УДК 62-272

В.В. Карачун, д.т.н., проф.
Є.К. Кундеревич, к.т.н., доц.
Д.Махмут, стажер
В.М. Мельник, к.т.н., доц.
Національний технічний університет України "КПІ"

ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ПРУЖНОГО ПІДВІСУ НА БАЗІ ПЛОСКИХ ЕЛЕМЕНТІВ. ОДНОВИМІРНА ЗАДАЧА

Наведено методику розрахунку геометричних параметрів пружного підвісу, побудованого на вертикально розташованих плоских пружинах за схемою оберненого маятника. Підвіс задовольняє наперед заданим вимогам щодо власної частоти, амплітуди коливань рухомої частини, стійкості (за Ейлером) форми плоских пружин та їх міцності.

Завдяки конструктивній простоті пружний підвіс на вертикально розташованих плоских пружинах широко застосовується у вимірювальних приладах та в системах відтворення поступальної вібрації [1]. Практична відсутність відносного кутового повороту елементів, які з'єднуються плоскими пружинами, а також можливість отримання порівняно низької власної частоти роблять його перспективним з точки зору використання для віброзахисту навігаційного обладнання від горизонтальної низькочастотної вібрації. На даний час не існує методики інженерного розрахунку геометричних параметрів пружного підвісу з вертикально розташованими плоскими пружинами, які б з урахуванням збереження стійкості та міцності пружин і з урахуванням параметрів вібраційного збурення (амплітуди, частотного діапазону тощо) забезпечили наперед задані його характеристики щодо власної частоти та найбільшої можливої амплітуди коливань.

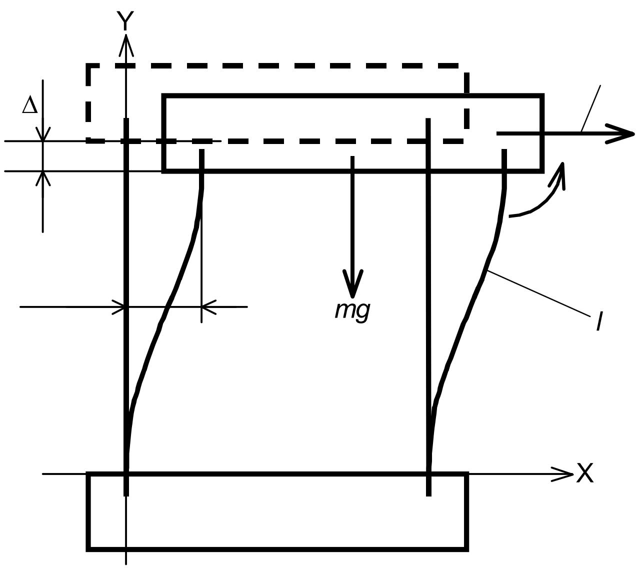

Рис. 1

Розрахункова схема такого підвісу, який при певному виборі параметрів забезпечує малу власну частоту коливань рухомого тіла масою m відносно нерухомої основи вздовж вісі X, зображена на рис. 1. На кінець кожної з пружин діє поперечна P і поздовжня $Q = mg/n$ сили (n – кількість пружин) та момент сил $M = 0{,}5Qx_a + 0{,}5P(l - \Delta)$, де l – робоча довжина пружини; x_a і Δ – переміщення рухомого тіла відносно основи вздовж вісі X та Y відповідно. За умови $x_a < 0{,}1l$ ($\Delta < 0{,}01\ l$) для визначення форми пружної лінії пружини скористаємось її спрощеним рівнянням [2], яке у відносних координатах, приведених до робочої довжини пружини, прийме вигляд:

$$\frac{d^2\lambda}{d\delta^2} = -k^2\lambda + \frac{1}{2}k^2[\lambda_a + \gamma] - k^2\gamma\delta \,, \qquad (1)$$

де $\lambda = x/l$, $\lambda_a = x_a/l$, $\delta = y/l$, $k^2 = Q/EI$, $\gamma = P/Q$, x і y − координати поточного перетину пружини; E − модуль пружності матеріалу пружини; I − момент інерції поперечного перетину пружини. Маса рухомого тіла не може перевищувати граничного значення $m_{гр}$, яке визначається умовою стійкості прямолінійної форми пружини за Ейлером [3] і яка у відносних координатах приймає вигляд:

$$\frac{m_{гр}\, g}{n} < \pi^2 EI \,. \qquad (2)$$

Граничній масі відповідає граничне значення коефіцієнта k:

$$k_{гр}^2 = \frac{1}{EI}\cdot\frac{m_{гр}\, g}{n} \,,$$

яке з урахуванням (2) дорівнює $k_{гр}^2 = \pi^2$. Позначивши $k/k_{гр}$ через μ, отримаємо:

$$k = \mu\pi \,. \qquad (3)$$

З фізичної точки зору, μ^2 є відношенням дійсної та граничної мас рухомого тіла $\mu^2 = m/m_{гр}$.

Враховуючи (3), рівняння (1) прийме вигляд:

$$\frac{d^2\lambda}{d\delta^2} + \mu^2\pi^2\lambda = \frac{1}{2}\mu^2\pi^2(\lambda_a + \gamma) - \mu^2\pi^2\gamma\delta \,,$$

рішення якого визначається як

$$\lambda = \gamma\left(\frac{\sin\mu\pi\delta}{\mu\pi} - \delta\right) + \frac{1}{2}(\lambda_a + \gamma)(1 - \cos\mu\pi\delta) \,.$$

При $\delta = 1$ справедливо $\lambda = \lambda_a$, звідки

$$\lambda_a = \gamma\left(\frac{2}{\mu\pi}\operatorname{tg}\mu\frac{\pi}{2} - 1\right) .$$

Скориставшись співвідношенням між поперечною та поздовжньою силами, знайдемо власну кутову частоту підвісу $\omega_о$ на n пружинах:

$$\omega_о = \sqrt{\varepsilon}\cdot\sqrt{\frac{g}{l}} \,, \qquad (4)$$

де

$$\varepsilon = \frac{1}{\frac{2}{\mu\pi}\operatorname{tg}\mu\frac{\pi}{2} - 1} \,, \qquad (4)$$

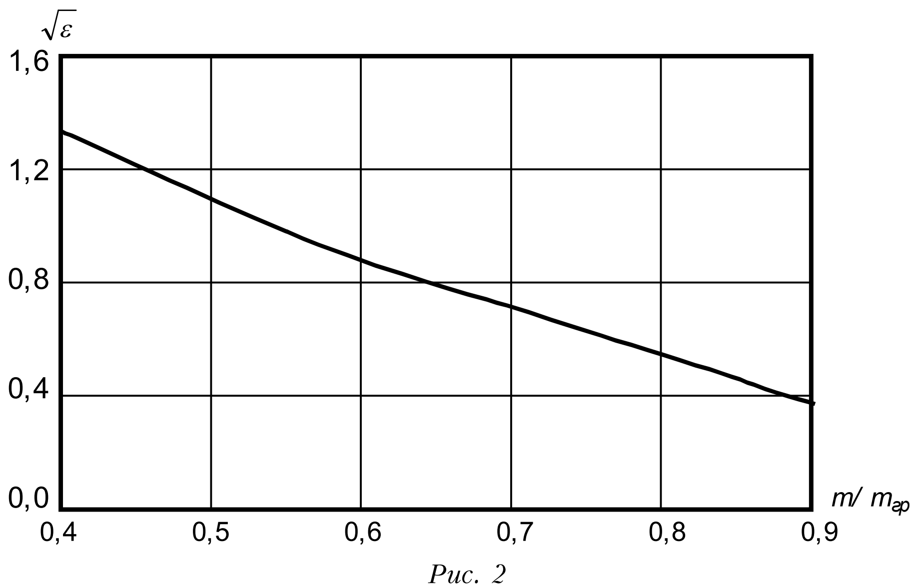

Рис. 2

Таким чином, при обраному відношенні $m/m_{гр}$ власна частота підвісу не залежить від матеріалу пружини і з точністю до $\sqrt{\varepsilon}$ дорівнює власній частоті математичного маятника такої ж довжини, що і довжина пружини. Співвідношення між власною частотою математичного маятника та підвісу суттєво залежить від співвідношення між дійсною та граничною масами рухомого тіла, тобто коефіцієнта ε (залежність $\sqrt{\varepsilon} = f(m/m_{гр})$ представлена на рис. 2). При $\varepsilon = 1$ частота підвісу дорівнює частоті математичного маятника; при $\varepsilon > 1$ власна частота підвісу перевищує частоту математичного маятника, а при $\varepsilon < 1$ – частота математичного маятника перевищує власну частоту підвісу. Значення $m/m_{гр}$, що відповідає $\varepsilon = 1$ становить $m/m_{гр} \approx 0{,}55$. Для отримання низької власної частоти підвісу необхідно забезпечити близькість дійсної маси рухомого тіла та граничної. При цьому власна частота підвісу прагне до нуля, тобто коливальна система наближається до границі стійкості. На практиці реальні значення $m/m_{гр}$ визначаються конструкцією та технологією виготовлення підвісу, стабільністю умов його експлуатації та стабільністю параметрів пружних елементів.

З огляду на сказане вище, можна рекомендувати такий порядок розрахунку геометричних розмірів пружин підвісу, які забезпечують його бажану власну частоту і найбільшу можливу амплітуду коливань рухомого тіла за умови збереження міцності пружини і стійкості її форми.

1. Основними заданими параметрами пружної системи, що обумовлені її призначенням і бажаними технічними характеристиками, є:

а) маса рухомого тіла – m;

б) власна частота коливань – ω_0 (чи f_0);

в) найбільша можлива амплітуда коливань рухомого тіла – x_a.

2. Крім наведених параметрів, необхідно, виходячи з конструктивних, експлуатаційних та інших вимог, задатися:

а) кількістю пружин – n;

б) граничною масою рухомого тіла – $m_{гр}$;

в) матеріалом пружин.

3. У відповідності до формули (4) та розрахованого за формулою (5) значення ε, знаходимо робочу довжину пружин l:

$$l = \frac{g\varepsilon}{\omega_0^2}.$$

4. Визначаємо найбільше нормальне напруження в перетині пружини – $\sigma_n^{\max}$

$$\sigma_n^{\max} = \frac{m}{nbh}[3\frac{x_a}{h}(g + \omega^2 l) + g], \tag{6}$$

де b і h – ширина та товщина пружини. Умовою її міцності є така нерівність:

$$\left[\sigma_{зг}^{цкл}\right] \geq \sigma_n^{\max}, \tag{7}$$

де $\left[\sigma_{зг}^{цкл}\right]$ – допустиме нормальне напруження при згині при циклічному навантаженні. Скориставшись (6) та (7), знаходимо співвідношення між шириною та товщиною пружини, яке забезпечує її міцність:

$$b \geq \frac{1}{\left[\sigma_{зг}^{цкл}\right]}\frac{m}{nh}[3\frac{x_a}{h}(g + \omega_0^2 l) + g]. \tag{8}$$

З іншого боку, співвідношення між її шириною та товщиною, яке забезпечує стійкість форми пружини за Ейлером в площині XY, визначається формулою:

$$\frac{mg}{\mu^2 n} \leq \frac{\pi^2}{l^2} E \frac{bh^3}{12}. \tag{9}$$

5. В результаті спільного рішення (8) і (9) отримаємо квадратне рівняння відносно h:

$$gh^2 + 3x_a(g + \omega^2 l) - 12\frac{\left[\sigma_{зг}^{цкл}\right]}{E}\frac{l^2}{\pi^2}\frac{g}{\mu^2} \geq 0,$$

коренем якого, прийнятним з фізичної точки зору, є:

$$h \geq \frac{-3x_a(g+\omega^2 l)+\sqrt{9x_a^2(g+\omega^2 l)^2+48\frac{[\sigma_{зг}^{цкл}]}{E}\frac{l^2}{\pi^2}\frac{g^2}{\mu^2}}}{2g}. \tag{10}$$

6. З метою визначення ширини пружини результат розрахунку за формулою (10) треба підставити у формулу (8).

Зауваження I.

Слід зауважити, що наведений алгоритм розрахунку не враховує можливості втрати стійкості форми пружини за Ейлером в перпендикулярному до площини XY напрямку, що може статися, якщо в результаті розрахунку буде отримано $b < h$. Як показали результати практичних розрахунків, умова $b > h$ порушується для малих x_a. В цьому випадку необхідно штучно збільшити найбільшу можливу амплітуду коливань рухомого тіла до значення, коли $b > h$.

Зауваження II.

Наведений пружний підвіс використовується здебільшого для отримання низької власної частоти механічних систем з великою вибірковою здатністю по відношенню до напрямку діючої чи відтворюваної вібрації. Очевидно, що чим більше відношення b/h, тим більшу вибіркову здатність має підвіс. Результати розрахунку є взаємопов'язаними щодо вибіркової здатності підвісу та найбільшої амплітуди коливань рухомого тіла. Це наочно ілюструє залежність власної частоти підвісу в площині, перпендикулярній до XY – $f_{\perp\, xy}$, що представлена на рис. 3 і побудована для f_o = 1 Гц та $m/m_{гр}$ = 0,8. Характер цієї залежності пояснюється тим, що для збільшення бажаної амплітуди коливань рухомого тіла необхідно підвищувати гнучкість плоских пружин, тобто збільшувати відношення b/h.

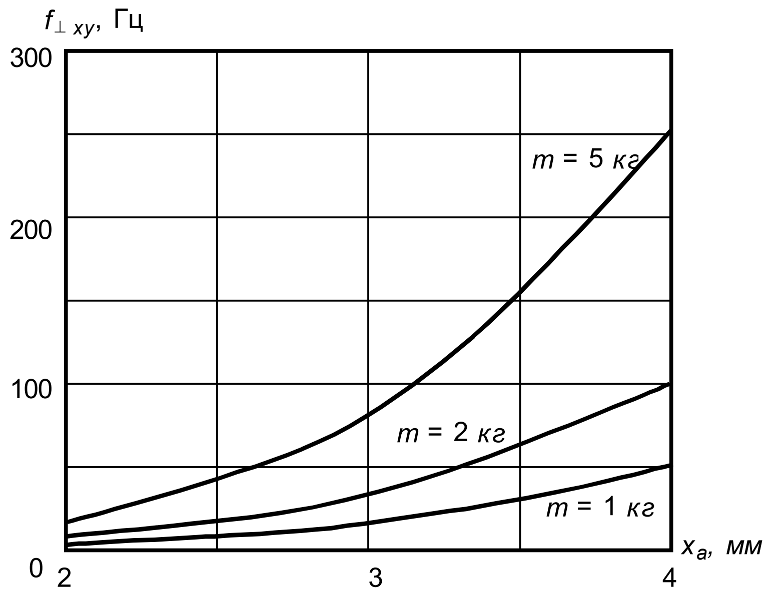

Рис. 3

У випадку, коли заданим є відношення $k = b/h$, а найбільша можлива амплітуда коливань є невідомою, пункти 4–6 наведеної методики розрахунку треба скорегувати. Вони приймають такий вигляд:

1. Товщину пружини визначаємо безпосередньо з умови забезпечення стійкості форми пружини за Ейлером в площині XY:

$$h^2 \geq \frac{2l}{\pi\mu}\sqrt{\frac{3mg}{nEk}}.$$

2. Ширину пружини визначаємо із співвідношення $b = k{\cdot}h$.

3. Найбільшу можливу амплітуду коливань рухомого тіла визначаємо з умови збереження міцності пружини:

$$x_a \le \frac{(\sigma_{зг}^{цкл} - \sqrt{\frac{nEk}{3mg}} \cdot \frac{m\pi\mu}{nkl} g)hnkl}{3(g + \omega^2 l)m\pi\mu} \sqrt{\frac{3mg}{nEk}} .$$

Наведені методики розрахунку можуть бути використані при розробці віброзахисних систем навігаційного обладнання, а також при проектуванні пружних підвісів вимірювачів параметрів механічних коливань або стендів для відтворення вібрації.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Иориш Ю.И.* Виброметрия. – М.: Изд-во машиностроительной литературы, 1963. – 771 с.

2. *Цейтлин Я.М.* Упругие кинематические устройства. – Л.: Машиностроение, 1972. – 296 с.

3. *Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В.* Справочник по сопротивлению материалов. – К.: Наук. думка, 1988. – 736 с.

КАРАЧУН Володимир Володимирович – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри біотехніки та інженерії Національного технічного університету України “КПІ”.

Наукові інтереси:

– динаміка бортової апаратури носіїв.

КУНДЕРЕВИЧ Євген Костянтинович – кандидат технічних наук, доцент кафедри біотехніки та інженерії Національного технічного університету України “КПІ”.

Наукові інтереси:

– віброзахист прецизійного обладнання.

МАХМУТ Дилнар – стажер факультету біотехнології та біотехніки Національного технічного університету України “КПІ”.

Наукові інтереси:

– біомеханіка.

МЕЛЬНИК Вікторія Миколаївна – кандидат технічних наук, доцент кафедри біотехніки та інженерії Національного технічного університету України “КПІ”.

Наукові інтереси:

– динаміка механічних систем носіїв.

Подано 21.02.2002

КарачунВ.В., КундеревичЕ.К., МельникЕ.К., Дилнар М. Определение параметров упругого подвеса на базе плоских элементов. Одномерная задача.

Karachun V.V., Kunderevych Y.K., Melnik V.N., Machmut D. Definition of elastic bracket parameters on the basis of flat elements. One-dimensional task.

Карачун В.В., Кундеревич Є.К., Махмут Д., Мельник В.М. Визначення параметрів пружного підвісу на базі плоских елементів. одновимірна задача

УДК 62-272

Определение параметров упругого подвеса на базе плоских элементов. Одномерная задача / В.В. Карачун, Е.К. Кундеревич, В.Н. Мельник, Д.Махмут

Приведена методика расчёта геометрических параметров упругого подвеса, построенного на вертикально расположенных плоских пружинах по схеме обратного маятника. Подвес удовлетворяет наперёд заданным требованиям относительно собственной частоты, амплитуды колебаний подвижной части, устойчивости формы плоских пружин и их прочности.

УДК 62-272

Definition of elastic bracket parameters on the basis of flat elements. One-dimensional task / V.V. Karachun, Y.K. Kunderevych, V.N. Melnik, D. Machmut

The technique of the computing the elastic bracket geometrical parameters is given. The bracket is constructed on the vertical flat springs according to the scheme of the return pendulum. The bracket satisfies all the given requirements for its own frequency, amplitude of mobile element fluctuations, stability of the form of flat springs and their durability.