

УДК 621.396.96

С.В. Водоп'ян, к.т.н., доц.
 Д.В. П'яковський, к.т.н., доц.
 В.В. Умінський, ад'юнкт

Житомирський військовий інститут радіоелектроніки ім. С.П. Корольова

МЕТОДИКА СИНТЕЗУ ТА РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ ОПТИМАЛЬНОГО НЕСТАЦІОНАРНОГО ФІЛЬТРА КАЛМАНА НА ОСНОВІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Запропоновано методика синтезу оптимального нестационарного фільтра Калмана із заданою точністю на основі диференціальних перетворень. Наведено приклад моделювання та результати досліджень.

Актуальність задачі

Розвиток сучасної космічної техніки, нарощування складності розв'язуваних задач призводить до зростання вимог щодо якості процесів управління, що, в свою чергу, веде до необхідності підвищення точності навігації та визначення траєкторних параметрів космічного апарата.

Однією з основних задач, яку при цьому доводиться розв'язувати, є задача оцінювання даних, отриманих в результаті спостережень в стохастичній обстановці.

Виконання вимог, що ставляться сучасним розвитком техніки з точності оцінювання, можливе на основі використання нестационарних оптимальних фільтрів, які формують оцінки стану в поточний момент часу [1]. До таких пристроїв належить нестационарний лінійний оптимальний фільтр Калмана.

При практичній реалізації нестационарних лінійних фільтрів Калмана не завжди можна отримати оптимальні точнісні характеристики фільтрації [2]. Деяке їх погіршення зумовлено використанням недостатньо точної апріорної інформації про початкові умови, статистичні характеристики шумів стану та вимірювання, структуру матриць, які характеризують динаміку об'єкта та процесу оцінювання. Тому слід проводити аналіз впливу апріорної невизначеності на точність та якість процесу фільтрації.

Ще одним фактором, який ускладнює досягнення високої точності фільтрації, є протиріччя між складністю алгоритму та обмеженими ресурсами обчислювальних засобів. Синтез нестационарних лінійних фільтрів здійснюється на основі математичних моделей, які описують динаміку системи, що досліджується. При цьому прагнення отримати більш точну та повну математичну модель системи призводить до істотних ускладнень алгоритмів фільтрації. Особливу складність спричиняє розв'язок в реальному часі нелінійного диференціального рівняння Ріккати відносно коваріаційної матриці похибок фільтрації. Дане рівняння дозволяє враховувати похибки фільтрації та визначати оптимальну матрицю вагових коефіцієнтів.

Одним із методів зменшення складності алгоритму є пошук асимптотичного розв'язку рівняння Ріккати в рамках стаціонарного фільтра. Хоча такий підхід значно спрощує алгоритм, однак оптимальність фільтра забезпечується лише в усталеному режимі.

У [3] була запропонована точна аналітична модель фільтра Калмана на основі диференціальних перетворень академіка Г.Є. Пухова, в якій не проводились спрощення. У даній роботі пропонується методика синтезу оптимального нестационарного фільтра Калмана на основі моделі, отриманої в [3].

Постановка задачі

Модель динамічної системи (ДС) у векторно-матричній формі має вигляд:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{q}(t), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (1)$$

де $\mathbf{q}(t)$ – вектор шумів стану;

$\mathbf{F}(t)$ – матриця стану;

$\mathbf{G}(t)$ – матриця управління.

Спостереження за станом ДС здійснюється у відповідності до рівняння:

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{H}(t)\mathbf{x}(t) + \mathcal{V}(t), t \geq 0, \quad (2)$$

де $\mathcal{V}(t)$ – вектор шумів вимірювання;

$\mathbf{H}(t)$ – матриця спостереження.

Алгоритм роботи оптимального лінійного фільтра Калмана–Б'юсі задається виразами:

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(t)x(t) + K(t)[z(t) - H(t)x(t)], x(t_0) = x_0, \quad (3)$$

$$K(t) = \eta(t)H^T(t)R^{-1}(t), \quad (4)$$

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = F(t)\eta(t) + \eta(t)F^T(t) - \eta(t)H^T(t)R^{-1}(t)H(t)\eta(t) + G(t)Q(t)G^T(t), \eta(t_0) = \eta_0, \quad (5)$$

де $K(t)$ – матричний коефіцієнт підсилення;
 $\eta(t)$ – коваріаційна матриця похибки фільтрації;
 $R(t)$ – матриця інтенсивності білого шуму $\mathcal{Z}(t)$;
 $Q(t)$ – матриця інтенсивності білого шуму $q(t)$.

Методика розрахунку

Проведемо розрахунок оптимального лінійного фільтра Калмана – Б'юсі для випадку, коли модель ДС описується диференціальним рівнянням першого порядку:

$$\dot{x}(t) = -Ax(t) + q(t), x(t_0) = x_0, \quad (6)$$

де $q(t)$ – стаціонарний гауссівський білий шум з нульовим математичним очікуванням та постійною інтенсивністю $Q = \sigma_q^2$;

$x(t)$ – центрований випадковий процес із заданою початковою коваріаційною матрицею:

$$\eta(t_0) = M\{x(t_0)x'(t_0)\} = \sigma_x^2,$$

а спостереження за станом ДС здійснюється у відповідності до рівняння:

$$z(t) = x(t) + \mathcal{Z}(t), t \geq 0, \quad (7)$$

де $\mathcal{Z}(t)$ – стаціонарний гауссівський білий шум з нульовим математичним очікуванням та постійною інтенсивністю $R = \sigma_z^2$.

Крім того, відомо, що випадкові процеси $q(t)$ та $\mathcal{Z}(t)$ некорельовані, тобто

$$M\{q(t)\mathcal{Z}'(\tau)\} = 0.$$

1. Визначимо матриці, які характеризують динаміку процесу та об'єкта оцінювання:

$$F = \|-A\|; G = \|1\|; H = \|1\|; Q = \|\sigma_q^2\|; R = \|\sigma_z^2\|; \eta(t_0) = \|\sigma_x^2\|. \quad (8)$$

2. Перетворимо алгоритм фільтрації (3) – (5) у відповідності до (8).

Диференціальне рівняння (3) оптимального фільтра з урахуванням (8) можна записати у вигляді:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -Ax(t) + K(t)[z(t) - x(t)], x(t_0) = 0.$$

Відповідно до рівняння (4) визначимо оптимальний коефіцієнт підсилення фільтра:

$$K(t) = \frac{\eta(t)}{R}.$$

Коваріаційна матриця похибки фільтрації $\eta(t)$ задовольняє диференціальному нелінійному рівнянню типу Ріккати (5). З урахуванням (8) вираз (5) можна записати у вигляді:

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = -2A\eta(t) - \frac{\eta^2(t)}{\sigma_z^2} + \sigma_q^2, \eta(t_0) = \sigma_x^2. \quad (9)$$

3. Знайдемо диференціальний спектр функції $\eta(t)$.

Враховуючи правила диференціальних перетворень академіка Г.Є. Пухова [4], нелінійне диференціальне рівняння (9) може бути перетворене до вигляду:

$$\eta(k+1) = \frac{H}{k+1} \left[\sigma_q^2 \mathfrak{z}(k) - 2A\eta(k) - \frac{1}{\sigma_z^2} \sum_{l=0}^{l=k} \eta(k-l)\eta(l) \right], \eta(0) = \sigma_x^2, \quad (10)$$

де $\eta(k)$ – дискретний диференціальний спектр функції $\eta(t)$;

$$\mathfrak{z}(k) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } k = 0 \\ 0, & \text{якщо } k \geq 1 \end{cases} \text{ – тейлорівська одиниця або теда;}$$

H – параметр диференціального перетворення;

$k = 0, 1, 2, 3, \dots$ – номер дискрети.

Розв'язок нелінійного рівняння Ріккати шукатимемо у вигляді дробово-раціональної функції (апроксимація Паде) [5]. Для цього необхідно знайти перші s дискрет диференціального спектра за рівнянням Ріккати:

$$\begin{aligned} \eta(0) &= \sigma_x^2, \\ \eta(1) &= \frac{H}{\sigma_g^2} [\sigma_q^2 \sigma_g^2 - 2A\sigma_x^2 \sigma_g^2 - \sigma_x^4], \\ \eta(2) &= -\frac{H^2}{\sigma_g^4} [\sigma_q^2 \sigma_g^2 - 2A\sigma_x^2 \sigma_g^2 - \sigma_x^4] [A\sigma_g^2 + \sigma_x^2], \\ \eta(3) &= \frac{H^3}{3\sigma_g^6} [\sigma_q^2 \sigma_g^2 - 2A\sigma_x^2 \sigma_g^2 - \sigma_x^4] [2A^2 \sigma_g^4 + 6A\sigma_x^2 \sigma_g^2 + 3\sigma_x^4 - \sigma_q^2 \sigma_g^2], \\ \eta(4) &= -\frac{H^4}{3\sigma_g^8} [\sigma_q^2 \sigma_g^2 - 2A\sigma_x^2 \sigma_g^2 - \sigma_x^4] [A^3 \sigma_g^6 + 7A^2 \sigma_x^2 \sigma_g^4 + 9A\sigma_x^4 \sigma_g^2 - 2A\sigma_q^2 \sigma_g^4 + \\ &\quad + 3\sigma_x^6 - 2\sigma_q^2 \sigma_x^2 \sigma_g^2], \\ \dots \\ \eta(s) &= -\frac{H}{s} \left[2A\eta(s-1) + \frac{1}{\sigma_g^2} \sum_{l=0}^{s-1} \eta(s-1-l)\eta(l) \right]. \end{aligned}$$

4. Визначимо апроксимуючу функцію. Апроксимуюча функція $\eta(t)$ має вигляд:

$$\eta(t) = \frac{M(t)}{N(t)} = \frac{m_0 + m_1\tau + m_2\tau^2 + \dots + m_i\tau^i}{1 + n_1\tau + n_2\tau^2 + \dots + n_j\tau^j}, \tag{11}$$

де $\tau = \frac{t}{H}$ – відносний аргумент;

$m_0, m_1, m_2, \dots, m_i, n_1, n_2, \dots, n_j$ – невідомі коефіцієнти.

Порядок поліномів $M(t)$ та $N(t)$ обирається в залежності від необхідної точності апроксимації. Для більш високої точності апроксимації необхідний вищий порядок поліномів $M(t)$ та $N(t)$, що, в свою чергу, призводить до збільшення обчислювальної складності алгоритму фільтрації.

Оберемо поліноми $M(t)$ та $N(t)$ другого порядку. Тоді апроксимуюча функція (11) запишеться у вигляді:

$$\eta(t) = \frac{m_0 + m_1\tau + m_2\tau^2}{1 + n_1\tau + n_2\tau^2}. \tag{12}$$

Коефіцієнти n_1 та n_2 легко визначити із наступної лінійної системи алгебраїчних рівнянь [4]:

$$\begin{vmatrix} \eta(2) & \eta(1) \\ \eta(3) & \eta(2) \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} n_1 \\ n_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \eta(3) \\ \eta(4) \end{vmatrix}, \tag{13}$$

а знаючи їх, знаходяться коефіцієнти m_0, m_1 та m_2 за виразом:

$$\begin{vmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n_1 & 1 & 0 \\ n_2 & n_1 & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} \eta(0) \\ \eta(1) \\ \eta(2) \end{vmatrix}. \tag{14}$$

З виразів (13) та (14) отримані наступні значення коефіцієнтів поліномів $M(t)$ та $N(t)$:

$$\begin{aligned} n_1 &= H \left(A + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_g^2} \right), \quad n_2 = \frac{H^2}{3\sigma_g^2} (A^2 \sigma_g^2 + \sigma_q^2), \\ m_0 &= \sigma_x^2, \quad m_1 = H(\sigma_q^2 - A\sigma_x^2), \quad m_2 = \frac{H^2 \sigma_x^2}{3\sigma_g^2} (A^2 \sigma_g^2 + \sigma_q^2) \end{aligned}$$

Тепер можна представити апроксимуючу функцію $\eta(t)$ таким виразом:

$$\eta(t) = \frac{3\sigma_x^2 \sigma_g^2 + (3\sigma_q^2 \sigma_g^2 - 3A\sigma_x^2 \sigma_g^2)t + (A^2 \sigma_x^2 \sigma_g^2 + \sigma_x^2 \sigma_q^2)t^2}{3\sigma_g^2 + (3A\sigma_g^2 + 3\sigma_x^2)t + (A^2 \sigma_g^2 + \sigma_q^2)t^2}, \tag{15}$$

а матричний коефіцієнт підсилення визначатиметься за виразом:

$$K(t) = \frac{\eta(t)}{\sigma_g^2} \tag{16}$$

Недоліком отриманого розв'язання (15) нелінійного диференціального рівняння Ріккати (5) є погіршення точності із збільшенням інтервалу визначення функції $\eta(t)$. Для забезпечення необхідної точності на будь-якому інтервалі визначення коваріаційної матриці похибки фільтрації слід розбити його на підінтервали, на кожному з яких шукати локальний розв'язок. Для цього потрібно при визначенні дискрет диференціального спектра на кожному з інтервалів розбиття нульовій дискреті $\eta(0)$ присвоювати значення функції в кінцевій точці попереднього інтервалу $\eta(H)$, тобто

$$\eta_n(0) = \eta_{n-1}(H),$$

де n – номер інтервалу розбиття;

H – довжина інтервалу розбиття (обирається в межах радіуса збіжності апроксимуючої функції $\eta(t)$).

Дослідження отриманого фільтра на ЕОМ

Моделювання отриманого фільтра відбувалося в середовищі Matlab за допомогою пакета Simulink.

Вхідний сигнал змінюється у відповідності до виразів (1)–(2), в яких $A = 7$, $\sigma_q^2 = 3$, $\sigma_g^2 = 5$, $\sigma_x^2 = 5$, 4. Крок дискретизації становив 0.001 с. Результати дослідження подані на рис. 1–5.

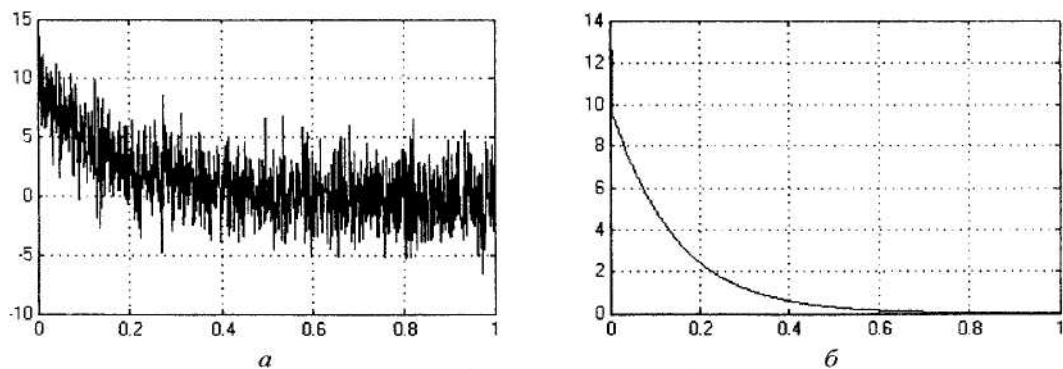


Рис. 1. Сигнал на вході а) та на виході б) фільтра при $A > 0$

На рис. 1 і 3 подано вхідні (рис. 1, а та 3, а) та вихідні (рис. 1, б та 3, б) сигнали фільтра для випадків, коли $A > 0$ та $A < 0$ відповідно. На рис. 2 і 4 подано залежності сигналу похибки від модельного часу при заданих параметрах стохастичного вхідного впливу (рис. 2, а та 4, а) та у разі, коли параметри стохастичного вхідного впливу, а саме дисперсія похибок вимірювання, відрізняються від заданих на 100 % (рис. 2, б та 4, б).

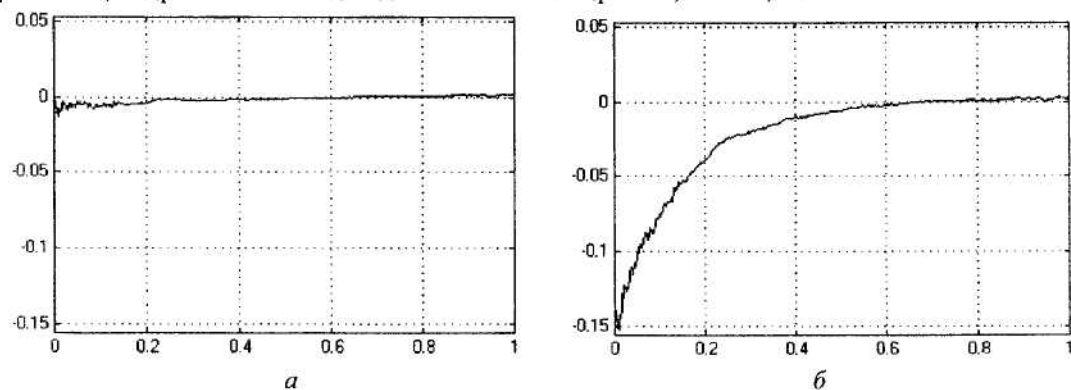


Рис. 2. Сигнал розгудження між оцінкою та корисним вхідним впливом при: а) $\sigma_g^2 = 5$; б) $\sigma_g^2 = 20$

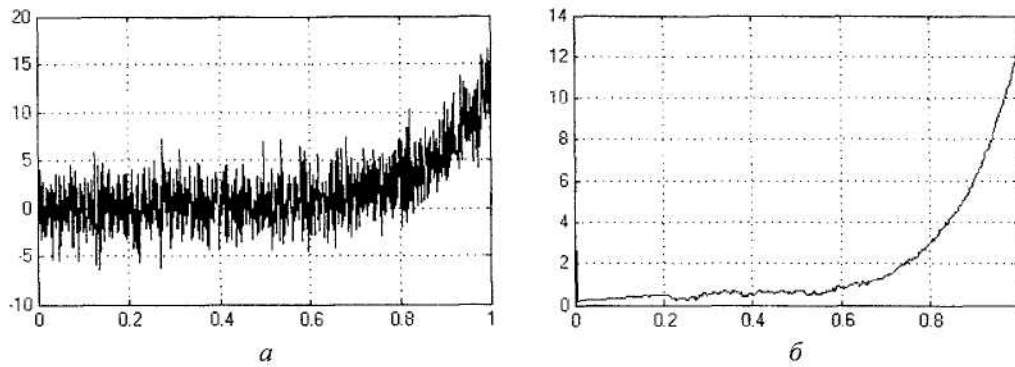


Рис. 3. Сигнал на вході а) та на виході б) фільтра при $A < 0$

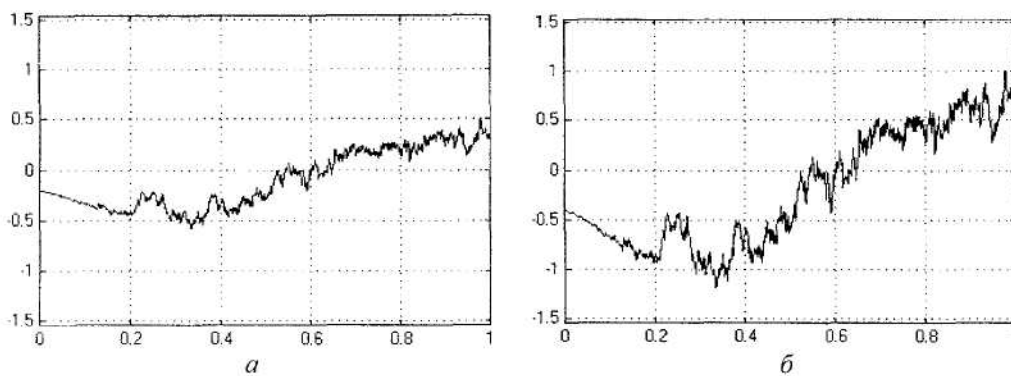


Рис. 4. Сигнал розумодження між оцінкою та корисним входним впливом при: а) $\sigma_y^2 = 5$; б) $\sigma_y^2 = 20$

На рис. 5 наведено графіки зміни матричного коефіцієнта підсилення $K(t)$ розробленого оптимального нестационарного фільтра при а) $A > 0$ та б) $A < 0$.

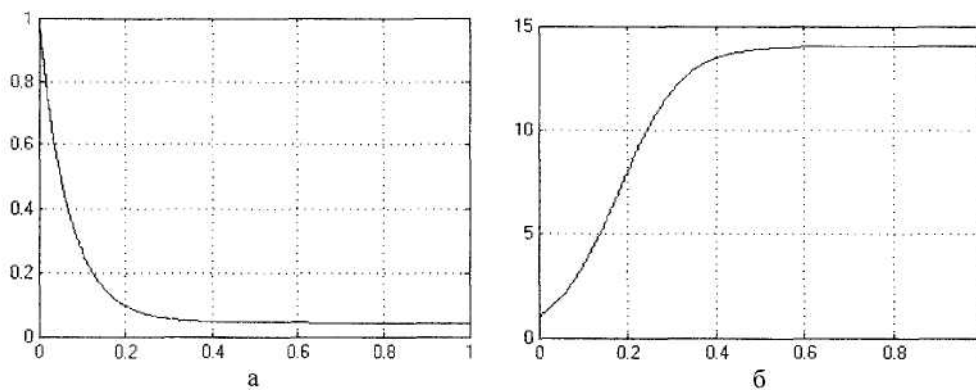


Рис. 5. Закон зміни матричного коефіцієнта підсилення $K(t)$ при:
а) $A > 0$; б) $A < 0$

З наведених залежностей видно, що із зміною параметрів стохастичного входного впливу якість фільтрації погіршується. Закон зміни дисперсії вихідного сигналу при зміні дисперсії сигналу на вході фільтра поданий на рис. 6.

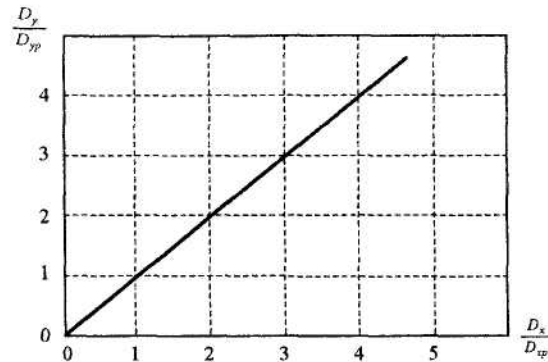


Рис. 6. Залежність зміни дисперсії шуму на виході при зміні дисперсії шуму на вході

Аналіз результатів

Запропонована методика дозволяє синтезувати оптимальний нестационарний фільтр Калмана із заданою точністю. Як видно з результатів дослідження, отриманий фільтр ефективно працює як при заданих параметрах випадкового вхідного впливу, так і в тих випадках, коли параметри стохастичного впливу істотно відрізняються від заданих.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Александров В.В., Локшин Б.Я. Математика и управление системами. – М.: Знание, 1976. – 64 с.
2. Венгеров А.А., Щаренский В.А. Прикладные вопросы оптимальной линейной фильтрации. – М.: Энергоиздат, 1982. – 192 с.
3. П'яковський Д.В., Водоп'ян С.В., Умінський В.В. Моделювання фільтра Калмана на основі диференціальних перетворень // Вісник ЖІТІ. – 2001. – № 18. – С. 86–89.
4. Пухов Г.Е. Дифференциальные спектры и модели. – К.: Наук. думка, 1990. – 184 с.
5. Пяковський Д.В., Водоп'ян С.В. Полиномиальное представление дифференциальных спектров // Электронное моделирование, 2001. – № 5. – С. 3–10.

ВОДОП'ЯН Сергій Васильович – кандидат технічних наук, начальник відділу наукового центру Житомирського військового орденів Жовтневої революції і Червоного Прапора інституту радіоелектроніки ім. С.П. Корольова.

Наукові інтереси:

- алгоритми автоматичних систем управління та оцінювання.

П'ЯКОВСЬКИЙ Дмитро Володимирович – заслужений працівник народної освіти України, кандидат технічних наук, доцент, начальник Житомирського військового орденів Жовтневої революції і Червоного Прапора інституту радіоелектроніки ім. С.П. Корольова.

Наукові інтереси:

- методи та алгоритми підвищення ефективності систем дистанційного моніторингу;
- автоматичні системи управління та оцінювання.

УМІНСЬКИЙ Володимир Вікторович – ад'юнкт Житомирського військового орденів Жовтневої революції і Червоного Прапора інституту радіоелектроніки ім. С.П. Корольова.

Наукові інтереси:

- алгоритми автоматичних систем управління та оцінювання.