УДК 681.3

Д.Д. Плечистий, аспір.
Житомирський інженерно-технологічний інститут

ЗАДАЧА КОМІВОЯЖЕРА: ЗАСТОСУВАННЯ, РОЗВ'ЯЗАННЯ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ

(Представлено д.т.н., проф. Панішевим А.В.)

Розглянуто задачу комівояжера, її застосування. Розглянуті деякі алгоритми її розв'язання. Наведені результати проведеного чисельного експерименту з дослідження методу локальних оптимальних послідовностей.

Постановка

Задача комівояжера (ЗК) є відомою науковою задачею, якою довгий час займаються науковці всього світу. Сформулюємо цю задачу.

Нехай $[d_{ij}]_m$ – квадратна матриця порядку m, в якій:

$$d_{ij} = \begin{cases} d_{ij}, \text{ якщо } i \neq j \\ \infty \text{ - інакше} \end{cases},$$

де $d_{ij} \in Z_0^+$ – множина цілих невід'ємних чисел.

За матрицею $[d_{ij}]_m$ побудуємо повний орієнтований мультиграф G з m вершинами, в якому кожна пара вершин $\{i,j\}, i \neq j$ з'єднана парою дуг (i,j) та (j,i) з вартостями d_{ij} та d_{ji}.

В мультиграфі G потрібно знайти контур, який проходить через кожну вершину рівно один раз, з найменшою сумою вартостей дуг, що входять до нього.

Припустимо, що роз'вязком задачі комівояжера, очевидно, є циклічна перестановка $\tau = (\tau[1],...,\tau[m])$ номерів стовпців матриці $[d_{ij}]_m$. Перестановка τ породжує в мультиграфі G замкнений маршрут $(\tau[1],...,\tau[m],\tau[1])$, в якому всі номери $\tau[1],...,\tau[m]$ із $\{1,2,...,m\}$ є різними. Вартість обходу τ в G визначимо так:

$$D(\tau) = \sum_{i=1}^{m} d_{i\tau[i]} .$$

Задача комівояжера полягає в знаходженні обходу $\tau^* = (\tau^*[1],...,\tau^*[m])$ мінімальної вартості

$$D(\tau^*) = \min_{\tau} D(\tau) . \tag{1}$$

Якщо в задачі значення матриці $[d_{ij}]_m$ обмежені умовою

$$d_{ij} = d_{ji}, i,j = \overline{1,m} , \tag{2}$$

то така задача повинна називатись симетричною, інакше – несиметричною. У випадку симетричної задачі матриці $[d_{ij}]_m$ відповідає повний неорієнтований граф з m вершинами, в якому ребро $\{i,j\},\ i \neq j,\ i,j = \overline{1,m}$ має вагу або вартість $d_{ij} = d_{ji}$. Зазначимо, що кількість всіх перестановок номерів стовпців π матриці порядку m дорівнює $m!$, кількість обходів τ для несиметричної задачі комівояжера дорівнює $(m-1)!$, для симетричної задачі таких обходів удвічі менше.

З представленням елементів d_{ij} як відстаней між парою крапок i та j будемо вимагати, щоб була виконана нерівність трикутника:

$$d_{ij} + d_{jk} \geq d_{ik} \tag{3}$$

для всіх i, j, k. В цьому випадку кажуть, що задача комівояжера обмежена на матриці, що задовольняє нерівності трикутника.

Історія виникнення та застосування

Виникла ця проблема у 40-х роках минулого століття завдяки потребі знаходження оптимальних маршрутів для автобусів, що збирали дітей в районах навчальних шкіл. Таким чином суто практичне завдання привернула увагу науковців, серед яких першим дослідником став Меріл Флад (Merill Flood).

Поступово виявилося, що ЗК має широкий спектр практичного застосування. Наведемо деякі класичні та сучасні приклади.

- Доставка обладнання. Необхідно скласти оптимальний маршрут для доставки обладнання.
- Збір монет. Необхідно скласти оптимальний маршрут для збору монет із телефонних автоматів. Проблема стара, але особливо цікава завдяки тому, що для її розв′язку необхідні модифікації, що враховують такі особливості транспортного руху в місті, як вулиці з одностороннім рухом та інші.
- Керування свердлильним станком. Необхідно керувати переміщенням свердла над об′єктом свердління, наприклад, друкованою платою.
- Розкрійні системи. Автоматизація масового виробництва одягу передбачає використання роботів. Наприклад розкрій деталей одягу на полотні тканини виконується машиною з чисельно-програмним керуванням. Тому логічно та вигідно з точки зору часу та зносу деталей машини оптимізувати маршрут руху різця.
- Оптимізація ланцюгів сканування. Деякі з виробників напівпровідників використовують евристичні алгоритми розв′язання ЗК в експериментах з оптимізації ланцюгів сканування в інтегральних схемах.
- Розробка мереж. Розробка оптоволоконних мереж глобального масштабу також пов′язана з ЗК. Розв′язання цієї проблеми в мережевому контексті передбачає створення оптимальної топологічної структури мережі – такої, яка б забезпечувала оптимальну маршрутизацію потоків даних при мінімальних витратах та максимальній надійності.

Розв′язання

Як можна побачити, проблема комівояжера має багато важливих практичних застосувань. Тому за невеликий проміжок часу науковцями з різних країн було розроблено багато алгоритмів її розв′язання.

ЗК є NP-складною у широкому розумінні – сьогодні не існує алгоритму, який знайшов би розв′язок задачі за поліноміальний час. Всі алгоритми розв′язання ЗК діляться на дві категорії:

1) точні. До цієї категорії входять алгоритм повного перебору та алгоритм гілок та меж. Ці алгоритми знаходять точний розв′язок задачі, але при збільшенні її розміру час розв′язання зростає експоненціально, і це, як можна буде побачити у результатах чисельного експерименту, робить неможливим точне розв′язання ЗК великих розмірів. Потрібно звернути увагу на те, що, коли на ЗК не накладається обмеження трикутника, то знаходження точного розв′язку задачі є настільки ж складним, як і розв′язання будь-якої іншої NP-складної задачі;

2) наближені. Такі алгоритми знаходять розв′язок ЗК з певною похибкою, тобто наближаються до оптимального рішення. Перевага таких алгоритмів у тому, що, як правило, час розв′язання задачі є поліноміально обмеженим. До цієї категорії входять алгоритм “Іди в найближчий”, алгоритми вставки, алгоритми локальної оптимізації, композиційні алгоритми (ті, що включають декілька базових алгоритмів). Найбільш точним з існуючих є алгоритм Крістофідеса, який розв′язує ЗК за час $O\left(m^4\right)$ і перевищує оптимум не більш, ніж у 1,5 рази.

У праці [3] було розроблено метод локальних оптимальних послідовностей (МЛОП), який використовувався для розв′язання задач комбінаторної оптимізації та теорії розкладів. В першій половині 2002 року цей метод було пристосовано для ЗК. В результаті з′явився алгоритм, який з поясненнями та прикладом наведено в [5].

Очевидною перевагою алгоритму є швидкість. Розв′язок ЗК МЛОП знаходить за час $O\left(m^2\right)$, тобто в m^2 разів швидше, ніж найкращий наближений алгоритм. Але досі неможливо порівняти даний алгоритм з існуючими за якістю розв′язку, оскільки формально не отримана похибка алгоритму. Тому зараз ведуться дослідження у таких напрямках:

1) пошук формальної оцінки точності алгоритму;

2) пошук такого набору обмежень, що накладаються на вхідні дані, для якого даний алгоритм обчислював би оптимальний розв′язок. Це можуть бути такі обмеження, як упорядкування вихідної матриці по рядках або стовпцях та інші;

3) пошук переборних схем з використанням МЛОП, які дозволяли б отримувати оптимальний розв′язок для ЗК, на яку накладено обмеження трикутника.

Обчислювальний експеримент

Паралельно з теоретичним пошуком було проведено обчислювальний експеримент, який досліджував МЛОП. Метою експерименту було дослідження похибки алгоритму в залежності від розміру задачі та типу вихідних даних.

Для проведення експерименту був розроблений програмний засіб ComiLOP, який дозволяє розв′язувати ЗК. Для розробки даної програми було використано середовище візуального програмування

Borland Delphi 3, яке було обрано автором за зручність та можливість швидкого створення інтерфейсної частини програмного засобу. На рис. 1 наведено вікно, де вводяться вихідні дані та обирається спосіб розв′язання ЗК .

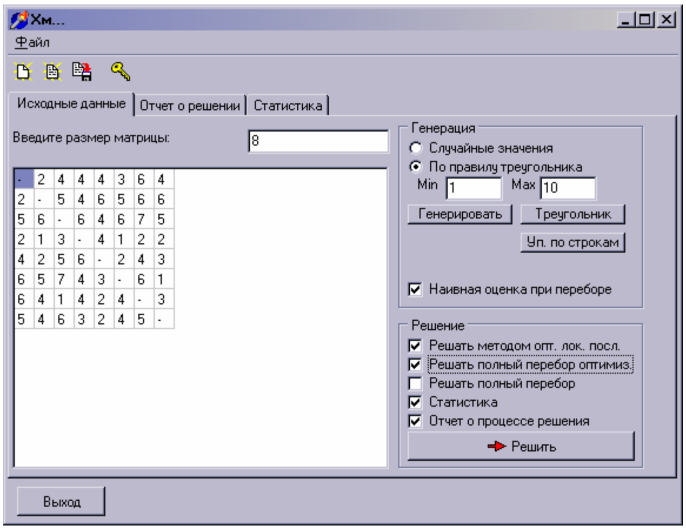

Рис. 1. Генерація даних та вибір методу розв′язання

Вихідні дані можна вводити самостійно або скористатися генератором випадкових чисел. Є можливість накладання на вихідну матрицю обмеження трикутника та впорядкування матриці по рядках. Доступні два методи розв′язання ЗК: МЛОП та метод повного перебору. Після того, як програму було завершено, метод повного перебору було дещо оптимізовано за рахунок того, що під час перебирання комбінацій обраховується та коригується верхня межа вартості обходу. Це дозволило суттєво зменшити час розв′язання ЗК . На рис. 2 наведено вікно, де виводиться інформація в ході розв'язку задачі, кінцевий результат і, звичайно, співвідноше-ння вартості обходу, отриманого МЛОП, до вартості оптимального обходу перебором.

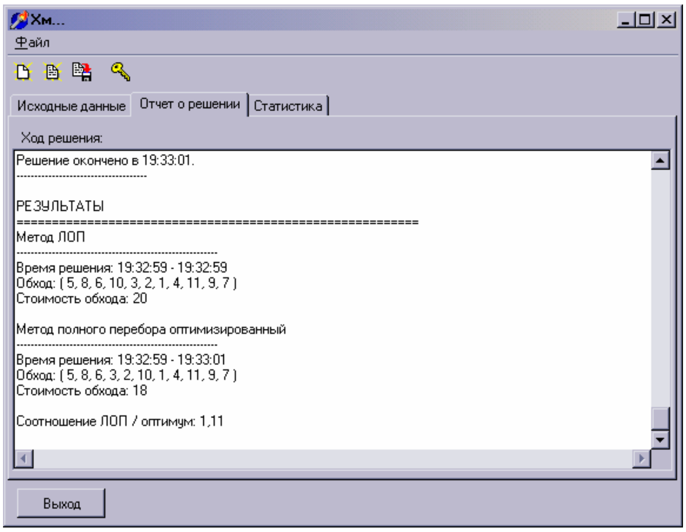

Рис. 2. Розв′язок ЗК

Обчислювальний експеримент проводився на комп′ютері такої конфігурації: Intel Pentium III-866 MHz, 256 MB RAM, 20GB HDD. Операційна система: Microsoft Windows 2000 Professional. В ході експерименту використовувалися три типи вихідних даних:

- випадкові дані;
- випадкові дані, на які накладено обмеження трикутника;
- випадкові дані, на які накладено обмеження трикутника, впорядковані по рядках.

Для першого та другого типів задачі приймали розмірність від 7 до 15. Для третього типу в зв′язку з різким зростанням часу розв′язання (табл. 1) задачі приймали розмірність від 7 до 13. Для кожної розмірності та кожного типу вихідних даних було розв′язано по 10 екземплярів ЗК.

У табл. 1 наведено час розв′язання задач для різних розмірностей та типів даних. В зв′язку з оптимізацією повного перебору шляхом обчислення та коригування верхньої межі час розв′язання задач для різних вихідних даних може відрізнятися. Тому для цього методу існує три параметри: $t_{\min}$, $t_{\max}$, $\bar{t}$ – відповідно мінімальний, максимальний та середній час, витрачений на отримання розв′язку для даної розмірності. Для МЛОП час розв′язання залежить лише від розмірності задачі і тому описується єдиним параметром: t_{LOP}. Дані наведено у форматі часи : хвилини : секунди.

Таблиця 1

Час розв′язання *ЗК методом повного перебору та ЛОП*

Розмірність задачі	Вихідні дані											
	Випадкові дані				Обмеження трикутника				Обмеження трикутника та упорядкування по рядках			
	t_{min}	t_{max}	$\bar{t}$	t_{LOP}	t_{min}	t_{max}	$\bar{t}$	t_{LOP}	t_{min}	t_{max}	$\bar{t}$	t_{LOP}
7	<1	<1	<1	<1	<1	<1	<1	<1	<1	<1	<1	<1
8	<1	<1	<1	<1	<1	<1	<1	<1	<1	1	<1	<1
9	<1	<1	<1	<1	<1	<1	<1	<1	1	1	1	<1
10	<1	1	<1	<1	<1	1	<1	<1	8	12	9,7	<1
11	<1	1	<1	<1	1	10	3,2	<1	1:35	2:01	1:50,1	<1
12	<1	4	1,15	<1	3	13	6,8	<1	19:00	28:58	21:44,8	<1
13	<1	3	2,55	<1	4	1:49	49,4	<1	4:24:37	4:51:41	4:33:35	<1
14	1	36	8,9	<1	1:11	8:50	3:27,4	<1	-	-	-	-
15	1	1:13	20,6	<1	9:50	1:09:22	27:14,1	<1	-	-	-	-

Таблиця 2

Співвідношення розв'язків ЛОП до оптимума (повного перебору)

Розмірність задачі	Вихідні дані								
	Випадкові дані			Обмеження трикутника			Обмеження трикутника та упорядкування по рядках		
	Q_{min}	Q_{max}	$\overline{Q}$	Q_{min}	Q_{max}	$\overline{Q}$	Q_{min}	Q_{max}	$\overline{Q}$
7	1,00	1.35	1,067	1,00	1,14	1,076	1,00	1,02	1,002
8	1,00	1,47	1,168	1,00	1,27	1,099	1,00	1,02	1,004
9	1,00	1,69	1,248	1,00	1,29	1,102	1,00	1,03	1,003
10	1,00	1,48	1,181	1,00	1,23	1,080	1,00	1,03	1,014
11	1,10	1,44	1,267	1,00	1,38	1,134	1,00	1,02	1,007
12	1,00	1,71	1,249	1,04	1,20	1,106	1,00	1,02	1,005
13	1,08	1,50	1,346	1,04	1,25	1,118	1,00	1,02	1,009
14	1,16	1,67	1,297	1,00	1,38	1,176	-	-	-
15	1,14	1,70	1,424	1,00	1,30	1,132	-	-	-

Як можна побачити, для третього типу даних час розв′язання зростає катастрофічно швидко. Тому для цього типу довелося обмежитися розмірністю 13. Потрібно також відмітити той факт, що час розв′язання ЗК методом ЛОП досягає однієї секунди лише на розмірності 65, а, наприклад, на розмірності 500 – 11 секунд.

У табл. 2 наведено співвідношення вартості обходу, отриманого МЛОП, до вартості оптимального обходу. Для кожного типу даних наведено три параметри: $Q_{\min}$, $Q_{\max}$, $\overline{Q}$ – відповідно мінімальне значення співвідношення, максимальне значення та середнє значення, яке і є головним показником. Графічно дані цієї таблиці наведені на рис. 3.

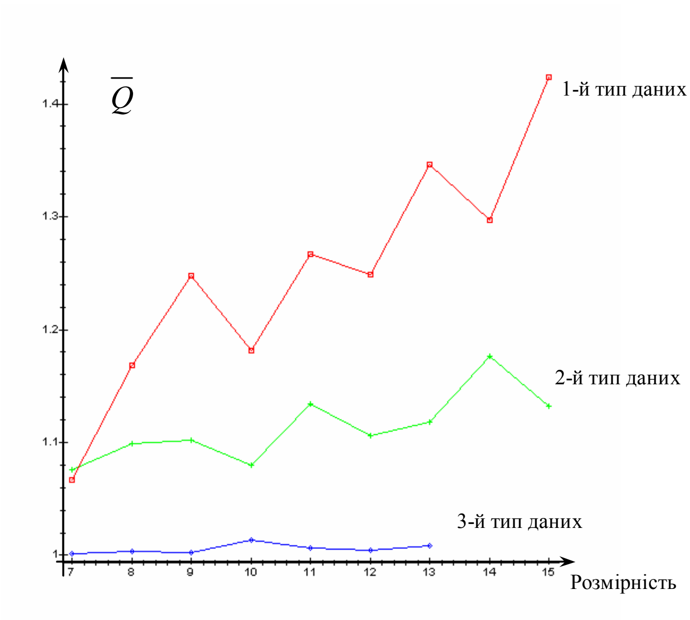

Рис. 3. Співвідношення розв'язків ЛОП до оптимума

Як можна побачити з графіка, для першого типу даних $\overline{Q}$ зростає із збільшенням розмірності задачі. Для другого типу даних також присутня певна тенденція до зростання. І для третього типу даних неможливо відмітити якусь закономірність.

Отже, експеримент показав, що МЛОП на малих розмірностях (до 15) для даних, на які накладено обмеження трикутника, та для даних, упорядкованих по рядках, дає кращі розв′язки, ніж будь-які інші наближені алгоритми. Постає питання, як веде себе співвідношення $\overline{Q}$ при більших розмірностях – воно необмежено зростає, чи наближається асимптотично до певного значення, чи взагалі є довільним в межах від 1 до певного значення? Це питання та інші, наведені раніше, потребують додаткових досліджень.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Пападимитроу Х., Стайглиц К.* Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. – М.: Мир, 1985. – 510 с.
2. *Артынов А.П., Ембулаева В.Н., Пупышев А.В., Скалецкий В.В.* Автоматизация управления транспортными системами. – М.: Наука, 1984. – 272 с.
3. *Панишев А.В., Подоляка О.А., Скакалина Е.В.* Эффективный алгоритм распараллеливания работ на неидентичных машинах // Авиационно-космическая техника и технология: Сборник научных трудов. – Харьков: Государственный аэрокос-мический университет «ХАИ». – Вып. 13. – 1999. – С. 136–146.
4. *Панишев А.В., Скрипина И.В., Скакалина Е.В.* Эффективное построение оптимальных решений в задаче о назначениях транспортного типа // Автомобильный транспорт: Сборник научных трудов. – Харьков: ХТАДТУ. – Вып. 4. – 2000. – С. 63–65.
5. *Панішев А.В., Плечистий Д.Д.* До питання побудови маршруту комівояжера // Вісник Житомирського інженерно-технологічного інституту. – 2002. – №20. – С. 120–124.

ПЛЕЧИСТИЙ Дмитро Дмитрович – магістр комп’ютерних наук, аспірант Житомирського інженерно-технологічного інституту.

Наукові інтереси:
– комп’ютерно-інформаційні технології;
– комбінаторна оптимізація.

Подано 14.10.2002

Д.Д. Плечистый. Задача коммивояжера: применение, решение и исследование.

Рассмотрена задача коммивояжера, ее применение. Рассмотрены некоторые алгоритмы, решающие ее. Приведены результаты проведенного вычислительного эксперимента по исследованию метода локальных оптимальных последовательностей.

D.D. Plechystyy. The traveling salesman problem: application, solution and research.

In the given article the traveling salesman problem and its applications are reviewed. Some algorithms solving it are reviewed. There are presented results of the computing experiment held as a part of research of the method of optimal local sequences.