УДК 621.396.94

С.В. Водоп'ян, к.т.н.
С.В. Ковбасюк, к.т.н.
М.Ю. Ракушев, ад'юнкт
Житомирський військовий інститут радіоелектроніки ім. С.П. Корольова

МЕТОДИКА ПЛАНУВАННЯ СЕАНСІВ УПРАВЛІННЯ І ЗВ'ЯЗКУ КОСМІЧНОГО АПАРАТА З НАЗЕМНИМ ПУНКТОМ

Запропоновано варіант методики розрахунку сеансів управління та зв'язку космічного апарата з наземним пунктом, що базується на застосуванні диференціальних перетворень.

Безперервне збільшення кількості завдань, що вирішуються космічними системами (забезпечення зв'язком, навігаційними і метеоданими, розвідка природних ресурсів і т.і.), призводить до збільшення кількісного і якісного складу орбітального угруповання. Ця тенденція призводить до різкого підвищення вимог щодо оперативності планування застосування як окремих космічних апаратів (КА), так і орбітальних угруповань в цілому.

Одним з завдань, що вирішуються при застосуванні космічних систем, є планування проведення сеансів управління та зв'язку КА з наземним пунктом (НП). Це завдання зводиться до визначення умов видимості КА з НП [2] (рис. 1).

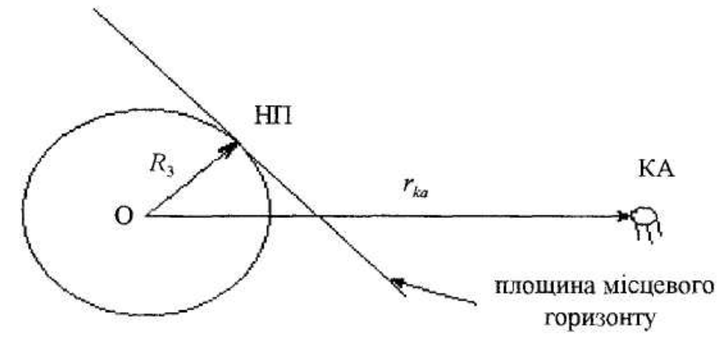

Рис. 1. Визначення умов видимості КА з НП.

Традиційно задача розрахунку умов видимості КА з НП розв'язується за допомогою чисельних методів, тобто на кожному кроці розраховується положення КА (шляхом чисельного інтегрування диференціального рівняння руху КА) та перевіряється умова його знаходження в зоні видимості НП. Недоліками чисельних методів є великі обчислювальні витрати, які необхідні для розв'язку поставленої задачі, і можливість отримання нестійкого розв'язку.

Ефективним підходом до вирішення цієї проблеми є застосування математичного апарату диференціальних перетворень [5, 6]. Диференціальні перетворення − це новий операційний метод, який, на відміну від відомих інтегральних перетворень Лапласа і Фур'є, полягає в переводі оригіналів в область зображень за допомогою диференціювання. При математичному моделюванні фізичних об'єктів і процесів, що описуються диференціальними та інтегральними рівняннями, диференціальні перетворення дозволяють замінити операції інтегрування і диференціювання еквівалентними алгебраїчними операціями і отримати в області зображень точні моделі задач, що розв'язуються.

Метою статті є розробка методики планування проведення сеансів управління та зв'язку космічного апарата з наземним пунктом, яка базується на:

− заданні взаємного розташування КА і НП через скалярний добуток векторів, що визначають їх положення в інерційній геоцентричній прямокутній екваторіальній системі координат (ІСК);

– застосуванні методу диференційних перетворень для розв'язку рівняння щодо знаходження часу проведення сеансів управління і зв'язку КА з наземним пунктом.

Диференціально-тейлорівськими перетвореннями називають функціональні перетворення вигляду [6]:

$$Z(K) = \frac{H^k}{K!}\left[\frac{d^k z(t)}{dt^k}\right]_{t=0}, \tag{1}$$

$$z(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t}{H}\right)^k Z(K), \tag{2}$$

де Z(K) – дискретна функція цілочисельного аргументу K = 0,1,2,3,... ;

H – відрізок аргументу, на якому розглядається функція z (t);

значення H повинно бути меншим за радіус збіжності рядів Тейлора в околі точки $t = 0$.

Вираз (1) визначає пряме перетворення, яке дозволяє за оригіналом z (t) знайти зображення Z (K). Обернене перетворення, що відновлює оригінал z (t) у вигляді ряду Тейлора з центром у точці $t = 0$, визначається виразом (2). За аналогією термінології, що прийнята у [5,6], диференціальні зображення Z (K) будемо називати диференціальним спектром, а значення функції Z(K) при конкретних значеннях аргументу K = 0,1,... назвемо дискретами диференціального спектра.

Для розв'язку поставленої задачі моделювання руху КА здійснимо на основі векторного диференціального рівняння незбуреного руху об'єкта в ІСК [1]:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[\overline{r_{ka}}(t)\right] + K_3\frac{\overline{r_{ka}(t)}}{r_{ka}{}^3(t)} = 0, \tag{3}$$

де $\overline{r_{ka}(t)}$ – радіус-вектор КА в ІСК;

$K_з$ – гравітаційний параметр Землі, що дорівнює $3{,}986{*}10^5$ км^3/с^2.

Обмежимо розгляд задачі випадком кругової орбіти, тобто покладемо $r_{ka}(t)$ = const. В цьому випадку рівняння (3) у проекціях в ІСК запишеться у вигляді системи:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dt^2}\left[x_{ka}(t)\right] + K_3\frac{x_{ka}(t)}{r^3} = 0,\\
&\frac{d^2}{dt^2}\left[y_{ka}(t)\right] + K_3\frac{y_{ka}(t)}{r^3} = 0,\\
&\frac{d^2}{dt^2}\left[z_{ka}(t)\right] + K_3\frac{z_{ka}(t)}{r^3} = 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

В області зображень (враховуючи властивості диференціальних перетворень [5]) система рівнянь (4) прийме вигляд:

$$\begin{aligned}
X_{ka}(k+2) &= -\frac{H^2K_3}{(k+1)(k+2)r^3}X_{ka}(k),\\
Y_{ka}(k+2) &= -\frac{H^2K_3}{(k+1)(k+2)r^3}Y_{ka}(k),\\
Z_{ka}(k+2) &= -\frac{H^2K_3}{(k+1)(k+2)r^3}Z_{ka}(k).
\end{aligned} \tag{5}$$

У відповідності з [3] перші три дискрети (взагалі кажучи, нескінченного) диференціального спектра незбуреного руху КА визначаються таким чином:

$$\begin{aligned}
&X_{ka}(0) = x_o & &Y_{ka}(0) = y_o & &Z_{ka}(0) = z_o\\
&X_{ka}(1) = V_{xo}H, & &Y_{ka}(1) = V_{yo}H, & &Z_{ka}(1) = V_{zo}H,\\
&X_{ka}(2) = -\frac{K_3H^2}{2!\,r^3}x_o & &Y_{ka}(2) = -\frac{K_3H^2}{2!\,r^3}y_o & &Z_{ka}(2) = -\frac{K_3H^2}{2!\,r^3}z_o
\end{aligned} \tag{6}$$

де X_o, Y_o, Z_o, V_{xo}, V_{yo}, V_{zo} – початкові умови на момент часу $t = 0$.

Положення НП в ІСК визначається [1] таким чином:

$$
\begin{aligned}
&[x_n(t) \quad y_n(t) \quad z_n(t)]^T = \Phi \cdot [x_g \quad y_g \quad z_g]^T, \\
&\Phi = \begin{bmatrix} \cos(S) & -\sin(S) & 0 \\ \sin(S) & \cos(S) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
&S = q\Omega_3 t, \\
&x_g = R_3 \cos(\varphi_o)\cos(\lambda_o), \\
&y_g = R_3 \cos(\varphi_o)\sin(\lambda_o), \\
&z_g = R_3 \sin(\varphi_o),
\end{aligned} \tag{8}
$$

де $x_n(t)$, $y_n(t)$, $z_n(t)$ – координати НП в ІСК;

x_g y_g, z_g – координати НП в гринвіцький геоцентричній прямокутній системі координат (ГСК);

Φ – матриця перерахунку з ГСК в ІСК;

$\Omega_3 = 0{,}7292115 \cdot 10^{-4}$ рад/с – кутова швидкість обертання Землі навколо своєї осі;

q = 1,0027379 – множник для переходу від середньо сонячного часу до зоряного часу;

S – зоряний час, рад;

φ_o – географічна широта НП, рад;

λ_o – географічна довгота НП, рад.

Застосувавши до (8) диференціальні перетворення (1), отримаємо дискрети диференціального спектра для проекцій НП в ІСК :

$$
\begin{aligned}
&X_n(k) = C_W(k)x_g - S_W(k)y_g \\
&Y_n(k) = S_W(k)x_g + C_W(k)y_g, \\
&Z_n(k) = z_g\sigma(k) \\
&\sigma(k) = \begin{cases} 1, k = 0; \\ 0, k = 1,2,\ldots \end{cases},
\end{aligned} \tag{9}
$$

де $C_W(k) = \dfrac{(qW_3)^k}{k!}\sin\left(\dfrac{\pi k}{2}\right)$ – Т-косинус;

$S_W(k) = \dfrac{(qW_3)^k}{k!}\cos\left(\dfrac{\pi k}{2}\right)$ – Т-синус;

$\sigma(k)$ – тейлорівська одиниця, "теда".

Три перших дискрети диференціального спектра кожної координати мають такий вигляд:

$$
\begin{aligned}
&X_n(0) = x_g && Y_n(0) = y_g && Z_n(0) = z_g \\
&X_n(1) = -q\Omega_3 y_g H, && Y_n(1) = q\Omega_3 x_g H, && Z_n(1) = Z_n(2) = 0 \\
&X_n(2) = -\frac{1}{2}q^2\Omega_3^2 R_3 x_g H^2 && Y_n(2) = -\frac{1}{2}q^2\Omega_3^2 y_g H^2 &&
\end{aligned} \tag{10}
$$

Як умову видимості космічного апарата з наземного пункту візьмемо величину скалярного добутку їх векторів в ІСК, для випадку, коли КА знаходиться над місцевим горизонтом НП (рис. 1):

$$\overline{r_{ka}}(t) \cdot \overline{r_n}(t) = x_{ka}(t)\cdot x_n(t) + y_{ka}(t)\cdot y_n(t) + z_{ka}(t)\cdot z_n(t) \ge R_3^2. \tag{11}$$

Приблизний вигляд залежності (11) наведено на графіку (рис. 2), де $t_{1(2)}$ – час входу КА в зону (виходу КА з зони) видимості НП.

Перепишемо (11) для випадку граничної умови у вигляді:

$$F(t) = x_{ka}(t)\cdot x_n(t) + y_{ka}(t)\cdot y_n(t) + z_{ka}(t)\cdot z_n(t) - R_3^2. \tag{12}$$

З аналізу (12) можна зробити висновок, що визначення умов видимості КА з НП зводиться до розв'язку рівняння:

$$F(t) = 0, \tag{13}$$

яке в області зображень має вигляд:

$$F(K) = X_{ka}(K) * X_n(K) + Y_{ka}(K) * Y_n(K) + Z_{ka}(K) * Z_n(K) - R_3^2 \cdot \sigma(k), \tag{14}$$

де * – означає операцію згортки.

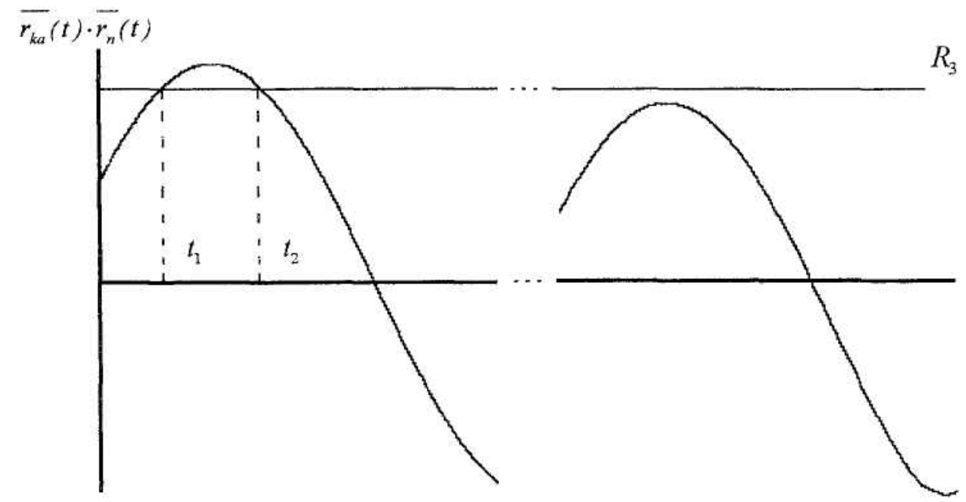

Рис.2. Вигляд величини скалярного добутку векторів КА з НП в ІСК

Використовуючи властивості диференціальних перетворень [5], запишемо (14) у вигляді:

$$F(K)=\sum_{l=0}^{k}\left[X_{ka}(k-l)X_n(l)+Y_{ka}(k-l)Y_n(l)\right]+Z_{ka}(k)Z_n(0)-R_3^2\sigma(k)\,. \tag{15}$$

Для відновлення оригіналу у випадку диференціально-тейлорівських перетворень задача полягає в додаванні дискрет спектра F(K) у вигляді відрізка ряду Тейлора за ступенями функції T = t/H. Недоліком тейлорівського ряду є те, що відновлення оригіналу можливо для невеликих часових інтервалів. Тому при розгляді відновлених функцій на великих часових інтервалах доцільно застосовувати диференціальні перетворення нетейлорівського типу [6]. Вони відрізняються від диференціально-тейлорівських тільки тим, що відновлення відбувається у вигляді апроксимуючих функцій з вільними коефіцієнтами, де функція підбирається для кожного випадку, виходячи з апріорного знання її виду. Коефіцієнти цієї функції підбирають шляхом прирівнювання диференціального спектра апроксимуючої функції та диференціального спектра, що отримується зі спектральної моделі об'єкта. Диференціальні перетворення нетейлорівського типу в загальному випадку записують так:

$$Z(K)=\frac{H^k}{K!}\left[\frac{d^k z(t)}{dt^k}\right]_{t=0}, \tag{16}$$

$$z(t)=f(t,c),$$

де c − сукупність вільних коефіцієнтів.

Відновлювати оригінал F(t) за дискретами спектра F(k) будемо у вигляді дрібно-раціональної функції (апроксимації Паде), яка використовується для розв'язання широкого кола інженерних задач [4]:

$$f(\tau)=\frac{a_o+a_1\tau+a_2\tau^2}{1+b_1\tau+b_2\tau^2+b_3\tau^3+b_4\tau^4+b_5\tau^5+b_6\tau^6}, \tag{17}$$

де визначенню підлягають коефіцієнти $a_0, a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$.

Вид дрібно-раціональної функції, а саме: степені багаточленів у чисельнику та знаменнику обрано з таких міркувань: оригінал $F(t)$ − має на відрізку одного витка парну кількість (два або жодного) дійсних коренів, тому степінь чисельника друга (парна), $F(t)$ − безперервна функція, тому степінь знаменника повинен бути парним, і обирається виходячи з інтервала часу, на якому необхідно відновлювати оригінал.

Обмежимо розгляд тільки для КА з $h_{ка}\le 10^3$км. При цьому для знаходження дискрет диференціального спектра (14) з достатньою точністю, зважаючи на те, що Земля обертається навколо власної осі значно повільніше, ніж КА навколо Землі ($T_{ка}=1^h15^m...1^h40^m$, $T_3=24^h$), достатньо в диференціальному спектрі Землі врахувати тільки три перші дискрети. Виходячи з цього, в (17) степінь знаменника обираний шостим, це дозволить відновлювати оригінал на інтервалі одного часу.

Вільні коефіцієнти в (17) розраховуються таким чином [6]:

$$\begin{bmatrix} F(2) & F(1) & F(0) & 0 & 0 & 0 \\ F(3) & F(2) & F(1) & F(0) & 0 & 0 \\ F(4) & F(3) & F(2) & F(1) & F(0) & 0 \\ F(5) & F(4) & F(3) & F(2) & F(1) & F(0) \\ F(6) & F(5) & F(4) & F(3) & F(2) & F(1) \\ F(7) & F(6) & F(5) & F(4) & F(3) & F(2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F(3) \\ F(4) \\ F(5) \\ F(6) \\ F(7) \\ F(8) \end{bmatrix}, \tag{18}$$

$$\begin{bmatrix} a_o \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(0) & 0 & 0 \\ F(1) & F(0) & 0 \\ F(2) & F(1) & F(0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Аналізуючи розв'язок рівняння (13) видно, що з врахуванням (17), визначення умови видимості КА з НП (планування проведення сеансів управління та зв'язку КА з НП) зводиться до розв'язку квадратного рівняння:

$$a_o + a_1\tau + a_2\tau^2 = 0\,, \tag{20}$$

корені якого (тільки дійсні) відповідають входженню та виходу КА із зони видимості НП. Якщо дійсних коренів немає, то на цьому витку входження КА в зону видимості НП не відбудеться.

Розв'язок рівняння (20) є останнім пунктом розробленої методики планування сеансів управління та зв'язку КА з НП. Таким чином, використовуючи залежності (5, 6, 9, 10, 15, 20), можна організувати планування сеансів управління та зв'язку КА і НП з використанням нового операційного методу – диференціальних перетворень академіка Г.Е. Пухова , виходячи з умови видимості космічного апарата з наземного пункту на основі величини скалярного добутку векторів в ІСК.

Порівняльний аналіз традиційної та розробленої методик наведено в табл. 1, де $t_{вх}$, $t_{вих}$ – розраховані значення часів входу КА в зону видимості НП та виходу з неї. Як традиційним чисельним методом обрано метод Рунге-Кутти 4 порядку, Δt – інтервал часового приросту при ітераційному розрахунку. В таблиці наведена оцінка обчислювальних витрат: $N_{ад}$ – кількість арифметичних дій (добутків та ділень), що проводиться за кожною з методик.

Таблиця 1

Вихідні дані	Метод Рунге-Кутти (Δt = 50с)	Розроблена методика
h_{ka} = 650 км i = 82,5грд Ω = -5 грд φ_o = 50,5грд λ_o = 28 грд	$t_{вх}$ = 616 с $t_{вих}$ = 1253 с $N_{ад}\approx$1800	$t_{вх}$ = 616 с $t_{вих}$ = 1253с $N_{ад}\approx$300
h_{ka}=850 км i= 102,5грд Ω = 15 грд φ_o = 50,5грд λ_o = 28 грд	$t_{вх}$ = 391 с $t_{вих}$ = 1303 с $N_{ад}\approx$1850	$t_{вх}$ = 391 с $t_{вих}$ = 1303 с $N_{ад}\approx$300

З результатів моделювання видно, що розроблена методика дозволяє вирішити в аналітичному вигляді завдання визначення умов видимості КА з НП. Порівняльна оцінка обчислювальних витрат за кожною з методик при розрахунку умов видимості КА з НП показує, що за методом Рунге-Кутти 4 порядку необхідно близько 1800 арифметичних дій, а за розробленою методикою – близько 300. З наведеної оцінки видно, що розроблена методика вимагає в 6 разів менших обчислювальних витрат, ніж традиційна.

Таким чином, розроблена методика дозволяє проводити планування проведення сеансів зв'язку та управління КА з НП в аналітичному вигляді, забезпечуючи досить високу точність (не гірше класичних методів). При цьому вона позбавлена недоліків традиційних методів вирішення задачі, а саме: великих обчислювальних витрат і можливості отримання нестійкого розв'язку задачі.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / Под. ред. Г.Н. Дубошина. – М.: Наука, 1976. – 864 с.

2. Основы теории полета космических аппаратов / Под. ред. Г.С. Нариманова, М.К. Тихонравова. – Москва: Воениздат, 1977. – 240 с.

3. *Ковбасюк С.В.* Построение дифференциальных Р-моделей невозмущенного движения космического аппарата.: Матеріали V Міжнародної науково-практичної конференції, Житомир. – 2001р. – С. 77–82

4. *Корн Г, Корн Т.* Справочник по математике. – Москва: Наука, 1974. – 832 с.

5. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов. – Киев: Наукова думка, 1986. – 159 с.

6. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные спектры и модели. – Киев: Наукова думка, 1990.– 184 с.

ВОДОП'ЯН Сергій Васильович – кандидат технічних наук, начальник відділу наукового центру Житомирського військового інституту радіоелектроніки ім. С.П. Корольова.

Наукові інтереси:

– математичне моделювання та цифрова обробка сигналів.

КОВБАСЮК Сергій Валентинович – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, начальник науково-дослідного відділу Житомирського військового інституту радіоелектроніки ім. С.П. Корольова.

Наукові інтереси:

– наземні засоби космічної інфраструктури України.

РАКУШЕВ Михайло Юрійович – ад'юнкт Житомирського військового інституту радіоелектроніки ім. С.П. Корольова.

Наукові інтереси:

– балістичне забезпечення польотів космічних об'єктів

Подано 26.03.2002