УДК 517.5

П.І. Когут, д.ф.-м.н., проф.
Дніпропетровський державний технічний університет залізничного транспорту
П.М. Повідайко, к.т.н., доц.
Житомирський інженерно-технологічний інститут

ЯКІСНИЙ АНАЛІЗ БІОРТОГОНАЛЬНИХ БАЗИСІВ СПЛЕСКІВ З КОМПАКТНИМИ НОСІЯМИ

Проводиться аналіз основних понять та результатів теорії сплеск-перетворень. Формується постановка та дається розв'язок однієї оптимізаційної задачі, яка дозволяє на будь-якій множині біортогональних базисів сплесків з компактними носіями визначити "кращий" фільтр.

Як відомо, в основі сучасного стандарту стиску фотографічних зображень JPEG 2000 лежить ідеологія так званих сплеск-перетворень. На сьогоднішній день методи розкладення зображень за базисами сплесків для подальшого стиску розвинуті досить повно. Проте буде неправомірним вважати, що розробки в цьому напрямку є повністю закінченими. Дійсно, нерозв'язаною проблемою залишається пошук адаптивних базисів сплесків, розкладення сигналів зображень, за якими досягається більших коефіцієнтів стиску та зменшуються арифметичні затрати на реалізацію відповідних алгоритмів. Один із можливих шляхів розв'язання цієї проблеми полягає в конструюванні параметричних базисів сплесків з подальшим дослідженням відповідної оптимізаційної задачі. Проте перш, ніж перейти до процедури пошуку таких базисів сплесків, які є кращими в задачах стиску зображень, наведемо короткий огляд основних результатів теорії сплесків-перетворень.

В 1997 році два відомі німецькі математики Мюллер та Хірцебрух опублікували статтю про розвиток математики за останнє десятиріччя. На їхню думку воно було знаменним двома визначними подіями: доведенням великої теореми Ферма та появою сплеск-аналізу. І, хоча роль сплеск-аналізу в самій математиці поки що є не дуже значною, проте не було за останні роки іншої математичної концепції, яка б так стрімко пронизала всі природничі науки, різноманітні галузі техніки, економіку та фінанси. Причиною цього факту є надзвичайна простота і точність сплеск-перетворення, яке за своєю сутністю є альтернативою традиційного аналізу Фур'є.

Як відомо, в основі традиційного перетворення Фур'є стаціонарного сигналу $f \in L^2(R)$ лежить ідея розкладення цієї функції в ряд за тригонометричним базисом чи базисом комплексних експонент $\{e^{-in\omega}\}_{n\in Z}$. Як правило такі базисні функції, кількість яких є нескінчено великою, є оптимальними за багатьма критеріями при роботі зі стаціонарними сигналами. До того ж коефіцієнти розкладання стаціонарного процесу за тригонометричним базисом є некорельованими випадковими величинами. Проте традиційне подання довільної функції $f \in L^2(R)$ у вигляді ряду Фур'є $f = \sum_{n\in Z} h_n e^{-inx}$ має ряд суттєвих недоліків. По-перше, для визначення кожного з коефіцієнтів h_n потрібна повна інформація про функцію сигналу f на всій області її визначення. По-друге, не всі сигнали є стаціонарними, тобто вони можуть містити локальні особливості. Тоді будь-який пік в сигналі на часовій області однаковою мірою є відчутним на всій частотній області в його перетворенні Фур'є. Зокрема, спектр δ-функції (тобто послідовність значень h_n) як найбільш рафінований приклад нестаціонарного сигналу є постійним. Отже, для відображення в сигналі такої особливості, як δ-функція, необхідно враховувати всі (!) компоненти спектра. В цьому розумінні кожна з його компонент є рівноважною. Таким чином, нехтування хоча б частиною з них призведе до спотворення цієї функції не лише в околі точки особливості, але й на всій відстані від неї. Проте будь-яка функція, що відповідає реальному сигналу фотографічного зображення, є насправді нестаціонарною. Отже, проблема її якісного наближення рядами Фур'є стає принципово складною. Зрозуміло, що причиною цього є те, що тригонометричний базис складається з функцій, носії яких (тобто замикання множин, на яких функції відмінні від нуля) не локалізовані в часі. Тому для подання функцій з локальними особливостями потрібно шукати такий базис, функції якого та їх перетворення Фур'є є добре локалізованими. Власне базис сплесків, про які мова піде нижче, задовольняють зазначені властивості.

В загальному випадку сплеском називають визначену на всій числовій прямій функцію $\in L^2(R)$, яка достатньо швидко прямує до нуля на нескінченості і при цьому система її зсувів та розтягів $\left\{2^{\frac{j}{2}}\Psi(2^j x-n)\right\}_{j,n\in Z}$ утворює ортонормований базис в $L^2(R)$. Інструментом для побудови базисів сплесків є так званий короткомасштабний аналіз того функціонального простору, елементами якого виступають сигнали зображень $f(t)$. Традиційно таким простором вибирають простір $L^2(R)$, хоча на сьогоднішній день немає повної ясності в тому, метрика якого функціонального простору адекватно відповідає поняттю "подібності" зображень з точки зору людського сприйняття.

Означення 1. Послідовність вкладених один в одний замкнених підпросторів

$$\ldots\subset V^{-1}\subset V^{-0}\subset V^1\subset V^2\subset\ldots \tag{1}$$

простору $L^2(R)$ називають його короткомасштабним аналізом ('multiresolution analysis'), якщо виконуються такі умови:

$a)\ \overline{\bigcup_{j\in Z} V^j}=L^2(R);$

$b)\ \bigcap_{j\in z} V^j=\{0\};$

$c)\ f(x)\in V^j \Leftrightarrow f(2x)\in V^{j+1};$

$d)$ знайдеться така функція $\varphi\in V^0$, що множина її зсувів $\{\varphi(x-n)\}_{n\in Z}$ утворює ортонормований базис простору V^0.

В цьому випадку φ називають маштабуючою функцією ('scaliny function').

Власне умова $c)$ пояснює походження терміну "короткомаштабний". Дійсно, якщо включення (1) стверджують про те, що послідовність просторів V^j розширюється при збільшенні j, то умова $c)$ пояснює, яким чином це відбувається. А саме, кожний наступний простір є "ширшим у 2 рази" від попереднього. Тобто з (1) маємо: $f\in V^j \Rightarrow f\in V^{j+1}$, проте з $c)$ випливає, що разом з $f(x)$ в простір V^{j+1} входить і функція $f(2x)$. Таким чином, проекції простору $L^2(R)$ на підпростори V^j можна порівняти з його дослідженням за допомогою системи збільшуючих лінз, кожна з яких відрізняється від попередньої, силою свого збільшення у два рази.

Нарешті, властивість $d)$ разом з $c)$ дозволяє зробити висновок про те, що для будь-якого $j\in z$ функції $\varphi_k^j(x)=2^{j/2}\varphi(2^j x-k),\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots$ утворюють ортонормований базис в V^j. Тут поява нормуючого множника $2^{j/2}$ пояснюється тим, що, при заміні $x\to 2x$, норма функції зменшується в $\sqrt{2}$ разів, що необхідно компенсувати.

Таким чином, для того, щоб задати кратномасштабний аналіз $L^2(R)$, досить знати хоча б один простір V^j, який, в свою чергу, визначається маштабуючою функцією φ. Отже, оскільки $V^0\subset V^1$, то функція φ є лінійною комбінацією функцій $\{\varphi_n^1$, тобто знайдуться коефіцієнти $\{h_n\}_{n\in z}$, при яких буде виконуватись рівність:

$$\varphi(x)=\sqrt{2}\sum_{n\in z}h_n\varphi(2x-n), \tag{2}$$

яку називають масштабуючим рівнянням.

Тоді, переходячи в (2) до перетворення Фур'є, одержимо:

$$\hat{\varphi}(w)=m_0(w/2)\hat{\varphi}(w/2),$$

де

$$\hat{\varphi}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-ix\omega} dx,$$

$$m_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in Z} h_n e^{-in\omega}.$$

Таким чином, функція φ повністю визначається 2π – періодичною функцією m_0, яка, в свою чергу, згідно з умовою ортонормованості функцій $\{\varphi(. - n)\}$;

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cdot \varphi(x-n) dx = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases},$$

є розв'язком такого рівняння:

$$|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 = 1$$

Будемо знаходити таким чином.

Означення 2. Простором сплесків W^i називають ортогональне доповнення простору V^j до V^{j+1}, тобто:

$$V^{j+1} = V^j \oplus W^j, j \in Z.$$

Отже, переходячи до рекурсії в попередньому співвідношенні, одержимо:

$$V^{j+1} = \bigoplus_{k=-\infty}^{j} W^k.$$

Або, з урахуванням умови $a)$ в означенні 1:

$$L^2(R) = \overline{\bigoplus_{k=-\infty}^{j} W^k}.$$

Таким чином, наближення будь-якої функції $f \in L^2(R)$ можна одержати через її проекції на простори сплесків W^k. Як було зазначено вище, основна проблема полягає в побудові такої функції Ψ^k, чиї зсуви $\{\Psi^k(\cdot - n)$ утворюють ортогональний базис в W^k.

Означення 3. Сплеском називають функцію $\Psi \in L^2(R)$, чиї зсуви утворюють базис в W^0. Власне термін "сплеск" є вільним перекладом англійського слова wavelet, яке буквально перекладається як "мала хвилька". Як показано в роботі І.Добеші [1], будь-який сплеск однозначно визначається через маштабуючу функцію φ за правилом:

$$\Psi(x) = \sqrt{2} \sum_{n \in Z} (-1)^{1-n} \overline{h}_{1-n} \varphi(2x - n),$$

або в термінах перетворення Фур'є:

$$\hat{\Psi}(\omega) = e^{j\omega/2} \overline{m_0(\omega/2 + \pi)} \hat{\varphi}(\omega/2) = m_1(\omega/2) \hat{\varphi}(\omega/2),$$

де m_1 задовольняє співвідношення:

$$m_1(\omega) \overline{m_0(\omega)} + m_1(\omega + \pi) \overline{m_0(\omega + \pi)} = 0$$

Тепер перейдемо до процедури розкладення довільної функції $f \in L^2(R)$ за базисом сплесків. Традиційно першим наближенням називають проекцію (ортогональну) функції f на простір V^0, тобто:

$$\bar{f} = \sum_{n \in Z} c_n^0 \varphi_n^0(x) = \sum_{n \in Z} c_n^0 \varphi(x - n), \tag{3}$$

де

$$c_n^0 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{\varphi(x-n)} dx.$$

Проте на практиці, як правило, функція f відома лише сукупністю своїх значень $\{f_n\}_{n \in Z}$ на деякій системі точок. Тому в більшості випадків допустимим способом проектування на простір V^0 є такий, при якому проектор (3) задається правилом $c_n^0 = f_n$ для всіх $n \in Z$. Далі, використовуючи розкладення $V^{-1} \oplus W^{-1} = V^0$, подання (3) можна записати у вигляді:

$$\sum_{n\in Z} c_n^{-1}\varphi_n^{-1}(x) + \sum_{n\in Z} d_n^{-1}\Psi_n^{-1}(x) = \sum_{n\in Z} c_n^0\varphi_n^0(x),$$

де позначено: $\Psi_n^j(x) = 2^{j/2}\Psi(2^j x - n)$.

Звідси одержуємо:

$$c_k^{-1} = \sum_{n\in Z} c_n^0 \overline{h_{n-2k}},$$

$$d_k^{-1} = \sum_{n\in Z} c_n^0 \overline{g_{n-2k}},$$

де $g_n = (-1)^{1-n}\overline{h_{1-n}}$.

Таким чином, продовжуючи процес розкладення простору V^0 в ортогональну суму

$$V^0 = W^{-1} \oplus W^{-2} \oplus \ldots \oplus W^{-k} \oplus V^{-k},$$

одержимо такі співвідношення для визначення коефіцієнтів розкладання $\{d_n^j\}$, $\{c_n^{-k}\}$, $j = -1,-2,\ldots/-k,\ \ n \in Z$:

$$\left.\begin{aligned} C_k^j &= \sum_{n\in Z} C_n^{j+1}\overline{h_{n-2k}} \\ d_k^j &= \sum_{n\in Z} C_n^{j+1}\overline{g_{n-2k}} \end{aligned}\right\}. \tag{4}$$

Зауважимо, що, з інженерної точки зору, формули можна тлумачити як згортку двох цифрових фільтрів. Крім того, існує така формула реконаруції сигналу за коефіцієнтами його розкладення в базисі сплесків:

$$c_k^{j+1} = \sum_{n\in Z} c_n^j h_{k-2n} + \sum_{n\in Z} d_n^j g_{k-2n}\ . \tag{5}$$

Притаманною рисою співвідношень (4) и (5), які в літературі називають каскадним алгоритмом, є "мінімальність" арифметичних затрат на формування коефіцієнтів сплеск-перетворення. Докладніше про це зазначено в монографії [2].

Разом з тим, найбільш значним імпульсом у розвитку всієї теорії сплесків стала поява в 1988 р. [3] ортогональних базисів сплесків з компактними носіями. Власне властивість компактності носіїв сплесків еквівалентна тому, що лише скінченна кількість коефіцієнтів $\{h_n\}$ в розкладенні

$$\varphi(x) = \sum_{n\in Z} h_n \varphi(2x - n)$$

є відмінною від нуля (хоча, відповідно до рівності Парсеваля, повинна виконуватися умова: $\sum_{n\in Z} |h_n|^2 = 1$.

За цієї причини функцію $m_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n\in Z} h_n e^{-in\omega}$ називають тригонометричним поліномом.

В результаті алгоритми декомпозиції (4) та реконструкції (5) функцій сигналів $f(x)$ за базисами сплесків, можуть бути реалізованими у вигляді дискретних згорток числових послідовностей, які мають лише скінчену кількість ненульових коефіцієнтів. Такі згортки в радіотехніці називаються фільтрами зі скінченною імпульсною характеристикою, або СКІХ-фільтрами. Проте розв'язок рівняння

$$|m_o(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 = 1,$$

який породжує базис сплесків, в загальному випадку є неоднозначним. В зв'язку з цим І.Добеші зупинила свій вибір лише на тих розв'язках, які гарантуються лемою Ріса, а, отже, є тригонометричними поліномами. Варто зауважити, що в сплесках І.Добеші характерним є мінімальність розміру їх носіїв. Завдяки цьому побудова таких сплесків стає однозначною, тобто вони є оптимальними в зазначеному сенсі. Проте виникає закономірне запитання: чи можлива параметризація сплесків Добеші? Зрозуміло, що лише у випадку позитивної відповіді на це запитання, можна розраховувати на розумну формалізацію задачі пошуку адаптивних (кращих) базисів сплесків.

Перш ніж перейти до аналізу поставленої проблеми, зауважимо, що практична реалізація сплеск-перетворень в задачах стиску зображень показала доцільність використання не ортогональних базисів сплесків, а пар біортогональних базисів $\left\{\Psi(x), \tilde{\Psi}(x)\right\}$. Тобто задача полягає в пошуку пар функцій $\left\{\Psi(t), \tilde{\Psi}(t)\right\}$, кожна з яких має компактний носій, система її зсувів та розтягань породжує базис і при цьому виконується умова:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x-k)\tilde{\Psi}(x-n)dx = \delta_{nk} = \begin{cases} 1, \text{ при } n = k \\ 0, \text{ - інакше.} \end{cases}$$

Зрозуміло, що з наведеною парою сплесків пов'язана відповідна до них пара маштабуючих функцій $\left\{\varphi(x), \tilde{\varphi}(x)\right\}$, перетворення Фур'є для яких, згідно з ідеологією кратномаштабного аналізу $L^2(R)$, задовольняють умови:

$$\hat{\varphi}(\omega) = m_0(\omega/2)\hat{\varphi}(\omega/2),$$
$$\hat{\tilde{\varphi}}(\omega) = \tilde{m}_0(\omega/2)\hat{\tilde{\varphi}}(\omega/2),$$

де

$$m_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in Z} h_n e^{-in\omega}, \qquad \tilde{m}_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in Z} \tilde{h}_n e^{-in\omega}; \tag{6}$$

і при цьому:

$$m_0(\omega)\overline{\tilde{m}_0(\omega)} + m_0(\omega+\pi)\overline{\tilde{m}_0(\omega+\pi)} = 1. \tag{7}$$

В даному випадку існує такий зв'язок функцій $\left\{\Psi, \tilde{\Psi}\right\}$ та $\left\{\varphi, \tilde{\varphi}\right\}$:

$$\hat{\Psi}(\omega) = m_1(\omega/2)\hat{\varphi}(\omega/2), \quad \hat{\tilde{\Psi}}(\omega) = \tilde{m}_1(\omega/2)\hat{\tilde{\varphi}}(\omega/2), \tag{8}$$

де

$$\left.\begin{aligned} m_1(\omega)\overline{\tilde{m}_0(\omega)} + m_1(\omega+\pi)\overline{\tilde{m}_0(\omega+\pi)} = 0 \\ \tilde{m}_1(\omega)\overline{m_0(\omega)} + \tilde{m}_1(\omega+\pi)\overline{m_0(\omega+\pi)} = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{9}$$

Звідси зрозуміло, що

$$\left.\begin{aligned} m_1(\omega) = e^{-i\omega}\overline{\tilde{m}_0(\omega+\pi)} \\ \tilde{m}_1(\omega) = e^{-i\omega}\overline{m_0(\omega+\pi)} \end{aligned}\right\}. \tag{10}$$

Отже, приймаючи до уваги властивості (7) та (9), наведені співвідношення можна переписати в матричному вигляді:

$$\begin{bmatrix} m_0(\omega) & m_0(\omega+\pi) \\ m_1(\omega) & m_1(\omega+\pi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{m}_0(\omega) & \tilde{m}_0(\omega+\pi) \\ \tilde{m}_1(\omega) & \tilde{m}_1(\omega+\pi) \end{bmatrix}^* = 1, \tag{11}$$

де через (*) позначено операцію матричного комплексного спряження, тобто $A^* = \overline{A^T}$.

Таким чином, рівняння (11) є необхідною (проте не достатньою) умовою того, що функції $\left\{m_0, \tilde{m}_0\right\}$ породжують пару маштабуючих біортогональних функцій $\left\{\varphi, \tilde{\varphi}\right\}$ з компактними носіями.

Припустимо, що біортогональні сплески допускають параметризацію. Нехай $\alpha(\omega)$ – довільне, π – періодичне розподілення. Тоді співвідношення (11), через лінійну залежність $\left\{\varphi, \tilde{\varphi}\right\}$ від $\left\{m_0, \tilde{m}_0\right\}$ набуває вигляду:

$$\begin{bmatrix} m_0(\omega) & m_0(\omega+\pi) \\ m_1(\omega)\alpha(\omega) & m_1(\omega+\pi)\alpha(\omega) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{m}_0(\omega) & \tilde{m}_0(\omega+\pi) \\ \tilde{m}_1(\omega)/\overline{\alpha(\omega)} & \tilde{m}_1(\omega+\pi)/\overline{\alpha(\omega)} \end{bmatrix}^* = 1. \tag{12}$$

Згідно з концепцією І.Добеші, розвиток рівняння (12) необхідно шукати в класі тригонометричних поліномів. Отже припустимо, що m_0 та $\tilde{m}_0$ – поліноми. Тоді функції m_1 і $\tilde{m}_1$ є також поліноміальними. Нехай $\alpha(\omega)$ – π - періодичний поліном, тобто будемо вважати, що $\alpha(\omega) \neq 1$. Тоді елементи першої з матриць в (12) є поліноміальними. Отже, друга матриця, через (12), також повинна бути поліноміальною. Проте це можливо лише в таких випадках:

1) $\alpha(\omega) = e^{i2k\omega}, k \in Z$;

2) нулі полінома $\alpha(\omega)$ є нулями полінома $\tilde{m}$.

Розглянемо перший випадок. Якщо $\alpha(\omega) = e^{i2k\omega}$ при деякому $k \in Z$, то породжений в результаті базис у просторі сплесків буде співпадати з аналогічним базисом при $\alpha(\omega) \equiv 1$ з точністю до зсуву його елементів на 2, тобто новий базис є перенумерованим старим. Таким чином, біортогональна пара СКІХ-фільтрів при такій параметризації залишається незмінною.

Розглянемо другий випадок. Нехай $\alpha(\omega)$ – невироджений поліном, нулі якого є нулями функції $\tilde{m}_1(\omega)$. Тоді $\tilde{m}_1/\overline{\alpha}$ – поліноміальна функція. Через те, що α є π-періодичною функцією, то поліном $\tilde{m}_1(\omega+\pi)$ теж має нулі саме в тих точках, де $\alpha(\omega)=0$. Таким чином знайдеться точка ω_0, в якій вектор $\left[\tilde{m}_1(\omega_0); \tilde{m}_1(\omega_0+\pi)\right]^T$ стане нульовим. Отже другий співмножник у (12) є виродженою матрицею при $\omega = \omega_0$. Це означає неможливість виконання тотожності (12) в цій точці. До того ж, оскільки всі компоненти вказаної матриці – суть неперервні функції, то властивість виродженості, а також і порушення умови (12), буде не тільки в точці ω_0, але й і в деякому її околі. Це означає, що існування поліноміальних розв'язків в (12) і, що еквівалентно, – біортогональних СКІХ-фільтрів, неможливе.

Таким чином, розв'язання проблем вибору «оптимальної» пари біортогональних базисів сплесків можливе лише через реалізацію процедури цілеспрямованого перебору на множині вже існуючих біортогональних СКІХ-фільтрів. Проте "цілеспрямованість" такого перебору вимагає наявності певних показників якості, за якими було б можливим оцінити кожну з біортогональних пар сплесків. Отже мова йде про необхідність конструювання таких функціоналів на множині пар біортогональних фільтрів, екстремальні значення яких відповідали б такій характеристиці, як "найбільша подібність" зображень з точки зору людського сприйняття.

Як випливає з каскадного алгоритму визначення коефіцієнтів розкладання сигналу зображення f за базисом сплесків, на першому кроці коефіцієнти $\{C_n^0\}_{n\in Z}$ визначаються за правилом (3):

$$c_n^0 = f_n = f(t_n), n \in Z \quad . \tag{13}$$

Зрозуміло, що визначені таким чином коефіцієнти $\{c_n^0\}_{n\in Z}$, вже вносять похибку в побудову проекції функції $f \in L^2(R)$ на підпростір V^0. У зв'язку з цим реконструкція сигналу (тобто його обернене сплеск-перетворення) за одержаними коефіцієнтами розкладання $\{C_n^{-k}\}_{n\in Z}, \{d_n^j\}_{n\in Z}, j=-1, -2,..., -k$ буде відрізнятися від оригіналу, що призведе до певного "спотворення" вихідного зображення. Зрозуміло, що самим простим, в ідейному відношенні, та безперечним, з точки зору теорії апроксимації, є вибір коефіцієнтів $\{c_n^0\}_{n\in Z}$ у вигляді відповідних координат ортогональної проекції функції $f(t)$ на підпростір V^0, тобто:

$$c_n^0 = (f, \varphi_n^0)_{L^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{\varphi(x-n)}\,dx.$$

Проте наведене правило передбачає виконання досить нетривіальної, з точки зору цифрової обробки сигналів, операції інтегрування. Тому, повертаючись до традиційного правила (13), зауважимо, що спектр (тобто перетворення Фур'є) такої проекції $\tilde{f}$ сигналу f на підпростір ^{0} має такий вигляд:

$$\hat{\tilde{f}}(\omega)=\hat{\varphi}(\omega)\sum_{n\in Z}\hat{f}(\omega+2\pi n).$$

Звідси зрозуміло, що ця проекція $\tilde{f}(t)$ адекватно наближуватиме вихідну функцію $f(t)$ за таких умов: а) її спектр, сконцентрований на відрізку $[-\pi;\pi]$; б) масштабуюча функція φ близька на цьому відрізку до одиниці і швидко прямує до нуля поза ним. В результаті, приймаючи до уваги наведене зауваження, будь-якій парі функцій $(\varphi,\hat{\varphi})$, які породжують біортогональні сплески, можна поставити у відповідність таку векторну оцінку:

$$\left[L^2(R)\right]^2 \ni \begin{bmatrix}\varphi\\ \tilde{\varphi}\end{bmatrix} \xrightarrow{Q} \begin{bmatrix}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1-\hat{\varphi}(\omega)\right)^2 d\omega\\ \int_{-\pi}^{\pi}\left(1-\hat{\tilde{\varphi}}(\omega)\right)^2 d\omega\end{bmatrix} \in R^2. \tag{14}$$

Таким чином, відображення (14) являє собою векторний показник якості на множині біортогональних пар сплесків.

Для того, щоб означити задачу векторної оптимізації з показниками типу (14), введемо на "критеріальному просторі" R^2 таке бінарне відношення:

$$\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\end{bmatrix}\mathrm{K}\begin{bmatrix}x_2\\ y_2\end{bmatrix} \Leftrightarrow L(x_1,y_1)<L(x_2,y_2),$$

де позначено $L(x,y)=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y.$

Легко помітити, що задане таким чином бінарне відношення $\langle K,R^2\rangle$ є антирефлексивним, асиметричним та транзитивним, тобто K – відношення строгого порядку на R^2. Більш того, K є λ – відокремленим бінарним відношенням з вектором $\lambda=\left[2/3;1/3\right]^T$.

Нехай Ξ – задана множина біортогональних пар сплесків $\left(\Xi=\left\{(\varphi;\tilde{\varphi})\in L^2(R)\times L^2(R)\right\}\right)$, $\Omega\subset R^2$ – її образ в критеріальному просторі під дією відображення (14), тобто:

$$\Omega=Q(\Xi)$$

Означення 4. Задачею векторної оптимізації будемо називати таку трійку об'єктів: $\langle\Xi,Q,\mathrm{K}\rangle$.

Означення 5. Ефективним розв'язком задачі векторної оптимізації $\langle\Xi,Q,\mathrm{K}\rangle$ будемо називати пару функцій $(\varphi_*,\tilde{\varphi}_*)\in\Xi$, для яких виконується умова: не існує іншої пари $(\varphi,\tilde{\varphi})\in\Xi$, що

$$Q(\varphi,\tilde{\varphi})KQ(\varphi_*,\tilde{\varphi}_*).$$

Таким чином, розв'язання задачі $\langle\Xi,Q,\mathrm{K}\rangle$ зводиться до побудови прообразу в Ξ множини K – мажорант Ω^K:

$$\Omega^K=\left\{\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}\in\Omega \,\middle|\, K^+\left(\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}\right)\neq\varnothing\right\},$$

де через $K^+\left(\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}\right)$ позначено верхній перетин бінарного відношення K на парі $(a;b)\in R^2$, тобто:

$$\mathrm{K}^+=\left(\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}\right)=\left\{\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\in\Omega\,\middle|\,\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\mathrm{K}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}\right\}.$$

Зауважимо, що, приймаючи до уваги означення бінарного відношення K на множині значень показників якості та його властивості, в основу формування множини ефективних розв'язків поставленої задачі векторної оптимізації можна покласти такий результат.

Лема 1.

$$\operatorname{Arg}\min_{z=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\in\Omega} L(z)\subseteq\Omega^K.$$

Доведення проведемо від оберненого. Нехай знайдеться пара $z^* = \begin{bmatrix} a^* \\ b^* \end{bmatrix} \in \Omega$ така, що

$$z^* \in \operatorname{Arg}\min_{z=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \Omega} L(z), \text{ проте } z^* \notin \Omega^K.$$

Оскільки $z^* \notin \Omega^K$, то знайдеться вектор $z^0 \in \Omega$ такий, що $z^0 \mathrm{K} z^*$. Отже, за означенням відношення K, одержимо:

$$z^0 K z^* \Rightarrow L(z^0) < L(z^*),$$

тобто $z^* \notin \operatorname{Arg}\min_{z \in \Omega} L(z)$, що суперечить вихідному припущенню. Отже, лема доведена.

Перш, ніж навести результати розв'язання поставленої задачі векторної оптимізації на множині Ξ біортогональних пар сплесків І.Добеші довжиною не більше 28, зауважимо таке: вагові коефіцієнти $2/3$ та $1/3$ в означенні бінарного відношення були вибрані виходячи з тих міркувань, що в задачах кодування зображень більшу увагу слід приділяти відтворенню низькочастотних складових, за які відповідає функція φ, і дещо менший акцент слід переносити на кодування високих частот (функція $\tilde{\varphi}^*$). Виходячи з наведеного, кращі оцінки якості серед фільтрів Добеші непарної довжини, які були одержані в середовищі MatLab V, підсумовані в таблиці.

Таблиця

Тип фільтра	Коефіцієнти фільтра							Значення фікціоналу L
	h_0	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	
CDF35	0,707107	0,353553						5,25
	1,06066	0,353553	-0,176777					
CDF39	0,707107	0,353553						5,37
	0,994369	0,419845	-0,176777	-0,176777	-0,066291	0,0331456		
CDF313	0,707107	0,353553						5,42
	0,966748	0,447466	-0,169871	-0,107723	0,469563	0,138107	-0,006905	
CDF79 загально визнаний лідер в задачах стиску інформації	0,788486	0,418092	-0,040689	-0,06445				5,79
	0,852698	0,377403	-0,110624	-0,023849	0,037828			

Тут $\{h_n\}_{n \in Z}$ – коефіцієнти в розкладанні (2). Зазначимо, що у відповідності до (2), масштабуюча функція $\varphi \in L^2(R)$ однозначно визначається через функцію $m_0(\omega)$, для якої справедливе подання:

$$m_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in Z} h_n e^{-in\omega}.$$

Отже, за результатами розрахунків, які наведені в таблиці, ефективним розв'язком задачі векторної оптимізації на множині біортогональних фільтрів Добеші непарної довжини є фільтр CDF35, породжуючі фукції $m_0(\omega)$ та $\tilde{m}_0(\omega)$ якого мають такий вигляд:

$$m_0(\omega) = 0{,}353553 e^{i\omega} + 0{,}707107 + 0{,}353553 e^{-i\omega},$$

$$\tilde{m}_0(\omega) = -0{,}176777 e^{2i\omega} + 0{,}353553 e^{i\omega} + 1{,}06066 + 0{,}353553 e^{-i\omega} - 0{,}176777 e^{-2i\omega}.$$

До того ж результати експериментальних досліджень показують, що для повнокольорових статичних зображень CIF-формату використання CDF35-фільтрів дає найбільші значення PSNR-характеристик, які є визнаним показником оцінки якості фотографічних зображень.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Daubechis I.* Ten lectures on wavelets. – Philadelphia: SIAM, 1992.
2. *Петухов А.П.* Введение в теорию базисов всплесков. – Санкт-Петербург: Издательство СПбГТУ, 1999.
3. *Daubechis I.* Ortogonal basis of compactly supported wavelets // Comm. Pure Appl. Math. – 1988. – V41. – P. 909–996.
4. *Meyer Y.* Wavelets and operators. – Cambrige University Press, 1992.
5. *Strang G.*, *Nguyen T.* Wavelets and Filter Banks, 1996.
6. *Дремин И.М.*, *Иванов О.В.*, *Нечитайло В.А.* Вейвлеты и их использование // Усп. физ. наук. – 2001. – Т.171. – № 5 – С. 465–497.
7. *Mallat S.* Multiresolution approximations and wavelets orthonormal bases of $L^2(R)$ // Trans. of Amer. Math. Soc. – V.315. – 1989. – P. 69–87.

КОГУТ Петро Ілліч – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри прикладної математики Дніпропетровського державного технічного університету залізничного транспорту.

Наукові інтереси:
- варіаційне числення та теорія оптимального керування;
- спектральний аналіз і його застосування.

ПОВІДАЙКО Петро Михайлович – кандидат технічних наук, професор кафедри автоматизованого управління в технічних системах Житомирського інженерно-технологічного інституту, декан факультету інформаційно-комп'ютерних технологій.

Наукові інтереси:
- спектральний аналіз і його застосування.

Подано 04.04.2002