УДК 539.376

В.Г. Карнаухов, д.ф.-м.н.
Інститут механіки НАН України
О.В. Лущиков, ст. викл.
Житомирський військовий інститут радіоелектроніки ім. С.П. Корольова
В.В. Михайленко, д.ф.-м.н.
Житомирський інженерно-технологічний інститут

НАБЛИЖЕНА ТЕОРІЯ ВИЗНАЧАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПРИ КОЛИВАННЯХ НЕПРУЖНИХ ІЗОТРОПНИХ ТІЛ

Пропонується наближена теорія амплітудних визначальних рівнянь, що описують коливання фізично-нелінійних непружних ізотропних тіл при одночастотному навантаженні.

При дослідженні коливань фізично-нелінійних непружних тіл досить часто використовується одночастотне наближення таких коливань, коли тензори механічних деформацій і напружень апроксимуються рівностями [1, 2, 3]:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij}\cos\omega t - \varepsilon''_{ij}\sin\omega t\,, \tag{1}$$

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij}\cos\omega t - \sigma''_{ij}\sin\omega t\,. \tag{2}$$

При цьому визначальні рівняння між напруженнями та деформаціями у загальному випадку представляються у вигляді тензорних функцій:

$$\sigma'_{ij} = \sigma'_{ij}\left(\varepsilon'_{kl},\varepsilon''_{kl}\right),\quad \sigma''_{ij} = \sigma''_{ij}\left(\varepsilon'_{kl},\varepsilon''_{kl}\right), \tag{3}$$

які повинні задовольняти обмеженням, що накладаються типом симетрії матеріалу, умовою інваріантності відносно зсуву в часі [4], другим законом термодинаміки і, можливо, ряду інших обмежень.

Для ізотропних непружних матеріалів залежності (3) в припущенні їх квазілінійності, а також з врахуванням вказаних перших двох обмежень, приймають вигляд [5]:

$$\begin{aligned}\sigma'_{ij} &= \left(\lambda' I'_1 - \lambda'' I''_1\right)\delta_{ij} + \left(\mu' + Q\right)\varepsilon'_{ij} - \left(\mu'' - P\right)\varepsilon''_{ij},\\ \sigma''_{ij} &= \left(\lambda' I''_1 + \lambda'' I'_1\right)\delta_{ij} + \left(\mu'' + P\right)\varepsilon'_{ij} + \left(\mu' - Q\right)\varepsilon''_{ij},\end{aligned} \tag{4}$$

де

$$P = 2\eta' I'_1 I''_1 + \eta''\left(I'^2_1 - I''^2_1\right),\ \ Q = \eta'\left(I'^2_1 - I''^2_1\right) - 2\eta'' I'_1 I''_1\,, \tag{5}$$

а λ', λ'', μ', μ'', η', η'' – функції чотирьох інваріантів:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2}\left(I'^2_1 + I''^2_1\right),\ \ I_2 = \frac{1}{2}\left(I'_2 + I''_2\right),\\ J_1 &= I'_1 I''_1 I_{12} + \frac{1}{4}\left(I'^2_1 - I''^2_1\right)\left(I'_2 - I''_2\right),\\ J_2 &= \frac{1}{2} I'_1 I''_1\left(I'_2 - I''_2\right) - \frac{1}{2} I_{12}\left(I'^2_1 - I''^2_1\right),\end{aligned} \tag{6}$$

причому

$$I'_1 = \varepsilon'_{ii},\quad I''_1 = \varepsilon''_{ii},\quad I'_2 = \varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{ij},\quad I''_2 = \varepsilon''_{ij}\varepsilon''_{ij},\quad I_{12} = \varepsilon'_{ij}\varepsilon''_{ij}\,.$$

Характеристики дисипації та накопичення енергії в елементарному об'ємі тіла [6, 7]

$$\bar{D} = \sigma''_{ij}\varepsilon'_{ij} - \sigma'_{ij}\varepsilon''_{ij},\quad \bar{U} = \sigma'_{ij}\varepsilon'_{ij} + \sigma''_{ij}\varepsilon''_{ij} \tag{7}$$

в термінах інваріантів (6) мають вигляд:

$$\bar{D} = 2\lambda'' I_1 + 2\mu'' I_2 - 4\eta' J_2 + 4\eta'' J_1,$$

$$\bar{U} = 2\lambda' I_1 + 2\mu' I_2 + 4\eta' J_1 + 4\eta'' J_2.$$

З іншого боку, в роботі [8] показано, що умова інваріантності відносно зсуву в часі призводить до того, що залежності (3) у загальному випадку представляються у вигляді:

$$\sigma'_{ij} = \frac{\partial U}{\partial\varepsilon'_{ij}} - \frac{\partial D}{\partial\varepsilon''_{ij}} + g'_{ij},\quad \sigma''_{ij} = \frac{\partial U}{\partial\varepsilon''_{ij}} + \frac{\partial D}{\partial\varepsilon'_{ij}} + g''_{ij}.$$

Потенціали U і D знаходяться за енергетичними характеристиками (7), вираженими як функції деформацій, за формулами:

$$U = \int_0^1 \bar{U}\left(\lambda\varepsilon'_{ij}, \lambda\varepsilon''_{ij}\right)\frac{d\lambda}{\lambda}, \qquad D = \int_0^1 \bar{D}\left(\lambda\varepsilon'_{ij}, \lambda\varepsilon''_{ij}\right)\frac{d\lambda}{\lambda}. \tag{8}$$

Складові g'_{ij}, g''_{ij} внеску в накопичення і дисипацію енергії не дають. Необхідними і достатніми умовами тотожної рівності нулю цих складових є такі умови симетрії:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\sigma'_{ij}}{\partial\varepsilon'_{kl}} - \frac{\partial\sigma''_{ij}}{\partial\varepsilon''_{kl}} = \frac{\partial\sigma'_{kl}}{\partial\varepsilon'_{ij}} - \frac{\partial\sigma''_{kl}}{\partial\varepsilon''_{ij}}, \\ &\frac{\partial\sigma'_{ij}}{\partial\varepsilon''_{kl}} + \frac{\partial\sigma''_{ij}}{\partial\varepsilon'_{kl}} = \frac{\partial\sigma'_{kl}}{\partial\varepsilon''_{ij}} + \frac{\partial\sigma''_{kl}}{\partial\varepsilon'_{ij}}. \end{aligned} \tag{9}$$

В класичній континуальній механіці величинами g'_{ij}, g''_{ij}, як правило, нехтується. Зокрема, в рамках загальної кратноінтегральної теорії в'язкопружності ці величини тотожно дорівнюють нулю, якщо для ядер цієї теорії постулюється "принцип взаємності" [9].

У зв'язку з цим в даній роботі за основні приймаються такі визначальні рівняння:

$$\sigma'_{ij} = \frac{\partial U}{\partial\varepsilon'_{ij}} - \frac{\partial D}{\partial\varepsilon''_{ij}}, \quad \sigma''_{ij} = \frac{\partial U}{\partial\varepsilon''_{ij}} + \frac{\partial D}{\partial\varepsilon'_{ij}}. \tag{10}$$

Для ізотропних матеріалів в рамках квазілінійного наближення потенціали U і D, як і коефіцієнти в рівняннях (4), є функціями інваріантів (6).

В деяких роботах [1, 2, 10] залежності (3) використовуються у формі так званої концепції амплітуднозалежних комплексних модулів, суть якої в тому, що рівняння стану (3) з врахуванням позначень

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma'_{ij} + \sqrt{-1}\sigma''_{ij}, \quad \tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon'_{ij} + \sqrt{-1}\varepsilon''_{ij}, \quad \tilde{\lambda} = \lambda' + \sqrt{-1}\lambda'', \quad \tilde{\mu} = \mu' + \sqrt{-1}\mu''$$

можна записати, як і в лінійній теорії, у вигляді:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{\lambda}\tilde{\varepsilon}_{kk}\delta_{ij} + \tilde{\mu}\tilde{\varepsilon}_{ij} \tag{11}$$

(в (4) $P = 0$, $Q = 0$), де комплексні модулі $\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}$ є функціями інваріантів I_1, I_2. Причому теоретичне обґрунтування цієї концепції проведено лише для випадку монофазного (простого) деформування [10]. У цьому випадку в (6) $J_1 = I_1 I_2$, $J_2 = 0$.

Дана робота присвячена знаходженню точних математичних умов, при яких рівняння (10) в квазілінійному наближенні потенціалів U, D для ізотропних матеріалів можна представити у вигляді концепції амплітуднозалежних комплексних модулів у випадку немонофазного деформування. Сформулюємо основний результат даної роботи у вигляді теореми.

Теорема. Рівняння стану (10) можна представити у вигляді концепції амплітуднозалежних комплексних модулів тоді і тільки тоді, коли комплексний потенціал $U + \sqrt{-1}D$ є аналітичною функцією комплексного аргументу $J_1 + \sqrt{-1}J_2$, яка параметрично залежить від інваріантів I_1, I_2.

Доведення. Достатність. Рівняння (10) після простих, але громіздких перетворень можна представити у вигляді (4), де

$$\lambda' = \frac{\partial U}{\partial I_1} + \left(\frac{\partial U}{\partial J_1} + \frac{\partial D}{\partial J_2}\right)\frac{J_1}{I_1} - \left(\frac{\partial D}{\partial J_1} - \frac{\partial U}{\partial J_2}\right)\frac{J_2}{I_1}, \quad \mu' = \frac{\partial U}{\partial I_2},$$

$$\lambda'' = \frac{\partial D}{\partial I_1} + \left(\frac{\partial U}{\partial J_1} + \frac{\partial D}{\partial J_2}\right)\frac{J_2}{I_1} + \left(\frac{\partial D}{\partial J_1} - \frac{\partial U}{\partial J_2}\right)\frac{J_1}{I_1}, \quad \mu'' = \frac{\partial D}{\partial I_2},$$

$$P = \left(\frac{\partial U}{\partial J_1} - \frac{\partial D}{\partial J_2}\right)I'_1 I''_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial J_2} + \frac{\partial D}{\partial J_1}\right)\left(I_1'^2 - I_1''^2\right),$$

$$Q = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial J_1} - \frac{\partial D}{\partial J_2}\right)\left(I_1'^2 - I_1''^2\right) - \left(\frac{\partial U}{\partial J_2} + \frac{\partial D}{\partial J_1}\right)I'_1 I''_1.$$

Звідси видно, що якщо

$$\frac{\partial U}{\partial J_1}=\frac{\partial D}{\partial J_2},\quad \frac{\partial U}{\partial J_2}=-\frac{\partial D}{\partial J_1},$$

тобто функція $U+\sqrt{-1}D$ є аналітичною функцією комплексної змінної $J_1+\sqrt{-1}J_2$, то концепція амплітуднозалежних комплексних модулів має місце, тобто $P=0,\ Q=0$. При цьому

$$\lambda'=\frac{\partial U}{\partial I_1}+2\frac{\partial U}{\partial J_1}\frac{J_1}{I_1}+2\frac{\partial U}{\partial J_2}\frac{J_2}{I_1},\quad \mu'=\frac{\partial U}{\partial I_2},$$
$$\lambda''=\frac{\partial D}{\partial I_1}+2\frac{\partial D}{\partial J_1}\frac{J_1}{I_1}+2\frac{\partial D}{\partial J_2}\frac{J_2}{I_1},\quad \mu''=\frac{\partial D}{\partial I_2}. \tag{12}$$

Із (12), зокрема, випливає, що комплексні модулі $\tilde{\lambda}=\lambda'+\sqrt{-1}\lambda''$ і $\tilde{\mu}=\mu'+\sqrt{-1}\mu''$ є аналітичними функціями змінної $J_1+\sqrt{-1}J_2$. Аналітичною функцією цієї змінної є також комплексна характеристика $\bar{U}+\sqrt{-1}\bar{D}$, оскільки при $P=0,\ Q=0$ із (5) випливає, що $\eta'=0,\ \eta''=0$.

Необхідність. Припустимо, що концепція амплітуднозалежних комплексних модулів має місце, тобто справедливі рівняння стану (11) або

$$\sigma'_{ij}=\left(\lambda' I'_1-\lambda'' I''_1\right)\delta_{ij}+\mu'\varepsilon'_{ij}-\mu''\varepsilon''_{ij},$$
$$\sigma''_{ij}=\left(\lambda' I''_1+\lambda'' I'_1\right)\delta_{ij}+\mu'\varepsilon''_{ij}+\mu''\varepsilon'_{ij}, \tag{13}$$

де $\lambda',\ \lambda'',\ \mu',\ \mu''$ залежать від I_1, I_2, J_1, J_2. Оскільки основними рівняннями є рівняння (10), то залежності (13) слід вважати такими, що представляються в потенціальній формі (10). Це означає, що для них повинні виконуватись умови (9). Якщо підставити (13) в (9) і прирівняти скалярні коефіцієнти при $\varepsilon'_{kl}\delta_{ij}-\varepsilon'_{ij}\delta_{kl}$, $\varepsilon''_{kl}\delta_{ij}-\varepsilon''_{ij}\delta_{kl}$, $\varepsilon''_{kl}\varepsilon'_{ij}-\varepsilon''_{ij}\varepsilon'_{kl}$, то отримаємо систему рівнянь, з якої знаходимо умови

$$\frac{\partial\mu'}{\partial J_1}=\frac{\partial\mu''}{\partial J_2},\quad \frac{\partial\mu'}{\partial J_2}=-\frac{\partial\mu''}{\partial J_1},\quad \frac{\partial\lambda'}{\partial J_1}=\frac{\partial\lambda''}{\partial J_2},\quad \frac{\partial\lambda'}{\partial J_2}=-\frac{\partial\lambda''}{\partial J_1},$$
$$\frac{\partial\lambda'}{\partial I_2}=\frac{\partial\mu'}{\partial I_1}+2\frac{\partial\mu'}{\partial J_1}\frac{J_1}{I_1}+2\frac{\partial\mu'}{\partial J_2}\frac{J_2}{I_1},\quad \frac{\partial\lambda''}{\partial I_2}=\frac{\partial\mu''}{\partial I_1}+2\frac{\partial\mu''}{\partial J_1}\frac{J_1}{I_1}+2\frac{\partial\mu''}{\partial J_2}\frac{J_2}{I_1}. \tag{14}$$

Умови (14) означають, що функції $\lambda'+\sqrt{-1}\lambda''$ і $\mu'+\sqrt{-1}\mu''$ є аналітичними функціями змінної $J_1+\sqrt{-1}J_2$. Оскільки при $P=0,\ Q=0$ з (5) слідує, що і $\eta'=0,\ \eta''=0$, то функція $\bar{U}+\sqrt{-1}\bar{D}$ також є аналітичною функцією змінної $J_1+\sqrt{-1}J_2$, а з (8) слідує аналітичність комплексного потенціалу $U+\sqrt{-1}D$. Теорему доведено. Відмітимо, що дві останні рівності (14) легко отримати, скориставшись співвідношеннями (12).

На основі представлених результатів пропонується така наближена теорія амплітудних визначальних рівнянь одночастотного наближення коливань непружних фізично-нелінійних ізотропних тіл при моногармонічному навантаженні: комплексна характеристика накопичення та дисипації механічної енергії в елементарному об'ємі тіла $\bar{U}+\sqrt{-1}\bar{D}$ апроксимується аналітичною функцією комплексної змінної $J_1+\sqrt{-1}J_2$, що параметрично залежить також від інваріантів $I_1,\ I_2$ із (6). Після експериментального знаходження в межах даної апроксимації функції $\bar{U}+\sqrt{-1}\bar{D}$ визначається комплексний потенціал $U+\sqrt{-1}D$ згідно з формулами (8). Амплітудні визначальні рівняння приймають вигляд (11) або (13), коефіцієнти в яких, як функції інваріантів (6) $I_1,\ I_2,\ J_1,\ J_2$, знаходяться за формулами (12).

Запропонована теорія дозволяє описувати процеси немонофазного деформування ізотропних непружних тіл, що є особливо актуальним в тих випадках, коли матеріалу притаманні значні дисипативні властивості. Якщо припустити, що комплексний потенціал $U+\sqrt{-1}D$ не залежить від $J_1+\sqrt{-1}J_2$ (у цьому випадку він є аналітичною функцією як постійна величина), а є функцією лише інваріантів $I_1,\ I_2$, то отримаємо побудовану в [10] теорію, що не враховує немонофазність деформування.

Із наведеного вище випливає, що основним питанням в запропонованій теорії є питання про експериментальне визначення функції $\bar{U}+\sqrt{-1}\bar{D}$. Зрозуміло, що це можна зробити лише в межах тієї чи іншої гіпотези, яка дозволяє переносити результати одновимірних експериментів на складний напружено-деформований стан.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Карнаухов В.Г., Сенченков И.К., Гуменюк Д.П.* Термомеханическое поведение вязкоупругих тел при гармоническом нагружении. – Киев: Наук. думка, 1985. – 288 с.
2. Термомеханика эластомерных элементов конструкций при циклическом нагружении / В.Н. Потураев, В.И. Дырда, В.Г. Карнаухов и др. – Киев: Наук. думка, 1987. – 288 с.
3. *Пальмов В.А.* Колебания упругопластических тел. – М.: Наука, 1976. – 328 с.
4. *Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф.* Электротермовязкоупругость: Механика связанных полей в элементах конструкций. – К.: Наук. думка, 1988. – Т. 4. – 320 с.
5. *Лущиков О.В., Михайленко В.В., Франовський А.Ц.* До питання про концепцію амплітуднозалежних комплексних модулів в механіці непружних ізотропних матеріалів // Вісник ЖІТІ. – 2001. – № 19.– С. 22–25.
6. *Михайленко В.В.* До питання про дисипацію та накопичення електромеханічної енергії при коливаннях в'язкопружних п'єзоелектричних тіл // Вісник Київського ун-ту, серія: фіз.-мат. науки. – 1997. – С. 128–132.
7. *Михайленко В.В.* Общая структура амплитудных определяющих уравнений неупругих пьезоэлектрических тел при циклических электромеханических процессах // Прикл. механика. – 1996. – 32, № 12. – С. 37–42.
8. *Михайленко В.В. Лущиков А.В., Якименко С.Н.* Определяющие уравнения для неупругих физически-нелинейных пьезоэлектрических тел при гармоническом электромеханическом нагружении // Збірник наукових праць КДТУ. – Випуск 10.– Кіровоград: КДТУ, 2001. – С. 175–185.
9. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. – М.: Наука, 1970. – 280 с.
10. *Сенченков И.К., Карнаухов В.Г., Козлов В.И., Червинко О.П.* К вопросу о простом деформировании в задачах о колебаниях и разогреве нелинейных вязкоупругих тел // Прикл. механика. – 1986. – 22, № 9. – С. 82–90.

КАРНАУХОВ Василь Гаврилович – доктор фізико-математичних наук, завідувач відділу термопружності Інституту механіки НАН України.

Наукові інтереси:

– механіка деформівного твердого тіла.

ЛУЩИКОВ Олександр Володимирович – старший викладач кафедри математики Житомирського військового інституту радіоелектроніки ім. С.П. Корольова.

Наукові інтереси:

– механіка деформівного твердого тіла.

МИХАЙЛЕНКО Василь Васильович – доктор фізико-математичних наук, завідувач кафедри вищої математики Житомирського інженерно-технологічного інституту.

Наукові інтереси:

– механіка деформівного твердого тіла.

Подано 10.06.2002