УДК 621.396.96

**О.Є. Ніколаєнко, к.т.н.**
*Національний науково-дослідний центр оборонних технологій і військової безпеки України*
**І.М. Сащук, к.т.н.**
*Житомирський військовий інститут радіоелектроніки ім. С.П. Корольова*

# РОЗДІЛЬНА ЗДАТНІСТЬ АЛГОРИТМУ КЕЙПОНА В УМОВАХ ОБМЕЖЕНОЇ ЧАСОВОЇ ВИБІРКИ СИГНАЛІВ

*Наведено статистичний аналіз роздільної здатності алгоритму Кейпона в реальних умовах обмеженої кількості часових відліків, що використовуються для формування просторової кореляційної матриці сигналів.*

Застосування сучасних алгоритмів цифрового спектрального аналізу (ЦСА) [1] для обробки даних в радіотехнічних системах (РТС) значно розширює можливості останніх. Зокрема, використовуючи алгоритми ЦСА в РТС з антенними решітками (АР), досягають можливості роздільного оцінювання кутових координат двох джерел радіовипромінювання (ДРВ), які не розділяються за критерієм Релея [2, 3]. Для дослідження потенційних можливостей алгоритмів ЦСА щодо розділення ДРВ застосовується детерміністичний підхід, за якого кореляційна матриця $\mathbf{\Phi}$ сигналів на виходах приймальних елементів АР вважається точно відомою [2, 4, 5]. За цих (гіпотетичних) умов в [4] отримано аналітичний вираз, який характеризує потенційну роздільну здатність алгоритму Кейпона

$$H(\theta) = \left(\vec{V}^H(\theta)\mathbf{\Phi}^{-1}\vec{V}(\theta)\right)^{-1} \tag{1}$$

при пеленгації двох рівнопотужних ДРВ.

В (1) $\vec{V}(\theta)$ – $N$-мірний пошуковий вектор, $n$-тий елемент якого для РТС з еквідистантною АР визначається як $v_n = exp\left(j\frac{2\pi d}{\lambda}sin\,\theta\right)$; $\theta$ – контрольований кутовий напрямок, що відліковується від нормалі до розкриву АР; $\lambda$ – довжина хвилі; $d$ – крок АР; $N$ – кількість приймальних елементів АР; $(\cdot)^H$ – знак спряження за Ермітом; $H(\theta)$ – функція, що характеризує зміну потужності сигналу на виході пристрою обробки в залежності від контрольованого напряму $\theta$.

В реальних умовах функціонування РТС як матриці $\mathbf{\Phi}$ використовується її оцінка $\hat{\mathbf{\Phi}}$. Оціночна кореляційна матриця $\hat{\mathbf{\Phi}}$ визначається як

$$\hat{\mathbf{\Phi}} = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{k}\vec{X}_k\vec{X}_k^H\,, \tag{2}$$

де $\vec{X}$ – $n$-мірний вектор сигналів на виході приймальних елементів АР; $k$ – номер дискретного відліку з часової вибірки сигналу, $k = \overline{1,K}$; $k$ – об'єм часової вибірки.

Оскільки матриця $\hat{\mathbf{\Phi}}$ випадкова, то для оцінки роздільної здатності алгоритмів ЦСА в умовах обмеженої часової вибірки сигналів застосовують статистичний підхід [6]. Тоді як міру, що характеризує роздільну здатність алгоритму Кейпона, слід взяти ймовірнісну, зокрема, ймовірність розрізнення двох, близько розміщених у просторі ДРВ [7]. Для розрахунку цієї ймовірності необхідно знати статистичні характеристики функції $\hat{H}(\theta) = \left(\vec{V}^H(\theta)\hat{\mathbf{\Phi}}^{-1}\vec{V}(\theta)\right)^{-1}$ або функції, що монотонно зв'язана з нею. За останню виберемо функцію

$$y = t\cdot\hat{H}(\theta) = \frac{\vec{V}^H(\theta)\mathbf{\Phi}^{-1}\vec{V}(\theta)}{\vec{V}^H(\theta)\hat{\mathbf{\Phi}}^{-1}\vec{V}(\theta)}, \tag{3}$$

де $\mathbf{\Phi} = \lim\limits_{K\to\infty}\hat{\mathbf{\Phi}}$.

Для випадкової матриці $\mathbf{S} = \sum_{k=1}^{K}\vec{X}_k\vec{X}_k^H$ можна показати [8], що відношення

$$x = \frac{\vec{V}^H(\theta)\mathbf{\Phi}^{-1}\vec{V}(\theta)}{\vec{V}^H(\theta)\mathbf{S}^{-1}\vec{V}(\theta)} \tag{4}$$

має $\chi^2$ – розподіл з $n = (K - N + 1)$ ступенями свободи:

$$p(x) = \frac{x^{(n/2)-1}}{2^{n/2} \cdot \Gamma(n/2)} e^{-\frac{x}{2}}, \tag{5}$$

де $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{z-1} dt$ – гама-функція.

Оскільки $\mathbf{S} = K \cdot \hat{\mathbf{\Phi}}$, то між (3) та (4) існує однозначний взаємозв'язок $x = K \cdot y$, і тоді має місце рівність [9]:

$$p(y) = p(x) \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right|, \tag{6}$$

де $p(y)$, $p(x)$ – щільності ймовірності випадкових величин $y$ та $x$ відповідно.

Підставляючи (5) в (6), отримаємо шукану щільність розподілу відношення (3):

$$p(y) = \frac{y^{(n/2)-1} \cdot K^{n/2}}{2^{n/2} \cdot \Gamma(n/2)} e^{-\frac{K \cdot y}{2}}. \tag{7}$$

Тоді ймовірність попадання значення $\frac{H(\theta) - \hat{H}(\theta)}{H(\theta)} = 1 - y$, яке характеризує відносне відхилення $\hat{H}(\theta)$ (при $K \neq \infty$) від $H(\theta)$ (при $K = \infty$), в інтервал $\pm\Delta$, визначається співвідношенням:

$$P_{інт} = [(1 - \Delta) \leq y \leq (1 + \Delta)] = \int_{1-\Delta}^{1+\Delta} p(y) dy. \tag{8}$$

Після підстановки у (8) співвідношення (7) отримаємо

$$P_{інт} = \frac{K^{n/2}}{\Gamma(n/2) \cdot 2^{n/2}} \int_{1-\Delta}^{1+\Delta} y^{(n/2)-1} \cdot e^{-\frac{ny}{2}} dy. \tag{9}$$

Інтеграл в останньому виразі є табличним виду [10]

$$C\int_0^u x^{\nu-1} e^{-\mu x} dx = C \cdot \mu^{-\nu} \gamma(\nu, \mu \cdot u), \tag{10}$$

де $\gamma(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t} \cdot t^{\alpha-1} dt$ – неповна гама-функція.

Перетворення виразу (9) з врахуванням (10) дозволяє отримати явний вираз для $P_{інт}$:

$$P_{інт} = \frac{\gamma(n/2, K/2 \cdot (1 + \Delta))}{\Gamma(n/2)} - \frac{\gamma(n/2, K/2 \cdot (1 - \Delta))}{\Gamma(n/2)}. \tag{11}$$

Ймовірність невиходу значення відносного параметра $1 - y$ за межі інтервалу $\pm\Delta$ з врахуванням (11) дорівнює $P = 1 - P_{інт}$.

Результати розрахунку $P_{інт}$ за формулою (11) для різних значень інтервалів $\pm\Delta$ представлені на рис. 1. Видно, що ймовірність попадання відносного відхилення значень функції $\hat{H}(\theta)$ від $H(\theta)$ зростає при збільшенні об'єму часової вибірки $K$, що використовується для формування оціночної кореляційної матриці $\hat{\mathbf{\Phi}}$. Отримані результати дозволяють зробити висновок про практично повну відповідність матриць $\hat{\mathbf{\Phi}}$ та $\mathbf{\Phi}$ при $K \geq 200$.

Ймовірності $P_{інт}$, розраховані за виразом (11), можна використовувати для аналізу роздільної здатності алгоритму Кейпона в умовах обмеженого значення $K$. У цьому випадку величина $2\Delta$ характеризує відносне перевищення $\delta = \frac{q - q_{гр}}{q}$ інтегрального відношення сигналшум $q$ на виході пристрою обробки над тим граничним значенням $q_{гр}$, яке необхідне для розрізнення двох ДРВ рівної потужності в умовах точно відомої матриці $\mathbf{\Phi}$. На рис. 2 представлені графіки, що характеризують ймовірності розрізнення двох ДРВ.

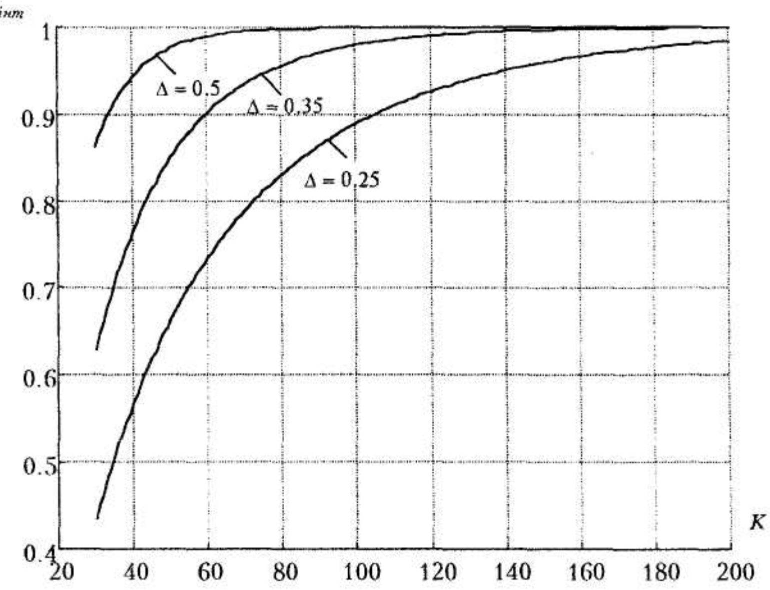


*Рис. 1. Графіки ймовірності попадання відношення* $y$ *в інтервал* $\pm\Delta$

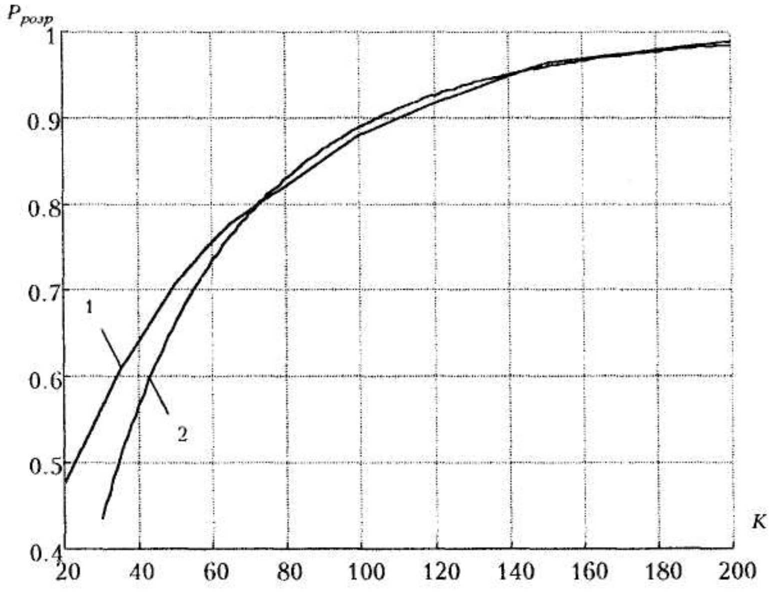


*Рис. 2. Ймовірність розрізнення двох ДРВ при застосуванні в РТС алгоритму Кейпона*

Крива 1 отримана шляхом незалежних статистичних випробувань при $q = 200$ і відносній (по відношенню до ширини діаграми направленості АР) кутовій відстані між ДРВ $\Delta\theta = 0.4$. Крива 2 відповідає розрахункам за формулою (11) при $\Delta = 0.25$. В [4] показано, що при $\Delta\theta = 0.4$ граничне значення $q_{гр}$, при якому розділяються два ДРВ рівної потужності, складає 100. Отже, за таких умов відносне перевищення $\delta = 0.5$. Рис. 2 ілюструє досить великий ступінь схожості отриманих аналітично і методом імітаційного моделювання кривих. Деяка розбіжність пояснюється кінцевою кількістю незалежних статистичних випробувань при побудові кривої 1.

Отже, отриманий аналітичний вираз (11) в поєднанні з результатами, наведеними в [4], дозволяє оцінити роздільну здатність алгоритму Кейпона в умовах обмеженого об'єму часової вибірки.

**ЛІТЕРАТУРА:**

1. *Марпл-мл С. Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения: Пер. с англ. / Под ред. И. С. Рыжака. – М.: Мир, 1990. – 584 с.
2. *Караваев В.В., Сазонов В.В.* Статистическая теория пассивной локации. – М.: Радио и связь, 1987. – 240 с.
3. *Джонсон Д.Х.* Применение методов спектрального оценивания к задачам определения угловых координат источников излучения // ТИИЭР. – 1982. – Т.70, № 9. – С. 126–139.
4. *Бондаренко Б.Ф., Ніколаєнко О.Є., Сащук І.М.* Методика оцінки граничної роздільної здатності алгоритмів надрозрізнення джерел радіовипромінювання // Проблеми створення, випробування, застосування та експлуатації складних інформаційних систем космічного і наземного застосування: Збірник наукових праць ЖВІРЕ. – Випуск № 2. – Житомир: ЖВІРЕ, 2000. – С. 7–11.
5. *Бондаренко Б.Ф., Ніколаєнко О.Є., Сащук І.М.* Гранична роздільна здатність алгоритму лінійного провіщення // Вісник ЖІТІ. – № 4. – Житомир: ЖІТІ, 1997. – С. 85–89.
6. *Леховицкий Д.И., Флексер П.М., Атаманский Д.В., Кириллов И.Г.* Статистический анализ сверхразрешающих методов пеленгации источников шумовых излучений в АР при конечном объеме обучающей выборки // Антенны. – 2000. – № 2 (45). – С. 23–39.
7. *Бондаренко Б.Ф., Платонов С.Ю., Сащук И.Н.* Разрешающая способность алгоритма MUSIC // Изв. вузов. Сер. Радиоэлектроника, 2001. – Т. 44, № 1. – С. 51–60.
8. *Рао С.Р.* Линейные статистические методы и их применения: Пер. с англ. – М.: Наука, 1968. – 548 с.
9. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. – М.: Радио и связь, 1989. – 656 с.
10. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.

НІКОЛАЄНКО Олександр Євгенович – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник Національного науково-дослідного центру оборонних технологій і військової безпеки України.

Наукові інтереси:
- цифрова обробка сигналів у складних інформаційних системах.

САЩУК Ігор Миколайович – кандидат технічних наук, старший викладач Житомирського військового інституту радіоелектроніки ім. С.П. Корольова.

Наукові інтереси:
- цифрова обробка сигналів у складних інформаційних системах.

Подано 23.09.2002