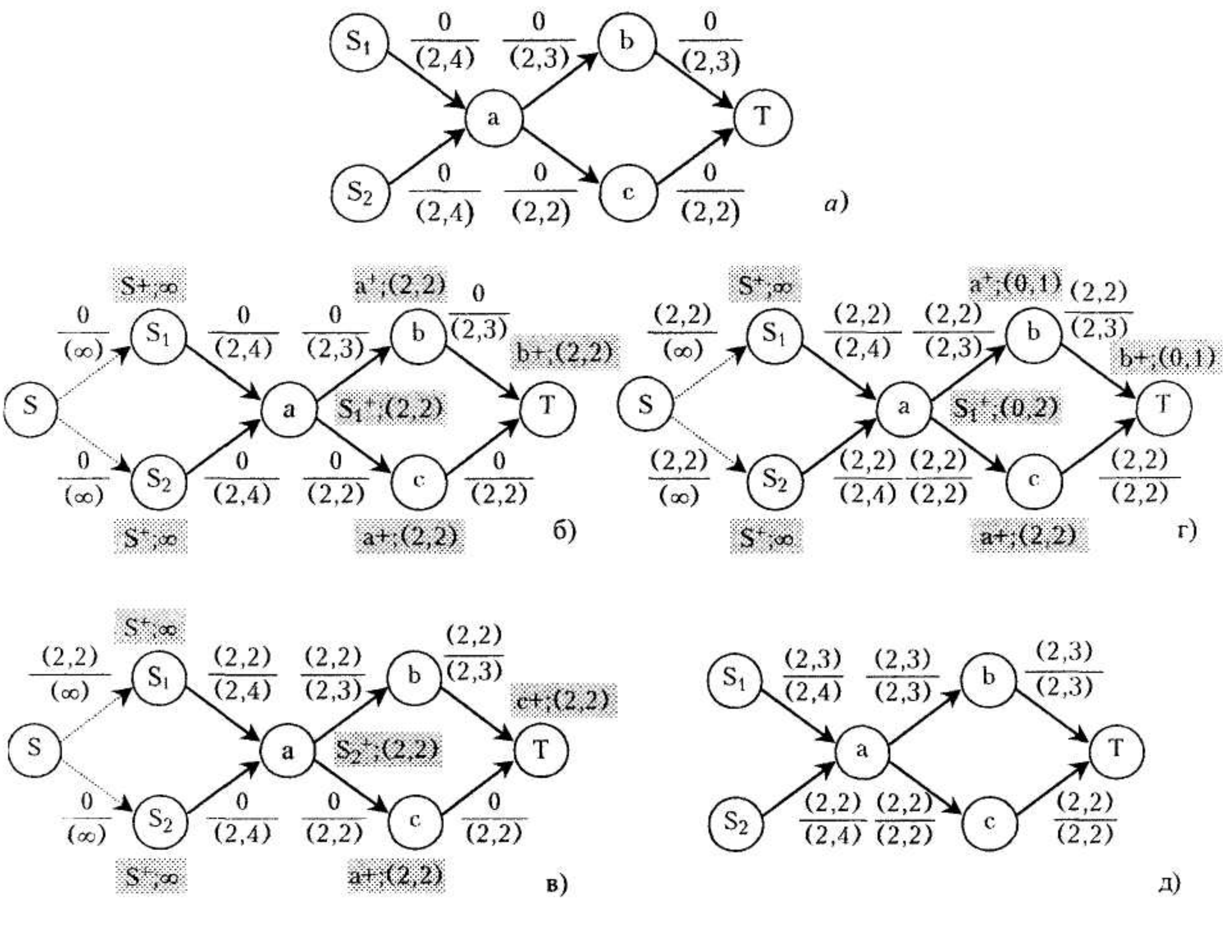

Рис. 4. Ілюстративний приклад роботи алгоритму

Потоки конкретних товарів нескладно визначити, використовуючи декомпозицію по квазі-шляхах.

4. Висновок

Для рішення оптимізаційних задач для однотоварних потокових мереж існує безліч ефективних алгоритмів. Однак більшість з них неможливо застосовувати для багатотоварних потокових мереж, і в загальному випадку оптимізаційні задачі для багатотоварних потокових мереж є дуже складними.

Аналогічно методи й алгоритми, що вирішують оптимізаційні задачі на чітких мережах, не можуть прямо застосовуватися у випадках, коли характеристики мережі представлені нечіткими числами.

У даній роботі розглянуто основні проблеми трансформації оптимізаційних алгоритмів для чітких потокових мереж, в алгоритми для мереж з нечіткими початковими даними. Показано необхідність комплексного розгляду потокової мережі. У зв'язку з великою складністю рішення задач на багатотоварних потокових мережах запропоновано підхід спрощення початкової мережі. Даний підхід, заснований на агрегуванні вузлів-джерел, запропоновано для рішення задачі визначення максимального потоку в багатотоварній мережі зі спільним приймачем в умовах нечітких початкових даних. Завдяки спрощенню початкової мережі рішення задачі зводиться до рішення задачі про максимальний потік для однотоварної мережі з одним джерелом та одним приймачем.

При рішенні задачі визначення максимального потоку в багатотоварній мережі зі спільним приймачем в умовах нечітких початкових даних у деяких випадках можуть виникати суперечливі некоректні ситуації при використанні обмеження за пропускною здатністю, описаного як (5). Можливість виникнення подібних ситуацій може бути визначена з використанням інтегрованого коефіцієнта PSE теорії можливостей [12]. У цьому випадку особа, що приймає рішення, повинна знаходити баланс між максимальним значенням потоку і можливістю виникнення некоректної ситуації.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *T.Leighton, F.Makedon, S.Plotkin, C.Stein, E.Tardos, S.Tragoudas*, Fast Approximation Algorithms for Multicommodity Flow Problems, Proceedings of the 23th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, 1993.
2. *C.Stein*, Approximation Algorithms for Multicommodity Flow and Shop Scheduling Problems, PhD Thesis, University of Texas at Dallas, 1995.
3. *P.Diamond*, A Fuzzy Max-Flow Min-Cut Theorem, Fuzzy Sets and Systems, 119 (2001).
4. *H.S. Shih, E.S. Lee*, Fuzzy Multi-Level Minimum Cost Flow Problems, Fuzzy Sets and Systems, 107 (1999).
5. *Филлипс Д., Гарсиа-Диас А.*, Методы анализа сетей. – М.: Мир, 1984.
6. *R.Tyshchuk*, Maximum Network Flow Algorithm With Fuzzy Input Data, 5th International Conference on Knowledge-Based Intelligent Information Engineering Systems and Allied Technologies, 2001, Osaka, Japan.
7. Fundamentals of fuzzy sets, ed. by *D. Dubois, H. Prade*. – 2000.
8. *Дюбуа Д., Прад А.*, Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике. – М.: – Радио и связь, 1990.
9. *L.A. Zadeh*, Fuzzy Sets, Inform. and Control, 8.– 1965.
10. *Тыщук Р.В.* Задачи о потоках в сети при нечетких исходных данных: Наукові праці Донецького національного технічного університету. Серія "Обчислювальна техніка та автоматизація", випуск 38. – Донецьк: ДонНТУ, 2002.
11. *Свами М., Тхуласираман К.*, Графы, сети и алгоритмы. – М.: Мир, 1984.
12. *R.Tyshchuk*, Risk Analysis in Fuzzy Flow Networks, 2nd Euro-International Symposium on Computational Intelligence, 2002, Kosice, Slovakia.

ТИЩУК Роман Всеволодович – Донецький національний технічний університет, кафедра АСУ, відділ інформаційних технологій, НВП «АМИ».

Наукові інтереси:

- нечітка логіка та теорія нечітких множин;
- мережеві транспортні системи;
- теорія мережевих потоків;
- комп'ютерні мережі, активні мережі;
- системи управління потоками робіт.

Подано 15.10.2002