УДК 519.67

Д.О. Жовновський, аспір.
Житомирський інженерно-технологічний інститут

ОПТИМІЗАЦІЯ РОЗМІЩЕННЯ ДИСКРЕТНИХ ДЖЕРЕЛ ФІЗИЧНИХ ПОЛІВ НА ЗАДАНІ ПОСАДКОВІ МІСЦЯ

Розглядається задача оптимального розміщення джерел фізичних полів на задані посадкові місця. Наведено загальну постановку та побудовано математичну модель задачі. Застосовано такі методи розв'язання цієї задачі: метод потенціалів, угорський метод, метод вектора спаду та генетичний алгоритм. Розглянуто можливість використання цих методів та зроблено їх порівняльну характеристику.

При проектуванні складних технічних систем досить часто виникають оптимізаційні задачі, пов'язані з необхідністю досягнення найбільшої ефективності функціонування системи чи окремих її елементів. Так, наприклад, однією з проблем, що виникають при синтезі блоків мікроелектронної апаратури, є проблема забезпечення необхідного теплового режиму. Це, зокрема, задача мінімізації максимального значення температури в системі, задача мінімізації температури окремого елемента тощо.

Процеси в технічних системах можуть мати найрізноманітнішу фізичну природу, вони можуть бути силовими, дифузійними, електромагнітними, тепловими та іншими. У загальному випадку такі процеси описуються крайовими задачами для диференціальних рівнянь у часткових похідних чи системах відповідних рівнянь.

Так, наприклад, процеси розповсюдження тепла в середовищі описуються таким загальним рівнянням параболічного типу:

$$\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k(x)\nabla u) - q(x)u + F(x,t), \qquad (1)$$

де u – функція, що характеризує просторово-часовий розподіл поля;
F – функція, що характеризує просторово-часовий розподіл джерел тепла;
ρ – густина середовища; k – коефіцієнт теплопровідності середовища;
q – теплоємність середовища.

У багатьох випадках виникає необхідність розв'язання такої задачі: розмістити в заданій області джерела фізичного поля таким чином, щоб досягти максимальної ефективності заданого критерію та задовольнити наперед задані обмеження, накладені на параметри проектованої системи [1]. Керованими змінними такої задачі є параметри розміщення джерел. Критерій ефективності може являти собою, наприклад:

1) значення поля в фіксованій точці області;
2) найбільше значення поля в області;
3) найбільше зі значень поля в полюсах джерел, що розміщуються.

Основними характеристиками джерела в таких задачах є інтенсивність, геометрична форма і розміщення джерела в просторі [2]. Розміщення i-го джерела у випадку, коли джерела поля взаємоорієнтовані, визначається координатами його полюса (Z^i). Полюсом джерела будемо називати будь-яку фіксовану його точку. Очевидно, що розміщення m джерел визначиться вектором $Z = (Z^1, Z^2, \dots, Z^m)$.

Нехай в n-вимірному евклідовому просторі є обмежена замкнута область Ω, що містить джерела фізичного поля $D_1, D_2, \dots, D_m$. Фізичне поле, створюване джерелами і навколишнім середовищем, описується крайовою задачею:

$$\begin{aligned} &\Delta u - \beta^2 u = -f(x,Z) \\ &u\big|_{\partial\Omega} = \varphi(x), \end{aligned} \qquad (2)$$

де

$\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}$;

$x \in R^n$;

f – функція, що характеризує просторовий розподіл джерел в області Ω і має вигляд:

$$f(x,Z)=\begin{cases}A^i\left(x,Z^i\right), & \text{при} \quad x\in D_i \\ 0, & \text{при} \quad x\notin \bigcup\limits_{i=1}^{m} D_i\end{cases}. \tag{3}$$

Нехай в області Ω задані також фіксовані місця $M_1, M_2, \ldots, M_r$ для розміщення джерел фізичного поля.

На розміщення джерел накладаються геометричні обмеження, які являють собою:

а) умови, що характеризують взаємне неперетинання джерел поля:

$$D_i \cap D_j = \varnothing \quad (i=1,\ldots,m-1;\ j=i+1,\ldots,m); \tag{4}$$

б) умови належності джерел області Ω:

$$\bigcup_{i=1}^{m} D_i \subset \Omega; \tag{5}$$

в) умови належності полюсів джерел до множини місць розміщення $M_1, M_2, \ldots, M_r$:

$$Z^i \in \bigcup_{j=1}^{r} M_j \quad (i=1,\ldots,m). \tag{6}$$

Знайти таке розміщення Z джерел $D_1, D_2, \ldots, D_m$ в області Ω, при якому задана функція цілі досягала б свого екстремального значення.

Функція цілі залежить від вектора Z і може мати найрізноманітніше аналітичне подання:

$$\chi(Z)=\chi\left(Z^1, Z^2, \ldots, Z^m\right)\to \text{extr}. \tag{7}$$

Враховуючи те, що полюси джерел можуть знаходитись тільки на заданих фіксованих місцях, деякий розв'язок задачі оптимізації можна записати у вигляді такого вектора:

$$\widetilde{Z}=\left(S_1, S_2, \ldots, S_k, \ldots, S_r\right), \quad S_i \neq S_j, \quad (i=1,\ldots,r;\ j=1,\ldots,r;\ i\neq j), \tag{8}$$

де S_k – номер джерела, що знаходиться на k-му місці.

Таким чином, маємо задачу комбінаторної оптимізації, розв'язати яку можна шляхом повного перебору усіх можливих розв'язків, тобто значень вектора $\widetilde{Z}$. Але в загальному випадку це неможливо, тому що потрібний дуже великий об'єм обчислень. Тому для розв'язання цієї задачі були застосовані такі методи дискретної оптимізації: метод потенціалів, угорський метод, метод вектора спаду та генетичний алгоритм.

Можливість використання методу потенціалів та угорського методу була обумовлена такою властивістю фізичного поля, як адитивність. Тобто результуюче значення фізичного поля в деякій точці області дорівнює сумі значень фізичного поля в цій точці, створюваного кожним з джерел окремо:

$$u(x)=\sum_{i=1}^{m} u_i(x), \tag{9}$$

де $u_i(x)$ – значення фізичного поля в заданій точці x області Ω, що створюється i-им джерелом при умові, що всі інші джерела фізичного поля відсутні.

Таким чином, розрахувавши значення фізичного поля в зазначеній точці області для кожного джерела окремо при розміщенні його у кожному з заданих фіксованих місць $M_1, M_2, \ldots, M_r$, отримаємо таблицю (табл. 1).

Таблиця 1

	M_1	M_2	…	M_j	…	M_r
D_1	u_{11}	u_{12}	…	u_{1j}	…	u_{1r}
D_2	u_{21}	u_{22}	…	u_{2j}	…	u_{2r}
…	…	…	…	…	…	…
D_i	u_{i1}	u_{i2}	…	u_{ij}	…	u_{ir}
…	…	…	…	…	…	…
D_m	u_{m1}	u_{m2}	…	u_{mj}	…	u_{mr}

Тут $u_{ij} = u_{ij}(x)$ – значення фізичного поля в заданій точці x області Ω, що створюється при розміщенні одного джерела D_i на посадкове місце M_j. Таким чином, ми отримали еквівалент класичної задачі про призначення, для розв'язання якої можна застосувати як метод потенціалів, так і угорський метод [3]. Але слід зауважити, що при використанні цих методів не враховуються обмеження на взаємне неперетинання джерел поля та їх невихід за межі області. Гарантовано отримати припустиме розміщення джерел можна тільки при такому заданні посадкових місць, при якому кожне джерело розташоване на будь-якому посадковому місці буде належати області розміщення, а будь-яка пара джерел, розташована на будь-яких заданих посадкових місцях, не буде перетинатися.

Для розв'язання задач розміщення джерел поля на задані посадкові місця з урахуванням умов неперетинання джерел та їх належності області Ω були застосовані модифікований генетичний алгоритм та метод вектора спаду.

Генетичний алгоритм полягає в концепції, що будь-яка складна система в процесі свого розвитку прагне до найоптимальнішого стану. Тобто, якщо з кожним кроком намагатися покращувати розв'язок задачі, то на деякому кроці ми з деякою ймовірністю отримаємо оптимальний розв'язок. Зрозуміло, що, чим більше кроків ми зробимо, тим більшою буде ця ймовірність. Але нескінченно проводити розв'язування задачі неможливо, тому, зупинившись після досягнення заданого критерію, ми отримаємо принаймні деякий раціональний розв'язок.

Роботу генетичного алгоритму краще пояснювати, застосовуючи біологічні терміни. Нехай ми маємо деякий початковий набір можливих розв'язків задачі (в нашому випадку – значень вектора $\widetilde{Z}$), який назвемо початковою популяцією. Самі розв'язки задачі назвемо хромосомами. Компоненти вектора $\widetilde{Z}$ (елементи хромосоми) назвемо генами. Над кожною популяцією виконуються такі операції. Спочатку, за допомогою так званого природного добору, відбираються найкращі хромосоми, які складають популяцію для схрещування. Природний добір можна виконувати різними методами. При розв'язанні поставленої задачі застосовувався турнірний добір та добір з ранжуванням.

Над хромосомами отриманої популяції виконується операція схрещування шляхом обміну генами. Над отриманими новими хромосомами з деякою невеликою ймовірністю виконуються операції мутації та інверсії (перестановки) генів. Це потрібно для того, щоб можна було відійти від локального розв'язку задачі і шукати глобальний. Таким чином ми намагаємося зберегти найкращі риси старої популяції і додати якісь нові вигідні риси, отримуючи нові розв'язки задачі і покращуючи функцію цілі. Після виконання всіх цих операцій отримаємо нову популяцію і процес розв'язування повторюється.

Схематично процес роботи генетичного алгоритму зображено на рис. 1.

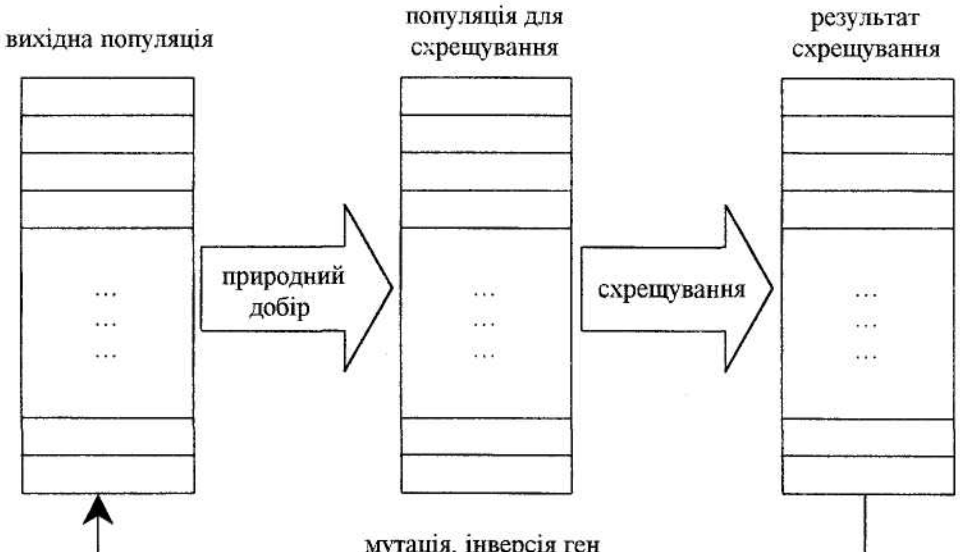

Рис. 1. Схема роботи генетичного алгоритму

Після досягнення заданого критерію зупинки (це може бути кількість кроків чи ступінь конвергенції популяції) процес розв'язування припиняється і краща хромосома (кращий вектор $\tilde{Z}$) вважається розв'язком задачі.

Необхідно зазначити, що ймовірності операцій над хромосомами або особами популяції можуть бути як незмінними, так і змінюватися в процесі руху еволюційними сходами від популяції до популяції. При розв'язуванні різних практичних задач було встановлено, що генетичний алгоритм набагато швидше сходиться до деякого оптимального розв'язку задачі, якщо ймовірності "несприятливих" для хромосоми операцій з кожним кроком (з кожною новою популяцією) зменшувати. Це – операції мутації й інверсії ген. Коефіцієнт зміни таких ймовірностей повинен бути трохи менший одиниці для того, щоб на перших кроках оптимізації здійснити вибір розв'язків з великим радіусом пошуку, інтенсивно проводячи мутації хромосом та інверсію їх ген, а на останніх кроках одержати майже нульову ймовірність "несприятливих" змін. Це сприяє більш ретельному пошуку оптимального розв'язку задачі. У результаті досягається дуже високий ступінь конвергенції популяції на останніх етапах розв'язання.

Для розв'язання поставленої задачі генетичний алгоритм був застосований разом з використанням штрафних функцій [4], що накладають штраф на перетин джерел або їх вихід за межі області Ω. Функції штрафу використовуються при підрахунку ступеня придатності хромосоми. Це дозволило одержувати не тільки значення обраної функції цілі при досліджуваному розміщенні джерел фізичного поля в області, але і кількісно оцінити ступінь виконання обмежень, накладених на геометричні параметри системи. Таким чином, розв'язки з не припустимим розміщенням джерел на області відкидалися і не брали участі в подальшому пошуку.

Штрафні функції були використані також і в методі вектора спаду [5]. Для пошуку наступного наближення в цьому методі використовувався окіл одиничного радіуса, тобто такі значення параметра:

$$\tilde{Z} = (S_1, S_2, \ldots, S_k, \ldots, S_r), \quad S_i \neq S_j, \quad (i = 1, \ldots, r; j = 1, \ldots, r; i \neq j),$$

що відрізняються від попереднього будь-якою однією перестановкою номерів джерел $S_i \leftrightarrow S_j$. Значення функції цілі для кожного значення параметра $\tilde{Z}$ знаходились з урахуванням обраної функції штрафу.

Проведені експериментальні дослідження показали, що взагалі метод вектора спаду працює швидше за генетичний алгоритм. Але, при досить великій кількості джерел (близько 100), час оптимізації методом генетичного алгоритму не дуже відрізняється від часу оптимізації методом вектора спаду.

Генетичний алгоритм та метод вектора спаду реалізовані як для закритої моделі задачі, коли кількість джерел поля співпадає з кількістю посадкових місць, так і для відкритої моделі, коли ці кількості не співпадають.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Стоян Ю.Г., Путятін В.П.* Розміщення джерел фізичних полів. – К.: Наук. думка, 1981. – 184 с.
2. *Чувашева С.І.* Чисельні методи рішення одного класу задач оптимізації розміщення джерел фізичних полів. Автореф. дис. ... к.ф.-м.н. – Харків: 1984. – 14 с.
3. *Бейко І.В., Бублик Б.Н., Зинько П.Н.* Методи і алгоритми розв'язання задач оптимізації. – К.: Вища школа, 1983. – 512 с.
4. *Базара М., Шетті К.* Нелінійне програмування. Теорія і алгоритми. – М.:Мир, 1982. – 583 с.
5. Сергієнко І.В. Математичні моделі та методи розв'язання задач дискретної оптимізації. – К.: Наукова думка, 1985. – 380 с.

ЖОВНОВСЬКИЙ Дмитро Олександрович – аспірант кафедри програмного забезпечення обчислювальної техніки Житомирського інженерно-технологічного інституту.

Наукові інтереси:

- математичне моделювання технічних систем;
- комп'ютерні інформаційні технології;
- методи оптимізації.

Подано 15.04.2002