МАШИНОЗНАВСТВО

УДК 62.251.755:681.5

О.Ю. Животов, інж.
ДКБ «Південне»

ДИНАМІКА ОБЕРТАННЯ СТАТИЧНО НЕВРІВНОВАЖЕНОГО РОТОРА ЗОНТИЧНОГО ТИПУ З ШАРНІРНОЮ ТА ПРУЖНОЮ ОПОРАМИ

(Представлено д.т.н., проф. І.Г. Грабаром)

Розглянуте обертання в гравітаційному полі статично неврівноваженого ротора зонтичного типу з шарнірною та пружною опорами. Обґрунтована необхідність врахування додаткових крутного та інерційного моментів. Наведені основні рівняння обертання неврівноваженого ротора з врахуванням додаткових крутного та інерційного моментів. Отримані залежності дозволяють визначити на обраній швидкості всі діючі на ротор сили і моменти за величиною і напрямком.

В сучасній ракетно-космічній техніці використовуються гіроскопічні прилади, що призначені для забезпечення стабілізації та наведення ЛА. Одним із найважливіших факторів, що впливають на ефективність роботи гіроприладів, є дисбаланс ротора гіроскопа. Дисбаланс призведе до небажаних вібрацій та впливатиме на прецесію гіроскопа. Наявність вібрації зменшує термін експлуатації, а від прецесії залежить точність приладу. Для оцінки впливу дисбалансу на величину вібрацій та прецесію необхідно виконати додаткові теоретичні дослідження в області динаміки неврівноваженого ротора. Це дозволить більш повно представити фізику процесу, виявити додаткові сили і моменти, що діють на ротор.

Питанню теоретичних досліджень особливостей обертання дискових роторів з різним типом опор присвячена значна кількість наукових праць [1] з використанням рівнянь Лагранжа, складання та рішення яких є трудомістким механічним процесом [2], а також істотно залежить від фізики і вихідних умов досліджуваного складного руху. В [3] викладений підхід до рішення задач обертання роторів за допомогою законів класичної динаміки, що виявив необхідність врахування принаймні двох силових моментів – крутного та інерційного, пов'язаних з розбіжністю центра мас ротора з геометричною віссю.

Однак отримані рівняння в аналітичній формі відносяться до ізотропного твердого ротора з двома пружними опорами, в той час як у техніці, наприклад, в ультрацентрифугах [4], ротор кріпиться вертикально в одній шарнірній та одній пружній опорах.

Нехай твердий ротор (рис. 1) має масу m, екваторіальний момент інерції $I_{ек}$, осьовий момент інерції I_z, закріплений у шарнірній опорі та пружній опорі I з коефіцієнтом жорсткості k і розташований вертикально. Центр мас ротора С знаходиться на відстані l_0 від шарнірної опори, а пружна опора розташована на відстані $l_0 + l_1$ від шарнірної опори.

Статичний дисбаланс ротора заданий зміщенням центра мас С від геометричної осі (точка В) на величину e. У зв'язаній з ротором системі координат OXY центр системи координат О збігається з геометричним центром ротора, вісь Z збігається з геометричною віссю, а вісь X проходить через центр мас ротора. Обертання ротора вважається рівномірним і розглядається в обертовій системі координат O'X'Y'Z', початок якої O' лежить у площині OXY, вісь Z' збігається з віссю обертання, а площини O'X'Y' і O'X'Z' паралельні площинам OXY й OXZ відповідно, тому що кутові відхилення осей Z і Z' вважаємо малими. Зміщенням системи координат OXY в системі координат O'X'Y'Z' уздовж осі Z' нехтуємо, однак кутові відхилення осей Z і Z' враховуємо. Ротор приводиться в обертання приводом, обертальний момент якого передається на ротор через твердий та невагомий вал (на рис. 1 замість вала зображена геометрична вісь). Площиною дії головного вектора дисбалансів є площина OXY.

Приведемо ротор в обертання. Під дією головного вектора дисбалансів і власної ваги ротор відхилиться щодо осі обертання на кут λ, а точка В зміститься щодо точки А на відстань a. В залежності від швидкості, ротор розвернеться щодо геометричної осі на кут α (рис. 2), величина якого лежить в діапазоні від 0 до 180°.

Положення точок А, В, С, в залежності від швидкості, розглядаємо в площині вимірювання, що збігається з площиною O'X'Y'. Для зручності розгляду наведемо жорсткість пружної опори до жорсткості κ_0, що умовно діє в площині виміру:

$$\kappa_0 = \frac{\kappa(\ell_0 + \ell_1)}{\ell_0}.$$

© О.Ю. Животов, 2002

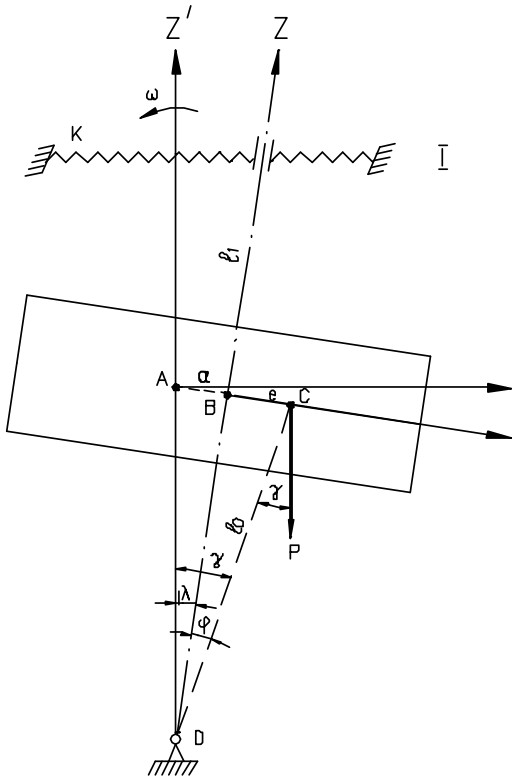

Рис. 1. Ротор зі статичною неврівноваженістю, закріплений у шарнірній та пружній опорах

Розглянемо діючі на ротор сили і моменти.

На ротор діє відцентрова сила $F_ц$:

$$F_ц = m\omega^2 p \sin\varphi .$$

Зміщення центра мас на величину e від геометричної осі призводить до появи сили F_e, що створюється силовим моментом у зв'язку з появою відцентрового моменту інерції ротора:

$$F_e = \frac{A\omega^2 \sin\varphi\cos\varphi}{\ell_0},$$

де $A = I_{ек} - I_z$; φ – кут між геометричною віссю й лінією, що проходить через точку О і центр мас ротора.

Напрямок дії сили F_e збігається з напрямком головного вектора дисбалансів, якщо $A > 0$, і він протилежний, якщо $A < 0$.

В зв'язку зі зміщенням геометричної осі ротора від осі обертання на величину α з'являється сила F_y, що створюється пружною опорою:

$$F_y = \kappa_0 a \cos\lambda .$$

Зміщення ротора від осі обертання призводить до відхилення лінії, що зв'язує опору *D* з центром мас, від осі обертання на на кут γ. Кутове відхилення ротора призводить до появи силового моменту та в зв'язку з виникненням відцентрового моменту інерції діє на плече ℓ_0 і створює силу F_γ:

$$F_\gamma = \frac{A\omega^2 \sin\gamma\cos\gamma}{\ell_0}.$$

Напрямок дії сили F_γ збігається з напрямком дії сили $F_ц$, якщо $A > 0$, і він протилежний, якщо $A < 0$.

Зміщення центра мас на величину ρ від осі обертання призводить до появи складової сили P:

$$F_P = P\sin\gamma.$$

Напрямок дії сили F_P протилежний напрямку дії сили $F_ц$.

Діючі на ротор сили призводять до необхідності прикладання додаткового обертального моменту, щоб підтримати задану швидкість обертання, і виникнення додаткового інерційного моменту M_u, обумовленого розбіжністю точки прикладення сили $F_{кр}$ з геометричним центром ротора (точка В):

$$M_u = m\omega^2 a^2 \cos\gamma + A\omega^2 \frac{a^2}{\rho \cdot \ell_0} \sin\gamma \cos\gamma + P \frac{a^2 \sin\gamma}{\rho}.$$

Відповідно $M_{кр}$ дорівнює:

$$M_{кр} = m\omega^2 a^2 \cos\gamma + A\omega^2 \frac{a^2}{\rho \cdot \ell_0} \sin\gamma \cos\gamma +$$
$$+ \frac{A\omega^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\ell_0} a \sin\alpha + \frac{Pa^2 \sin\gamma}{\rho}.$$

Обертальний момент, діючи на плечі a, створює силу $F_{кр}$:

$$F_{кр} = m\omega^2 a \cos\gamma + \frac{A\omega^2 a}{\rho \cdot \ell_0} \sin\gamma \cos\gamma +$$
$$+ \frac{A\omega^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\ell_0} \sin\alpha + \frac{Pa \sin\gamma}{\rho}.$$

З урахуванням описаних сил і моментів загальне рівняння руху ротора приймає такий вигляд:

$$\left(m\omega^2 \cos\gamma + \frac{A\omega^2 \sin\gamma \cos\gamma}{\ell_0 \rho} + \frac{P \sin\gamma}{\rho} \right)(a + e\cos\alpha) +$$
$$+ \frac{A\omega^2 \sin\varphi \cos\varphi \cos\alpha}{\ell_0} - \kappa_0 e \sin\alpha \cos\lambda = 0, \quad (1)$$

де $\sin\alpha = \frac{a}{e}$; $\sin\gamma = \frac{\rho}{\ell_0}$; $\rho = \sqrt{a^2 + e^2 + 2ae\cos\alpha}$; $\sin\lambda = \frac{a}{\ell_0}$; $\sin\varphi = \frac{e}{\ell_0}$.

При $\ell_0 >> a, \rho, e$ рівняння (1) можна представити у такому вигляді:

$$\left(m\omega^2 + \frac{A\omega^2}{\ell_0^2} + \frac{P}{\ell_0} \right)(a + e\cos\alpha) + \frac{A\omega^2 e \cos\alpha}{\ell_0^2} - \kappa_0 a = 0. \quad (2)$$

При $\ell_0 \to \infty$ рівняння (2) перетвориться в рівняння [3]:

$$m\omega^2(a + e\cos\alpha) - \kappa_0 a = 0.$$

В залежності від швидкості обертання існує три основних режими обертання [3]:

– режим малих докритичних швидкостей $(\cos\alpha \approx 1)$;

– режим докритичних швидкостей до початку резонансу;

– режим надкритичних швидкостей $(\cos\alpha = -1)$.

Для режиму малих докритичних швидкостей рівняння (2) має вигляд

$$\left(m\omega^2\ell_0^2 + A\omega^2 + P\ell_0\right)(a + e) + A\omega^2 e - \kappa_0 a\ell_0^2 = 0. \quad (3)$$

Розв'язуючи рівняння (3) відносно ω і a, маємо:

$$\omega = \ell_0 \sqrt{\frac{\kappa_0 a\ell_0^2 - P\ell_0(a + e)}{a(m\ell_0^2 + A) + e(m\ell_0^2 + 2A)}};$$
$$a = \frac{e[P\ell_0 + \omega^2(m\ell_0^2 + 2A)]}{\kappa_0\ell_0^2 - P\ell_0 - \omega^2(m\ell_0^2 + 2A)}. \quad (4)$$

Для режиму надкритичних швидкостей рівняння (2) має такий вигляд:

$$\left(m\omega^2\ell_0^2 + A\omega^2 + P\ell_0\right)(a - e) + A\omega^2 e - \kappa_0 a\ell_0^2 = 0. \quad (5)$$

Розв'язуючи рівняння (5) відносно ω і a, маємо:

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa_0\ell_0^2 + P\ell_0(e - a)}{a(m\ell_0^2 + A) - m\ell_0^2 e}};$$
$$a = \frac{e(P\ell_0 - m\omega^2\ell_0^2)}{\omega^2(m\ell_0^2 + A) + P\ell_0 - \kappa_0\ell_0^2}. \quad (6)$$

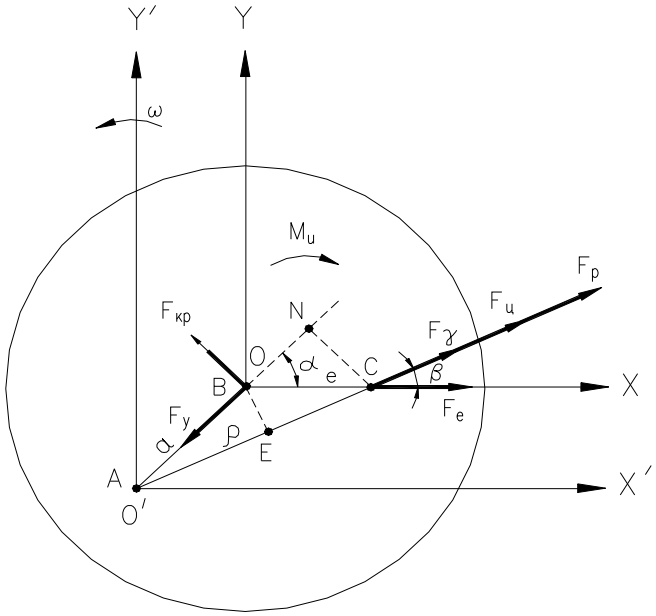

Рис. 2. Векторна діаграма діючих сил при обертанні ротора зонтичного типу зі статичною неврівноваженістю

Для режиму докритичних швидкостей до початку резонансу рівняння (2) має такий вигляд:

$$\left(m\omega^2\ell_0^2 + A\omega^2 + P\ell_0\right)\left(a + \sqrt{e^2 - a^2}\right) + A\omega^2\sqrt{e^2 - a^2} - \kappa_0 a\ell_0^2 = 0.$$

Залежності (4), (6) вказують на наявність критичної швидкості:

$$\omega_{кр} = \sqrt{\frac{\kappa_0\ell_0^2 - P\ell_0}{m\ell_0^2 + A}}$$

або

$$\omega_{кр} = \sqrt{\frac{\kappa_0 - \dfrac{P}{\ell_0}}{m + \dfrac{A}{\ell_0^2}}}. \qquad (7)$$

Із залежності (7) випливає, що зі збільшенням довжини ротора значення критичної швидкості зменшується, а зі збільшенням ℓ_0 – зростає.

При $\ell_0 \to \infty$ залежність (7) відповідає [3]:

$$\omega_{кр} = \sqrt{\frac{\kappa_0}{m}}.$$

Якщо $\ell_0 > \dfrac{P}{\kappa_0}$, то критична швидкість існує для циліндричного ротора, а для дискового ротора – за умови, якщо

$$\ell_0 > \sqrt{\frac{I_z - I_э}{m}}.$$

Якщо $\ell_0 < \dfrac{P}{\kappa_0}$, то критична швидкість існує тільки для дискового ротора за умови, що

$$\ell_0 < \sqrt{\frac{I_z - I_{ек}}{m}}. \qquad (8)$$

При $\kappa_0 \to 0$ рівняння (2) можна записати так:

$$\left(m\omega^2\ell_0^2 + A\omega^2 + P\ell_0\right)(a - e) + A\omega^2 e = 0,$$

звідки

$$a = \frac{e(m\omega^2\ell_0^2 + P\ell_0)}{m\omega^2\ell_0^2 + A\omega^2 + P\ell_0}$$

або

$$a = \frac{e(m\ell_0^2 + \frac{P\ell_0}{\omega^2})}{m\ell_0^2 + A + \frac{P\ell_0}{\omega^2}}. \qquad (9)$$

При $\omega \to \infty$ з залежності (9) випливає, що

$$a = \frac{m\ell_0^2 e}{m\ell_0^2 + A}.$$

Отриманий результат указує на неповне самоцентрування ротора.

При $\kappa_0 \to 0$ і $e \to 0$ рівняння (2) має такий вигляд:

$$m\omega^2\ell_0^2 + A\omega^2 + P\ell_0 = 0;$$

$$\omega^2 = \frac{P\ell_0}{I_z - I_э - m\ell_0^2}. \qquad (10)$$

Залежність (10) показує, що тільки для дискового ротора можливе стійке обертання ротора навколо точки *D* без пружної опори, якщо виконується умова (8).

З огляду на те, що при $e \to 0$ плече, на якому діє сила $F_{кр}$, зникає, а привід дозволяє збільшити швидкість обертання, залежність (10) можна записати таким чином:

$$\omega_2 = \frac{P\ell_0}{(I_z - I_э - m\ell_0^2)\omega_1},$$

де ω_1 – швидкість обертання ротора навколо геометричної осі; ω_2 – швидкість обертання геометричної осі ротора відносно вертикальної осі.

Вибравши площину дії головного вектора дисбалансів за початок відліку, можна визначити напрямок дії розглянутих сил (рис. 2).

Сила $F_{кр}$ спрямована під кутом $\alpha + 90^\circ$ до лінії ОС. Сила F_y утворить з лінією ОС кут, рівний $\alpha +$ 180°. Сила F_e утворить з лінією ОС кут, рівний 0°, якщо $A > 0$, і рівний 180°, якщо $A < 0$. Сила $F_ц$ утворить з лінією ОС кут β. При цьому $\sin\beta = \frac{a^2}{e\rho}$. Сила F_γ утворить з лінією ОС кут, що дорівнює куту β, якщо $A > 0$, і кут, рівний $180^\circ + \beta$, при $A < 0$. Сила F_P утворить з лінією ОС кут, що дорівнює куту β.

Таким чином, для розглянутого ротора отримані залежності дозволяють визначити на обраній швидкості всі діючі на ротор сили і моменти за величиною та напрямком.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Кельзон А.С., Циманский Ю.П., Яковлев В.И.* Динамика роторов в упругих опорах. – М.: «Наука», 1982. – 280 с.
2. *Кожешник Я.* Динамика машин. – М.: «Машгиз», 1961. – 423 с.
3. *Животов А.Ю.* Особенности вращения ротора со статической неуравновешенностью // Вестник Восточноукраинского национального университета. – № 2 (36). – Луганск, 2001. – С. 218–225.
4. Основы балансировочной техники. Уравновешивание жестких роторов и механизмов / Под редакцией В.А. Щепетильникова. – М.: «Машиностроение». – Т. 1. – 1975. – 527 с.

ЖИВОТОВ Олександр Юрійович – інженер І категорії Державного конструкторського бюро «Південне».

Наукові інтереси:

– динаміка обертання статичного неврівноваженого ротора.

Подано 4.01.2002

Животов О.Ю. Динаміка обертання статично неврівноваженого ротора зонтичного типу з шарнірною та пружною опорами

Животов А.Ю. Динамика вращения статически неуравновешенного ротора зонтичного типа с шарнирной и упругой опорами

Zhivotov A.Y. Dynamic of rotation of the static unbalanced rotor of the umbrella type with hinge and elastic support

УДК 62.251.755:681.5

Динамика вращения статически неуравновешенного ротора зонтичного типа с шарнирной и упругой опорами / А.Ю. Животов

Статье рассмотрено вращение в гравитационном поле статически неуравновешенного ротора зонтичного типа с шарнирной и упругой опорами. Обоснована необходимость учета дополнительного крутящего и инерционного моментов. Представлены основные уравнения вращения неуравновешенного ротора с учетом дополнительного крутящего и инерционного моментов. Полученные зависимости позволяют определить на выбранной скорости все действующие на ротор силы и моменты по величине и направлению.

УДК 62.251.755:681.5

Dynamic of rotation of the static unbalanced rotor of the umbrella type with hinge and elastic support / A.Y. Zhivotov

The rotation of the static unbalanced rotor of the umbrella type in the gravitation field is considered in the article. The necessity of consideration of the additional twisting and inertial moments is motivated. The principle equations of unbalanced rotor rotation with consideration of additional twisting and inertial moments are presented. The received dependences let to determine on the chosen speed all forces and moments influencing the rotor according to their size and direction.