УДК 519.95:62 – 501.14

В.Л. Баранов, д.т.н., с.н.с., проф.
Житомирський військовий інститут радіоелектроніки ім. С.П. Корольова

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Запропоновано математичний опис випадкових процесів, що базується на диференціальних перетвореннях. Розглядається застосування диференціальних перетворень для розв'язання задачі аналізу точності нелінійних систем автоматичного управління. Подано приклади розрахунків математичного очікування, дисперсії та кореляційної функції випадкового процесу на основі його диференціального спектра.

Математичне моделювання динамічних об'єктів, що функціонують в умовах впливу випадкових факторів, широко використовується в різних галузях науки і техніки. Сучасні дослідження нелінійних систем автоматичного управління здійснюються з обов'язковим моделюванням випадкових процесів, які виникають під час впливу випадкових збурень [1–5].

У поданій роботі запропоновано підхід до моделювання випадкових процесів, який дозволяє на основі диференціальних перетворень [6–8] отримати в області зображень точні моделі випадкових процесів у межах кореляційної теорії. У цьому разі моделювання випадкових процесів може бути здійснене в аналітичному, число-аналітичному або числовому вигляді. Обмежимо область досліджень випадкових процесів задачами аналізу точності нелінійних систем автоматичного управління, які сформульовані в [4, 5]. Математична модель системи автоматичного управління описується диференціальними рівняннями відносно вихідних координат. Математичний опис складається, виходячи з об'єктивних законів взаємодії системи управління і середовища. Випадкові відхилення і збурення моделюються випадковими величинами і випадковими функціями.

Задача аналізу точності систем автоматичного управління може бути зведена до визначення необхідних імовірнісних характеристик деяких функціоналів від вихідних координат системи управління, що досліджується при заданих ймовірнісних характеристиках випадкових відхилень і випадкових величин, які моделюють випадкові відхилення і збурення, що впливають на систему.

Нехай задана математична модель

$$\frac{dz}{dt} = F[t, z, v_1, v_2, \dots, v_m], \qquad (1)$$
$$t = 0, z(0) = 0,$$

де z – n-вимірний вектор вихідних координат системи, що моделюється; випадкові величини $v_1, v_2, \dots, v_m$ – некорельовані і нормовані:

$$\left.\begin{aligned} M[v_1] = M[v_2] = \dots = M[v_m] = 0, \\ M[v_1^2] = M[v_2^2] = \dots = M[v_m^2] = 1. \end{aligned}\right\}. \qquad (2)$$

Припустимо, що випадкові величини $v_1, v_2, \dots, v_m$ – незалежні і для них задані щільності розподілу вірогідностей:

$$P_1(v_1), \quad P_2(v_2), \dots, P_m(v_m). \qquad (3)$$

На підставі математичної моделі (1) і умов (2) задача аналізу точності системи автоматичного управління формулюється таким чином. Потрібно визначити математичне очікування

$$M\{\chi_l[\Phi_l(t, z(t))]\}, l=\overline{1, L}, \qquad (4)$$

якщо задано векторне диференціальне рівняння (1), умови (2) і щільності розподілення (3) незалежних випадкових величин $v_1, v_2, \dots, v_m$. Вираз (1) у векторній формі описує систему звичайних стохастичних диференціальних рівнянь. Випадкові величини $v_1, v_2, \dots, v_m$ можна розглядати як деякі числові параметри, тому що за визначенням випадкові величини не залежать від часу і в кожному окремому випробуванні набувають певних числових значень. Для кожної вибірки значень випадкових величин $v_1, v_2, \dots, v_m$ вираз (1) є звичайним детермінованим векторним диференціальним рівнянням.

Розв'язання задач Коши (1) в імовірнісному відношенні в [5] визначається таким чином. Сукупність компонент випадкової функції $z(v_1, v_2, ..., v_m)$ називається стохастичним розв'язком для системи стохастичних диференціальних рівнянь вигляду (1), якщо для будь-якої вибірки випадкових величин $v_1, v_2, ..., v_m$ з множини усіх можливих вибірок за винятком, може бути, множини нульової міри компоненти функції $z(v_1, v_2, ..., v_m)$, дають реалізацію, яка є єдиним розв'язком задачі Коши для заданої системи диференціальних рівнянь і нульових початкових умов.

Умова існування і єдності стохастичних розв'язків диференціальних рівнянь вигляду (1) наведена в [5]. Там же доведено, що для більшості досліджуваних в практичних додатках систем автоматичного управління умови існування єдності стохастичних розв'язків диференціальних рівнянь вигляду (1) виконуються.

У подальшому користуватимемомся результатами теореми, що доведена в [5]. Сукупність компонент $z_1, z_2, ..., z_n$, випадкової функції $z(v_1, v_2, ..., v_m)$, яка є розв'язком рівняння (1), можна подати у вигляді деяких детермінованих функцій часу і випадкових $v_1, v_2, ..., v_m$:

$$z_i = \Psi_i(t, v_1, v_2, ..., v_m), i=\overline{1,n}, \tag{5}$$

при цьому функції $\Psi_i, i = \overline{1,n}$ безперервні відносно аргументів $t, v_1, v_2, ..., v_m$, якщо праві частини системи диференціальних рівнянь вигляду (1) безперервні відносно параметрів $v_1, v_2, ..., v_m$, і допускають лише розриви першого роду відносно аргументу t, на множині нульової міри.

Згідно з цією теоремою можна стверджувати, що в класі розв'язків z_i (5), що допускають диференціювання за часовим аргументом, можливе застосування диференціальних перетворень [6, 7], розроблених для детермінованих функцій. Позначимо сукупність випадкових величин аргументів $v_1, v_2, ..., v_m$

$$V = (v_1, v_2, ..., v_m). \tag{6}$$

Компоненти (5) розв'язання рівняння (1) є детермінованими функціями $z_i = \Psi_i(t, V), i=\overline{1,n}$ часу і випадкових величин, що входять в V. У кожній реалізації випадкового процесу величина V визначає згідно з (6) заданий набір констант.

Пряме та зворотне диференціальні перетворення [6, 7] для детермінованих функцій (5) з урахуванням позначення (6) мають вигляд:

$$Z_i(K, V) = \frac{H_i^k}{K!}\left[\frac{d^k z_i(t, V)}{dt^k}\right]_{t=0}, \tag{7}$$

$$z_i(t, V) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t}{H_i}\right)^k Z_i(K, V), \tag{8}$$

де характеристики незалежних компонент (6) задані виразами (2), (3); $Z_i(K, V)$ – дискретна функція цілочислового аргументу $k = 0, 1, 2, 3, ...$ і заданої випадкової величини V; H_i – довжина відрізка часового аргументу, на якому розглядається функція $z_i(t, V)$; значення H_i повинно бути менше, ніж радіус збіжності рядів Тейлора в околі точки $t = 0$.

Вираз (7) визначає пряме перетворення, яке дозволяє за оригіналом $z_i(t, V)$ визначити зображення $Z_i(K, V)$.

Зворотне перетворення, що дозволяє відновити оригінал $z_i(t, V)$ у вигляді ряду Тейлора з центром в точці $t = 0$, визначається виразом (8). Аналогічно до термінології, прийнятої в [6, 7], диференціальні зображення $Z_i(K, V)$ називатимемо диференціальним спектром, а значення функції $Z_i(K, V)$ при конкретних значеннях аргументу $k = 0, 1, 2, 3, ...$ – дискретами диференціального спектра.

Особливість диференціальних перетворень (7) полягає в тому, що в області зображень випадковий процес $z_i(t, V)$ подається диференціальним спектром, дискрети якого – випадкові величини, що визначаються заданими випадковими величинами (6). Заміна випадкової функції $z_i(t, V)$ в області зображень випадковою величиною $Z_i(K, V)$ значно спрощує розв'язання задачі аналізу точності систем автоматичного управління за математичною моделлю (1)–(4).

Дійсно, при застосуванні диференціального перетворення (7) до рівняння (1) в області зображень отримаємо математичну модель у формі рекурентного виразу:

$$Z_i(K+1,V) = \frac{H_i}{K+1}\underline{F_i}\left[T(K), Z(K,V), V\right],$$
$$Z_{i.}(0) = 0, \quad i = \overline{1,n}, \tag{9}$$

де риска знизу функції F_i означає диференціальне перетворення цієї функції.

Послідовно змінюючи значення аргументу $k = 0,1,2,3,\ldots$, згідно з виразом (9) визначаємо диференціальний спектр $Z_i(K,V), i = \overline{1,n}$ розв'язання рівняння (1). На цьому завершується перший етап розв'язання задачі, який містить у собі моделювання диференціального рівняння (1) в області зображень.

На другому етапі потрібно визначити математичне очікування (4). Враховуючи, що розв'язок рівняння (1) отриманий у формі диференціального спектра $Z_i(K,V), i = \overline{1,n}$, переведемо вираз (4) в область зображень із застосуванням прямого диференціального перетворення (7). У результаті отримаємо математичну модель для визначення необхідних імовірнісних характеристик за диференціальним спектром $Z_i(K,V)$:

$$M\left\{\underline{\chi}_l\left[\Phi_l\left(T(K), Z(K,V)\right)\right]\right\}, l = \overline{1,L}. \tag{10}$$

Визначення статистичних характеристик за виразом (10) здійснюється з урахуванням заданих параметрів (2), (3) випадкових величин (6). Враховуючи, що обчислення математичних очікувань згідно з виразом (10) проводиться в області зображень, характеристики випадкових функцій матимуть форму диференціальних спектрів, які потрібно перевести у часову область зворотним перетворенням вигляду (8) або способами, що запропоновані в [8].

Як приклад отримаємо вираз обчислення основних характеристик випадкових процесів у рамках кореляційної теорії. Припустимо, що розглядається одновимірний випадковий процес $x(t,\Omega)$, де Ω – задана випадкова величина. В області зображень модель цього випадкового процесу є диференціальний спектр $X(K,\Omega)$. Якщо здійснити зворотне перетворення $X(K,\Omega)$ до часової області згідно з (8), матимемо вираз

$$x(t,\Omega) = \sum_{K=0}^{\infty}\left(\frac{t}{H}\right)^K X(K,\Omega). \tag{11}$$

Визначимо математичне очікування випадкового процесу $x(t,\Omega)$, що описується виразом (11):

$$m_x(t) = M\left[x(t,\Omega)\right] = \sum_{K=0}^{\infty}\left(\frac{t}{H}\right)^K M\left[X(K,\Omega)\right], \tag{12}$$

де $M\left[X(K,\Omega)\right] = m_x(K) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} X(K,\omega)p(\omega)d\omega$;

$p(\omega)$ – задана щільність розподілення імовірностей випадкової величини Ω.

Якщо випадковий процес $x(t,\Omega)$ розглядається від нульового моменту $t_0 = 0$, то $H = t - t_0 = t$ і вираз (12) спрощується:

$$m_x(t) = \sum_{K=0}^{\infty} m_x(K). \tag{13}$$

З виразу (13) можна зауважити, що математичне очікування $m_x(t)$ випадкового процесу $x(t,\Omega)$ визначається сумою математичних очікувань $m_x(t)$ усіх дискрет диференціального спектра $X(K,\Omega), K = 0,1,2,3,\ldots$ при $H = t$.

За визначенням дисперсія випадкової функції $x(t,\Omega)$ визначається згідно з виразом

$$D_x(t) = M\left[x^2(t,\Omega)\right] - m_x^2(t). \tag{14}$$

Введемо допоміжну змінну:

$$U(t,\Omega) = x^2(t,\Omega). \tag{15}$$

Вираз (14) з урахуванням (15) матиме вигляд

$$D_x(t) = M\left[U(t,\Omega)\right] - m_x^2(t). \tag{16}$$

Переведемо вирази (15), (16) в область зображень згідно з диференціальним перетворенням (7):

$$D_x(K) = M\left[U(K,\Omega)\right] - m_x(K) * m_x(K), \tag{17}$$

$$U(K,\Omega) = X(K,\Omega) * X(K,\Omega) = \sum_{l=0}^{l=K} X(K-l,\Omega)\cdot X(l,\Omega), \tag{18}$$

$$M\left[U(K,\Omega)\right] = m_U(K) = \int_{-\infty}^{\infty} U(K,\omega)\cdot p(\omega)d\omega, \tag{19}$$

$$\underline{m_x^2}(K) = m_x(K) * m_x(K) = \sum_{l=0}^{l=K} m_x(K-l)\cdot m_x(l), \tag{20}$$

де $*$ – символ операції множення в області зображень, а риска знизу – операції піднесення в квадрат також означає здійснення цієї операції в області зображень.

Вирази (17)–(20) дозволяють визначити диференціальний спектр $D_x(K)$, який моделює дисперсію $D_x(t)$ в області зображень. З метою відновлення дисперсії $D_x(t)$ у часовій області за диференціальним спектром $D_x(K)$ використовуємо зворотне диференціальне перетворення вигляду (8):

$$D_x(t) = \sum_{K=0}^{\infty}\left(\frac{t}{H}\right)^K D_x(K). \tag{21}$$

Враховуючи, що випадковий процес $x(t,\Omega)$ розглядається від $t_0 = 0$ і $H = t - t_0 = t$, вираз (21) перетвориться до вигляду

$$D_x(t) = \sum_{K=0}^{\infty} D_x(K), \tag{22}$$

де диференціальний спектр $D_x(K)$ розраховується за виразами (17)–(20) на підставі диференціального спектра $X(K,\Omega)$. Співвідношення (22) дає простий алгоритм визначення дисперсії $D_x(t)$ випадкового процесу $x(t,\Omega)$. Необхідно для кожної дискрети диференціального спектра $X(K,\Omega)$ визначити дисперсію $D_x(K)$ і розрахувати суму дисперсій $D_x(K), K = 0,1,2,3,...$ всіх дискрет диференціального спектра $X(K,\Omega)$ при $H = t$.

Кореляційна функція $R_x(t_1,t_2)$ випадкового процесу $x(t,\Omega)$ будується за двома диференціальними спектрами $X(K,\Omega)$. Згідно з виразом (7) прямого диференціального перетворення дискрети диференціального спектра залежать від інтервалу $H = t - t_0$ подання функції $x(t,\Omega)$. Оберемо два інтервали часу $H_1 = t_1 - t_0$ і $H_2 = t_2 - t_0$. У разі розгляду випадкового процесу $x(t,\Omega)$ від $t_0 = 0$ ці інтервали часу матимуть вигляд $H_1 = t_1$ і $H_2 = t_2$.

Позначимо диференціальний спектр $X(K,\Omega)$, отриманий при $H_1 = t_1$, як $X(K,t_1,\Omega)$, а при $H_2 = t_2$ у вигляді $X(K,t_2,\Omega)$. Визначимо математичне очікування дискрет обох диференціальних спектрів:

$$m_x(K,t_1) = M\left[X(K,t_1,\Omega)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} X(K,t_1,\omega)\cdot p(\omega)d\omega, \tag{23}$$

$$m_x(K,t_2) = M\left[X(K,t_2,\Omega)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} X(K,t_2,\omega)\cdot p(\omega)d\omega. \tag{24}$$

В області зображень перемножуємо диференціальні спектри (23) і (24):

$$m_x(K,t_1) * m_x(K,t_2) = \sum_{l=0}^{l=K} m_x(K-l,t_1)\cdot m_x(l,t_2). \tag{25}$$

Формуємо в області зображень множення двох диференціальних спектрів $X(K,t_1,\Omega)$ і $X(K,t_2,\Omega)$, а результат множення позначимо $Q(K,t_1,t_2,\Omega)$:

$$Q(K,t_1,t_2,\Omega) = X(K,t_1,\Omega) * X(K,t_2,\Omega) = \sum_{l=0}^{l=K} X(K-l,t_1,\Omega)\cdot X(l,t_2,\Omega). \tag{26}$$

Визначимо математичне очікування від (26):

$$m_Q(K,t_1,t_2) = M\left[Q(K,t_1,t_2,\Omega)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} Q(K,t_1,t_2,\Omega)\,p(\omega)d(\omega). \tag{27}$$

Згідно з визначенням кореляційної функції сформуємо її диференціальний спектр $R_x(K,t_1,t_2)$ за виразом

$$R_x(K,t_1,t_2) = m_Q(K,t_1,t_2) - m_x(K,t_1) * m_x(K,t_2). \tag{28}$$

Перехід від диференціального спектра $R_x(K,t_1,t_2)$ до часової області можна здійснити за допомогою зворотного диференціального перетворення (8) двома способами: при $H_1 = t_1$ і $H_2 = t_2$. У результаті отримаємо:

$$R_x(t_1,t_2) = \sum_{K=0}^{\infty} R_x(K,t_1,t_2).$$

Таким чином, кореляційна функція $R_x(t_1,t_2)$ випадкового процесу $x(t,\Omega)$ визначається як сума всіх дискрет диференціального спектра $R_x(K,t_1,t_2)$, розрахунок якого, в свою чергу, здійснюється за виразами (23)–(28).

У разі, коли $t_1 = t_2 = t$, кореляційна функція $R_x(t)$ дорівнює дисперсії $D_x(t)$.

Як висновок зазначимо особливості використання математичного апарата диференціальних перетворень до моделювання випадкових процесів. Запропонований підхід забезпечує точне в рамках кореляційної теорії моделювання випадкових процесів в області зображень, де можливе застосування різноманітних аналогів відомих аналітичних і число-аналітичних методів аналізу і синтезу випадкових процесів і нелінійних стохастичних систем. Аналітичні перетворення математичних моделей випадкових процесів значно скорочують обсяг обчислень. Ця обставина має важливе значення для моделювання нелінійних стохастичних систем в реальному часі і прогнозування їх поведінки в прискореному часі, а також для оптимізації параметрів систем в умовах дії випадкових збурень.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. – М.: Наука, 1987. – 712 с.
2. Основы автоматического управления / Под ред. В.С. Пугачева. – М.: Наука, 1974. – 720 с.
3. *Пугачев В.С.* Статистические методы в технической кибернетике. – М.: Советское радио, 1971. – 192 с.
4. Статистические методы в проектировании нелинейных систем автоматического управления / Под ред. Б.Г. Доступова. – М.: Машиностроение, 1970. – 408 с.
5. *Чернецкий В.И.* Анализ точности нелинейных систем управления. – М.: Машиностроение, 1968. – 246 с.
6. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные преобразования функций и уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 420 с.
7. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные спектры и модели. – Киев: Наук. думка, 1990. – 184 с.
8. *Ронто Н.И., Семагина Э.П.* К вопросу нахождения функций оригиналов по дифференциальным Т-спектрам // Электронное моделирование. – 1987. – 9, № 6. – С. 5–8.

БАРАНОВ Володимир Леонідович – доктор технічних наук, старший науковий співробітник, заслужений діяч науки і техніки України, професор кафедри Житомирського військового інституту радіоелектроніки ім. С.П. Корольова.

Наукові інтереси:
- автоматичні системи управління;
- моделювання складних радіотехнічних систем.

Подано 16.06.2002