УДК 519.81:621.372

А.А. Засядько, к.т.н., доц.
Черкаський державний технологічний університет

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ВІДНОВЛЕННЯ СИГНАЛІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ОДНОКРИТЕРІАЛЬНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Введено критерії якості розв'язку задачі відновлення сигналів, вираженої інтегральним рівнянням Фредгольма першого роду, на основі яких будується задача нелінійного програмування. Порівняння різноманітних методів розв'язку за чисельною стійкістю і точністю показало придатність використання однокритеріальної оптимізації для розв'язку поставленої задачі.

Методи оптимізації як багатокритеріальні, так і однокритеріальні, зокрема, задача нелінійного програмування (ЗНП), дозволяють ефективно розв'язувати задачі достатньо широкого класу [1–5]. Використовуємо традиційні підходи, запропоновані в [2, 4, 5] для розв'язку некоректної задачі, якою є задача відновлення сигналів.

Задача відновлення сигналів може бути подана інтегральним рівнянням Фредгольма першого роду [3]:

$$\int_a^b Q(x,s)\cdot y(s)ds = f(x),\ x\in[c,d],\ s\in[a,b]\,. \tag{1}$$

Розв'язати задачу відновлення сигналу для рівняння (1) – знайти вигляд сигналу $y(s)$, спотвореного вимірювальною апаратурою з апаратною функцією $Q(x,s)$ у сигнал $f(x)$. Існуючі методи розв'язку задачі відновлення [3, 5] використовують, як правило, регуляризацію, дуже чутливі до похибок результатів вимірів і не є універсальними, тому показують прийнятні результати відновлення для задач визначеного виду при точних початкових умовах і при добре обумовлених системах рівнянь, до яких зводиться рівняння (1).

Використаємо поняття частинних критеріїв у змісті критеріїв якості, що властиві для багатокритеріальної оптимізації, щоб визначити умови для одержуваного розв'язку.

Якість розв'язку рівняння (1) оцінимо сукупністю частинних критеріїв, заданих функціоналами

$$I_j = \Phi_j[x, a, b, c, d, y], \tag{2}$$

де $j = 1, 2, 3, \dots, r$; функції Φ_j мають безупинні частинні похідні по y і f. Частинні критерії (2) є компонентами r-мірного векторного критерію $I = (I_1, I_2, \dots, I_r)$.

Нехай векторний критерій обмежений допустимою областю $I\in\Omega(I)$. Кожна компонента векторного критерію I описується функціоналом (2), визначеним на розв'язках $y\in Y$ інтегрального рівняння (1). Багатокритеріальна задача розв'язку рівняння (1) полягає у визначенні екстремалей $\{y^*(s)\}$, $y^*\in Y$, $I^*\in (I)$, що при заданих умовах, обумовлених мірою апріорної інформації про розв'язок $y(s)$, оптимізують векторний функціонал I.

Нехай задана множина можливих розв'язків Y, що складається з векторів $y = \{y_i\}_{i=1}^n$ n-мірного евклідового простору. Якість розв'язку оцінюється за сукупністю суперечливих частинних критеріїв, що утворюють S-мірний вектор $I(y) = \{I_k(y)\}_{k=1}^S \subset F$, що визначений на множині Y і який належить класу F припустимих векторів ефективності. Вектор частинних критеріїв обмежений допустимою областю: $I\in M$.

Необхідно визначити такий розв'язок $y^*\in Y$, що при заданих умовах і обмеженнях оптимізує розв'язок $y(s)$ рівняння (1).

Пронормуємо вектор ефективності $I(y)$ вектором обмежень A и одержимо вектор відносних частинних критеріїв (нормалізований вектор ефективності):

$$I_0(x) = \{I_k(y)/A_k\}_{k=1}^S = \{I_{0k}(y)\}_{k=1}^S. \tag{3}$$

Припустимо, що всі частинні критерії $I_k(y)$ потребують мінімізації і що вони всі невід'ємні й обмежені (найбільш поширений випадок):

$$M = \{I \mid 0 \le I_k(y) \le A_k,\ k\in[1,s]\}\,. \tag{4}$$

У залежності від наявності і вигляду апріорної інформації підходи до розв'язку багатокритеріальних задач можуть бути різноманітними. При відсутності такої інформації обмежуються знаходженням будь-якого вектора розв'язку y^*, що забезпечує тільки виконання умови (4) за обмеженнями [2, 4]:

$$I^*\in M_0 = \{I \mid 0 \le I_k(y^*) \le A_k,\ k\in[1,s]\},\ y^*\in Y = Y^k \cup Y^C,$$

де $y^*\in Y^k \cup Y^C$ – розв'язок належить двом областям, що не перетинаються: області поступок (області Парето) Y^k і областям згоди Y^C [2, 4].

При такому способі знаходження оптимального розв'язку він, як правило, виявляється грубим і не парето-оптимальним. На практиці часто використовують прийом, коли для оптимізації з сукупності I_k, $k\in[1,s]$, вибирається як критерій тільки один (наприклад перший), а інші критерії переводяться в розряд обмежень, тобто вихідна багатокритеріальна задача штучно замінюється однокритеріальною з обмеженнями:

$$y^* = \arg\min_{y\in Y} I_1(y), 0 \le I_k(y) \le A_k, k\in[1,s]. \tag{5}$$

Розв'язок y^* за такою схемою буде неоптимальним, тобто таким, що лежить поза областю Парето (далі – множина P). Хоча використання даного методу виправдано для оптимізації дуже складних систем, коли виконати навіть таке найпростіше узгодження суперечливих критеріїв далеко не просто, можна стверджувати, що некоректна задача також є складною системою [2, 4], і зведення багатокритеріальної оптимізації до однокритеріальної буде доречним.

Систематизуємо необхідні умови існування шуканого розв'язку з урахуванням припустимих обмежень на кожну умову для того, щоб перейти до постановки задачі розв'язку рівняння (1) із використанням однокритеріальної оптимізації на основі (5):

1. Відхилення отриманого розв'язку повинно бути мінімальним.
2. Нормальний розв'язок за Тихоновим повинен бути мінімальним.
3. Існують додаткові відомості про невідомий розв'язок, наприклад відомо, що він повинен бути невід'ємним або симетричним.

Спочатку сформуємо частинні критерії (2), з яких окремо будемо формувати однокритеріальну задачу нелінійного програмування. При розв'язанні задачі багатокритеріальної оптимізації сукупність цих частинних критеріїв утворить векторний критерій $I^{\Phi}_{M_i}$.

1. Перший критерій I_1 відповідає за сумарне відхиленя одержуваного розв'язку:

$$I_1 = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 . \tag{6}$$

На критерій I_1 накладаються обмеження [2, 4]:

$$\begin{gathered} 0 \le I_1 \le I_{1m} = n10^{-21} \text{ або} \\ 0 \le I_1 \le I_{1m} = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = n\delta^2 , \end{gathered} \tag{7}$$

де n – кількість рівнянь, l – довжина розрядної сітки вихідних даних. При реалізації потрібно враховувати, що показаний в (7) розмір I_{1m} мінімальний, і необхідно для підвищення чисельної стійкості завищувати це значення, виходячи з особливостей задачі.

2. Другий критерій – критерій за чисельною стійкостю, що гарантується нормальним розв'язком за Тихоновим, тобто мінімізує норму розв'язку [5]:

$$I_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} . \tag{8}$$

Нормальний розв'язок введений А.Н. Тихоновим як умова вибору з множини розв'язків некоректної задачі.

Обмеження на критерій I_2 вибираються з фізичної реалізації розв'язку. Вони накладаються на допустиму область розв'язку:

$$0 \le I_2 \le I_{2m} = R = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_{i\max}^2} , \tag{9}$$

де R – радіус сфери, у якій знаходиться розв'язок. Проте на практиці задача ускладнюється тим, що невідомий радіус сфери, у якій знаходиться розв'язок, тобто невідомий I_{2m}. Але за умовою експерименту нам відома довжина розв'язку вимірювального сигналу, тому довжина шуканого сигналу повинна бути не менше довжини розв'язку вимірювального сигналу:

$$I_2 \ge I_{2m} , \text{ де } I_{2m} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} f_i^2} . \tag{10}$$

3. Третій критерій вибирається з умови симетричності розв'язку (якщо відновлюється симетричний щодо свого піка сигнал):

$$I_3 = \sum_{i=1}^{n-1} (y_{i+1} - y_{n-i})^2 + (y_1 - y_n)^2 , 0 \le I_3 \le I_{3m} . \tag{11}$$

Цей критерій згладжує флуктуації і заходи у від'ємну область.

На основі критеріїв (6), (8), (11) постановка задачі нелінійного програмування для розв'язку задачі відновлення сигналів, вираженою (1), буде мати наступний вигляд.

1. Задача знаходження мінімального сумарного відхилу для розв'язку:

$$\min_y I_1 = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 . \tag{12}$$

2. Задача знаходження нормального розв’язку за Тихоновим [5]:

$$\min_y I_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} . \tag{13}$$

3. Задача знаходження симетричного розв’язку:

$$\min_y I_3 = \sum_{i=1}^{n-1} (y_{i+1} - y_{n-i})^2 + (y_1 - y_n)^2 \tag{14,а}$$

або

$$\min_y I_3 = \sum_{i=1}^{n-1} (\sqrt{y_{i+1}} - \sqrt{y_{n-i}})^2 + (\sqrt{y_1} - \sqrt{y_n})^2 \tag{14,б}$$

для одержання невід’ємного розв’язку.

Оскільки задача (1) – некоректна, то наперед відомо, що буде множина отриманих розв’язків, і для того, щоб звузити цю множину, необхідно вводити додаткові обмеження, що, з обчислювальної точки зору, значно ускладнює оптимізаційну задачу. Досліднику потрібно визначитися з поставленою метою: що для нього важливіше – точність розв’язку або стійкість. Якщо важлива точність, то необхідно всі критерії (6)–(11) вводити в розряд обмежень. У такому випадку точність підвищується, проте збільшуються протиріччя між введеними обмеженнями, що можуть взаємовиключати один одного. У випадку виникнення конфліктної ситуації необхідно збільшувати верхні межі існування критеріїв I_{im} доти, поки протиріччя між критеріями не зникнуть. При виведенні критеріїв з обмежень чутливість розв’язку зменшується, проте зменшується і його точність. Дослідник виводить, на його думку, найбільш незначущий критерій з обмежень, якщо обмеження конфліктують між собою, залишаючи най-більш важливі, хоча за умовою задачі всі критерії (2) можуть бути рівноправними між собою.

Отже, у загальному випадку для ЗНП (12)–(14) обмеження будуть однакові і визначатимуться за формулами (7), (9), (11), тобто кожний критерій (6), (8), (11) і навіть той, за яким буде виконуватися оптимізація, буде продубльований в обмеженнях, щоб виключити отримання розв’язків, для яких значення частинних критеріїв будуть лежати поза допустимою областю (2). При виникненні конфліктів між обмеженнями їх число зменшується.

Для ілюстрації розв’язку за допомогою поданих ЗНП (12)–(14) використовуємо приклад з [2]. Параметри для рівняння (1):

$$y(s) = \begin{cases} 30\left[1 - \left(\dfrac{s-400}{25}\right)^2\right]^2 \left(1 + \dfrac{s-400}{25}\right), s \in [375{,}425], \\ 0, s \notin [375{,}425] \end{cases} \tag{15}$$

$$K(x,s) = \frac{1}{25}\sqrt{\frac{0,45}{\pi}} e^{-0,45\left(\frac{x-s}{25}\right)^2}, \quad f(x) = 10,4e^{-0,00087(x-406)^2}, \quad x \in [425;\ 475{,}5].$$

Особливості цього прикладу: різницеве ядро дуже широке, що мало відрізняється від $f(x)$, тому функція $f(x)$ значно ширше, ніж $y(s)$ (функція $y(s)$ виглядає, як вузький сплеск на фоні $f(x)$). Наведені особливості пред'являють підвищені вимоги до розв’язку.

Похибку розв’язку (1) будемо визначати як

$$s_{L_2} = \frac{\left\| y_{ЗНП} - \bar{y} \right\|_{L_2}}{\left\| \bar{y} \right\|_{L_2}}, \tag{16}$$

де $y_{ЗНП}$, $\bar{y}$ – відповідно отриманий (1) і точний розв’язок модельного прикладу.

У результаті розв’язку модельного прикладу (15) за допомогою програми Mathcad були обчислені похибки (16) для задач виду (12)–(14) з обмеженнями (7), (9), (11) для кожної задачі. Крім того, для порівняння з цими задачами за точністю одержуваного розв’язку був складений приклад з неповними обмеженнями: розв’язалась задача (14, б) з обмеженням (7) на відхил одержуваного розв’язку. Кількість відліків для шуканого розв’язку лівої і правої частини дорівнює 10. Результати обчислень подані в таблиці 1. Тут також показаний результат розв’язку (1) методом Тихонова з знаходженням оптимального параметра регуляризації методом відхилень.

Таблиця 1

Методи розв’язку прикладу (15)	Відхилення (16)
ЗНП (12), обмеження (7), (9), (11)	0,1163

ЗНП (13), обмеження (7), (9), (11)	0,1098
ЗНП (14,*б*), обмеження (7), (9), (11)	0,1100
ЗНП (14,*б*), обмеження (7)	0,1263
Метод Тихонова	0,3545

Порівняння різних методів розв'язку показало придатність використання однокритеріальної оптимізації для розв'язку задачі відновлення сигналів, вираженої інтегральним рівнянням Фредгольма першого роду. Перевага використання однокритеріальної оптимізації перед методом Тихонова в тому, що ЗНП дає більш точний результат і можна використовувати неповний набір обмежень, що потребує мінімуму апріорної інформації. Хоча отриманий розв'язок для ЗНП лежить поза областю Парето і не є оптимальним для досліджених прикладів, але усе ж точніший, ніж розв'язок методом Тихонова. З використанням ЗНП для розв'язку рівняння (1) усувається протиріччя між критеріями якості алгоритмів оптимізації, що є присутнім у багатокритеріальній оптимізації.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Баранов В.Л., Залогин Н.С., Уруский О.С., Баранов Г.Л., Комаренко Е.Ю.* Квазиана-логовые многокритериальные модели оптимизации динамических процессов. // Элект-ронное моделирование. – 1996. – Т. 18. – № 5. – С. 3–9.
2. Векторная оптимизация динамических систем / А.Н. Воронин, Ю.К. Зиатдинов, О.И. Козлов, В.С. Чабанюк: Под ред. А.Н. Воронина. – К.: Техніка, 1999. – 284 с.
3. *Верлань А.Ф., Сизиков В.С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие. – К.: Наукова думка, 1986. – 544 с.
4. *Воронин А.Н.* Многокритериальный синтез динамических систем. – Киев: Наук.думка, 1992. – 160 с.
5. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 288 с.

ЗАСЯДЬКО Аліна Анатоліївна – кандидат технічних наук, доцент кафедри інформатики Черкаського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:
– моделювання;
– оптимізація;
– цифрова обробка сигналів;
– некоректні задачі.

E-mail: sagitta@gomail.com.ua

Подано 25.08.2002

Розв'язання задачі відновлення сигналів за допомогою однокритеріальної оптимізації / Засядько А.А.
Введено критерії якості розв'язку задачі відновлення сигналів, вираженої інтегральним рівнянням Фредгольма першого роду, на основі яких будується задача нелінійного програмування Порівняння різноманітних методів розв'язку по чисельній стійкості і точності показало придатність використання однокритеріальної оптимізації для розв'язку поставленої задачі.

Решение задачи восстановления сигналов с помощью однокритериальной оптимизации / Засядько А.А.
Введено критерии качества решения задачи восстановления сигналов, выраженной интегральным уравнением Фредгольма первого рода, на основе которых строится задача нелинейного программирования. Сравнение разнообразных методов решения по численной стойкости и точности показало пригодность использования однокритериальной оптимизации для решения поставленной задачи.

Solving the task of signal restoration by the means of single-objective optimization / Zasyadko A.A.
We consider performance criterions for the task of signal restoration that is presented as Fredholm's equation of the 1^{st} kind. They are used for design of the nonliniar programming task. Comparative analysis of the different methods on numerical stability and accuracy shows availability of single-objective optimization for the problem put by.