УДК 681.3

А.В. Панішев, д.т.н., проф.
Д.Д. Плечистий, аспір.
Житомирський інженерно-технологічний інститут

ДО ПИТАННЯ ПОБУДОВИ МАРШРУТУ КОМІВОЯЖЕРА

Запропоновано ефективний алгоритм розв'язання задачі побудови маршруту руху комівояжера за допомогою метода оптимальних локальних послідовностей.

Нехай $X = [x_{ij}]_m$ – матриця перестановки $\pi = (\pi[1],..., \pi[m])$: $x_{i\pi[i]} = 1$, $i = \overline{1,m}$; $\pi[i] \in \{1, 2, ..., m\}$, $x_{ij} = 0$ у всіх інших випадках. Кожному елементу $i \in \{1,2,..., m\}$ поставимо у взаємооднозначну відповідність елемент $\pi[i]$, визначивши тим самим підстановку ступеня m:

$$\begin{pmatrix} 1 & ... & m \\ \pi[1] & ... & \pi[m] \end{pmatrix}.$$

Всі підстановки даного ступеня m розіб'ємо на два класи. До першого класу віднесемо всі циклічні підстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & ... & m \\ \tau[1] & ... & \tau[m] \end{pmatrix},$$

тобто такі, в циклічному розкладенні яких є лише один цикл довжини m, до другого класу – всі інші [1]. Перестановку, що відповідає циклічній підстановці, позначимо $\tau = (\tau[1],..., \tau[m])$ та будемо називати циклічною перестановкою або обходом.

Нехай $[d_{ij}]_m$ – квадратна матриця порядку m, в якій

$$d_{ij} = \begin{cases} d_{ij}, \text{ якщо } i \neq j; \\ \infty \text{ інакше,} \end{cases}$$

де $d_{ij} \in Z_0^+$ – множина цілих невід'ємних чисел.

За матрицею $[d_{ij}]_m$ побудуємо повний орієнтований мультиграф G з m вершинами, в якому кожна пара вершини $\{i, j\}$, $i \neq j$ з'єднана парою дуг (i, j) та (j, i) з вагами або вартостями d_{ij} та d_{ji}.

Будемо називати головною діагоналлю матриці $[d_{ij}]_m$ послідовність $(d_{11},..., d_{mm})$. Довільній перестановці π відповідає послідовність $(d_{1\pi[1]},..., d_{m\pi[m]})$, яка називається діагоналлю П матриці $[d_{ij}]_m$. Так як π є перестановкою номерів стовпців матриці $[d_{ij}]_m$, то для кожного елемента в діагоналі П, яка відповідає π, можна прийняти $d_{i\pi[i]} = d_{\pi[i]}$.

Сформулюємо задачу комівояжера.

В мультиграфі G потрібно знайти контур, який проходить через кожну вершину тільки один раз, з найменшою сумою вартостей дуг, що входять до нього.

Допустимим роз'вязком задачі комівояжера, очевидно, є циклічна перестановка $\tau = (\tau[1],..., \tau[m])$ номерів стовпців матриці $[d_{ij}]_m$. Перестановка τ породжує в мультиграфі G замкнений маршрут $(\tau[1],..., \tau[m], \tau[1])$, в якому всі номери $\tau[1],..., \tau[m]$ із $\{1,2,..., m\}$ є різними. Вартість обходу τ в G визначимо так:

$$D(\tau) = \sum_{i=1}^{m} d_{\tau[i]}.$$

Задача комівояжера полягає в знаходженні обходу $\tau^* = (\tau^*[1],..., \tau^*[m])$ мінімальної вартості:

$$D(\tau^*) = \min_{\tau} D(\tau). \tag{1}$$

Якщо в задачі значення матриці $[d_{ij}]_m$ обмежені умовою

$$d_{ij} = d_{ji}, i, j = \overline{1,m}, \tag{2}$$

то така задача називається симетричною, інакше – несиметричною. У випадку симетричної задачі матриці $[d_{ij}]_m$ відповідає повний неорієнтований граф з m вершинами, в якому ребро $\{i, j\}$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1,m}$ має вагу або вартість $d_{ij} = d_{ji}$. Відмітимо, що кількість всіх перестановок номерів стовпців π матриці порядку m дорівнює $m!$, кількість обходів τ для несиметричної задачі комівояжера дорівнює $(m-1)!$, для симетричної задачі таких обходів вдвічі менше.

З представленням елементів d_{ij} як відстаней між парою крапок i та j будемо вимагати, щоб була виконана така нерівність трикутника:

$$d_{ij} + d_{jk} \geq d_{ik} \tag{3}$$

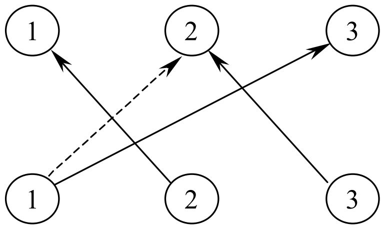
для всіх i, j, k. В цьому випадку кажуть, що задача комівояжера обмежена на матриці, що задовольняє нерівності трикутника. Потрібно відмітити, що обмеження (2) та (3) залишають задачу комівояжера NP-складною в сильному розумінні [2].

Розглянемо дві строго зростаючі послідовності $(i_1,...,i_{m_1})$ та $(j_1,...,j_{m_1})$, $m_1 \leq m$, одна з яких містить номера рядків $i_s \in \{1,2,...,m\}$, а інша – номера стовпців $j_t \in \{1,2,...,m\}$ матриці $[d_{ij}]_m$. Квадратна матриця порядку m_1, (s,t)-м елементом якої є $d_{i_s j_t}$, $s = \overline{1,m_1}$, $t = \overline{1,m_1}$, називається квадратною підматрицею матриці $[d_{ij}]_m$.

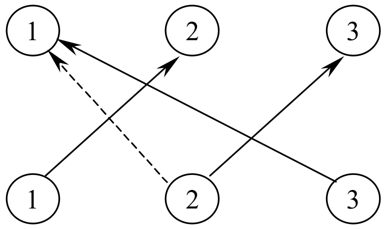
Нехай послідовності номерів рядків $(i_1,...,i_{m_1})$ та номерів стовпців $(j_1,...,j_{m_1})$ є такими, що $i_k = j_k$, $k = \overline{1,m_1}$. В такому випадку будемо говорити, що всі елементи $d_{i_s j_t}$, $s = \overline{1,m_1}$, $t = \overline{1,m_1}$, формують квадратну підматрицю порядку m_1 на головній діагоналі матриці $[d_{ij}]_m$.

Розглянемо підматрицю A_2 на головній діагоналі матриці $[d_{ij}]_m$ з номерами строк та стовпців (1, 2). Для підматриці A_2 існує єдина циклічна перестановка (2, 1). Кількість всіх перестановок, які можна отримати з матриці $A_3 = [d_{ij}]_3$, $i, j = \overline{1,3}$, дорівнює 6, з яких дві перестановки – (3, 1, 2) та (2, 3, 1) – є циклічними. Перераховані перестановки формують множину всіх циклів довжини 3 для підматриці A_3: $\{(1,\ 2,\ 3,\ 1),\ (1,\ 3,\ 2,\ 1)\}$.

Співставимо перестановку (2, 1) та дводольний орієнтований граф (I, J, E). $|I| = |J| = 2$, $E = \{(1,2),(1,2)\}$. Неважко побачити, що обидві перестановки $(3,1,2)$ та $(2,1,3)$ можна отримати із перестановки $(2,1)$. Перестановка $(3,1,2)$ утворюється видаленням в графі (I, J, E) дуги $(1,2)$ та доданням вершини 3 з дугами $(1,3)$ та $(3,2)$, а перестановка $(2,1,3)$ – видаленням дуги $(2,1)$ та доданням вершини 3 з дугами $(2,3)$ та $(3,1)$ (рис. 1).



а



б

Рис. 1. Утворення нової циклічної перестановки

Це зауваження викликає такі узагальнення.

Нехай підстановка ступеню $r+1$

$$p = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & l & \ldots & k-1 & k & k+1 & \ldots & s & \ldots & r & r+1 \\ \tau[1] & \ldots & \tau[l] & \ldots & \tau[k-1] & k & \tau[k+1] & \ldots & \tau[s] & \ldots & \tau[r] & \tau[r+1] \end{pmatrix}$$

містить один цикл довжиною r та один цикл довжиною 1, тобто представлена цикловим розкладенням $p = p_1 p_2$, де

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & l & \ldots & k-1 & k+1 & \ldots & s & \ldots & r & r+1 \\ \tau[1] & \ldots & \tau[l] & \ldots & \tau[k-1] & \tau[k+1] & \ldots & \tau[s] & \ldots & \tau[r] & \tau[r+1] \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix}.$$

Тоді будь-яка з r підстановок ступеню $r+1$

$$p(l) = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & l & \ldots & k-1 & k & k+1 & \ldots & s & \ldots & r & r+1 \\ \tau[1] & \ldots & k & \ldots & \tau[k-1] & \tau[l] & \tau[k+1] & \ldots & \tau[s] & \ldots & \tau[r] & \tau[r+1] \end{pmatrix}, \ l < k;$$

$$p(s) = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & l & \ldots & k-1 & k & k+1 & \ldots & s & \ldots & r & r+1 \\ \tau[1] & \ldots & \tau[l] & \ldots & \tau[k-1] & \tau[s] & \tau[k+1] & \ldots & k & \ldots & \tau[r] & \tau[r+1] \end{pmatrix}, \ k < s$$

складається з одного циклу довжиною $r+1$.

Дійсно, контур довжиною $r+1$, що відповідає підстановці $p(l)$, можна отримати єдиним шляхом, а саме – видаленням в контурі, що відповідає підстановці p_1, дуги $(l, \tau[l])$ та доданням дуг (l, k) та

$(k, \tau[l])$, $l < k$. Аналогічно, контур довжиною r, що відповідає підстановці $p(s)$, може бути отриманий видаленням дуги $(s, \tau[s])$ із контуру, що відповідає підстановці $p(s)$, та доданням дуг (s, k) та $(k, \tau[s])$, $k < s$.

Таким чином, ми маємо простий спосіб побудови всіх циклічних перестановок довжиною m для матриці $[d_{ij}]_m$, який полягає у виконанні перелічених нижче дій. Із матриці $[d_{ij}]_m$ утворюємо $m-2$ підматриць A_r, в яких номера рядків та стовпців задані послідовністю $(1, 2, ..., r)$, $r = \overline{2, m-1}$. Далі для кожної перестановки τ_r із множини всіх циклічних перестановок довжиною r, отриманих для матриці A_r, будуються r циклічних перестановок довжиною $r+1$ для матриці A_{r+1}.

Викладені зауваження розвивають метод побудови оптимальних локальних послідовностей, за допомогою якого ефективно розв'язано ряд узагальнень задачі о призначеннях [3–5]. Покажемо, як застосувати метод для побудови за поліноміальний час обходу τ_0, допустимого за точністю для реальних вхідних даних.

В момент початку побудови τ_0 задана циклічна перестановка $\tau_{02} = (2, 1)$, вартість якої дорівнює $D(\tau_{02}) = d_{12} + d_{21}$. Ми вважаємо, що довжина τ_{02} дорівнює k, $j_1 = 2$, $j_k = 1$. Із перестановки τ_{02} можна отримати дві циклічні перестановки довжиною $l = 3$ для матриці A_3, в якій номера рядків та стовпців задані послідовністю $(1, 2, 3)$: $\tau_{31} = (3, j_2, j_1)$, $\tau_{32} = (j_1, 3, j_2)$. Визначимо вартості τ_{31} та τ_{32}:

$$D(\tau_{31}) = D(\tau_{02}) - d_{1j_2} + d_{13} + d_{3j_1};$$

$$D(\tau_{32}) = D(\tau_{02}) - d_{2j_2} + d_{23} + d_{3j_2}.$$

Перестановка τ_{03}, що дає $\min\{D(\tau_{31}, \tau_{32})\}$, дозволяє побудувати перестановку τ_{04} довжиною 4 після повторення дій, що були виконані для $l = 3$.

Алгоритм побудови обходу τ_0 представимо таким чином.

S0. Алгоритм знаходження маршруту комівояжера τ_0 за схемою пошуку та побудови локальних оптимальних послідовностей;

$[d_{ij}]_m$ – матриця вартостей порядку m в задачі комівояжера, де $d_{ii} = \infty$, $i = \overline{1, m}$, d_{ij} – цілі невід'ємні числа, $i \neq j$;

$$j_1 = 2,\ k = 2,\ j_k = 1,\ \tau_{0k} = (j_1, j_k),\ D(\tau_{0k}) = d_{j_1 j_k} + d_{j_k j_1}.$$

S1. $l = k + 1$;

сформувати послідовність $\tau_l = (j_1, j_2, ..., j_s, ..., j_k, l)$;

сформувати із τ_l k циклічних перестановок $\tau_{ls} = (j_1, j_2, ..., l, ..., j_k, j_s)$, $s = \overline{1, k}$, довжиною l;

розрахувати їх вартості:

$$D(\tau_{ls}) = D(\tau_{0k}) - d_{sj_s} + d_{sl} + d_{lj_s},\ s = \overline{1, k};$$

найти таку перестановку τ_{lj}, що

$$D(\tau_{lj}) = \min\{D(\tau_{ls}) \mid 1 \le s \le k\};$$

покласти $k = l$, $\tau_{0k} = \tau_{lj}$, $l = j_k$.

S2. Якщо $k = m$, то кінець: $\tau_0 = \tau_{0k}$, інакше перейти до кроку S1.

Запропонований алгоритм характеризується малою трудомісткістю. Він завершує роботу після виконання $m-2$ кроків S1. На кожному кроці S1 виконується k побудов перестановки $\tau_{(k+1)s}$, $s = \overline{1, k}$, $k = \overline{2, m-1}$, що отримується транспозицією елементів j_s та $k+1$. Отже, k перестановок утворюються в результаті виконання $3k$ операцій порівняння. На обчислення k значень $D(\tau_{(k+1)s})$ також потрібно $3k$ операцій додавання та віднімання, а пошук мінімального значення на неупорядкованій множині значень $D(\tau_{(k+1)s})$ буде завершено після виконання $k-1$ операцій порівняння. Таким чином, на кожному кроці S1 виконуються $7k-1$ елементарних дій типу додавання, віднімання та порівняння. Побудову обходу τ_0 буде завершено після виконання

$$\sum_{k=2}^{m-1}(7k-1) = 7\sum_{k=1}^{m-2} k = 7(m-1)(m-2)/2$$

елементарних операцій. Отже, складність запропонованого алгоритму оцінюється величиною $O(m^2)$.

Запропонований алгоритм на "незручному" прикладі симетричної задачі комівояжера, представленої матрицею $[d_{ij}]_4$ та відповідним їй графом (рис. 2), утворює оптимальний розв'язок $\tau^* = \tau^0 = (2, 4, 1, 3)$,

$D(\tau^*) = 8d$, тоді як процедура “іди в найближчий”, яка характеризується тією ж трудомісткістю, знаходить обхід $(2, 3, 4, 1)$ з максимальною вартістю, що дорівнює $13d$.

$$[d_{ij}] = \begin{bmatrix} \infty & 2d & 2d & 8d \\ 2d & \infty & d & 2d \\ 2d & d & \infty & 2d \\ 8d & 2d & 2d & \infty \end{bmatrix}$$

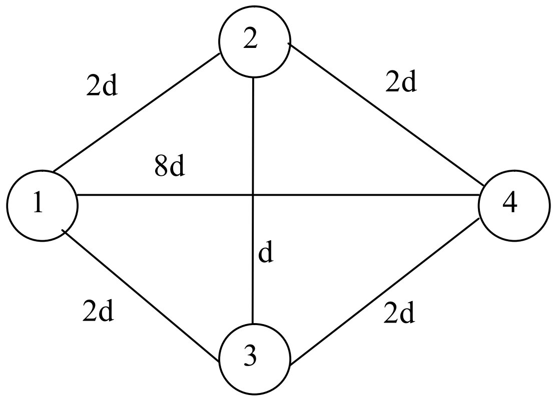


Рис. 2. Вхідна матриця та відповідний граф

Запропонований алгоритм викликає, якнайменше, два запитання. По-перше, потрібно знайти нижні границі значень функціоналу $D(\tau)$ для максимально можливого скорочення перебору при побудуванні τ^* в методі гілок та границь. По-друге, як використовувати ідею перетворення циклічної перестановки довжиною r в циклічну перестановку довжиною $r+1$ для знаходження похибки, що не залежить від m в задачі з нерівністю трикутника.

Найбільш точний алгоритм, відомий як алгоритм Крістофідеса, будує за час $O(m^4)$ маршрут комівояжера з похибкою, що не більше $D(\tau^*)/2$. Цікаво з’ясувати, яку точність гарантує запропонований алгоритм.

Розглянемо приклад побудови обходу τ_0 для матриці

$$[d_{ij}] = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \infty & 3 & 1 & 7 & 7 & 1 \\ 3 & \infty & 7 & 7 & 9 & 9 \\ 1 & 10 & \infty & 7 & 9 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & \infty & 6 & 6 \\ 9 & 7 & 8 & 1 & \infty & 1 \\ 1 & 9 & 1 & 1 & 6 & \infty \end{bmatrix} \end{array}.$$

Приймемо $j_1 = 2$, $j_1 = 1$. Побудова τ_0 завжди починається з перестановки $\tau_{02} = (2, 1)$, вартість якої дорівнює $D(\tau_{02}) = d_{j_1 j_2} + d_{j_2 j_1} = 3 + 3 = 6$; $k = 2$.

Встановлюємо $l = 3$ та будуємо послідовність $\tau_3 = (2, 1, 3)$. З τ_3 будуємо дві послідовності: $\tau_{31} = (3, 1, 2)$, $\tau_{32} = (2, 3, 1)$. Розраховуємо $D(\tau_{31}) = D(\tau_{02}) - d_{12} + d_{13} + d_{32} = 6 - 3 + 1 + 10 = 14$, $D(\tau_{32}) = D(\tau_{02}) - d_{21} + d_{23} + d_{31} = 6 - 3 + 7 + 1 = 11$. Оскільки $\min\{D(\tau_{31}), D(\tau_{32})\} = D(\tau_{32})$, то приймаємо $\tau_{03} = (2, 3, 1)$.

Циклічна перестановка τ_{03} відповідає матриці

$$A_3 = \begin{bmatrix} \infty & 3 & 1 \\ 3 & \infty & 7 \\ 1 & 10 & \infty \end{bmatrix}.$$

Встановлюємо $l = 4$, $\tau_4 = (2, 3, 1, 4)$, $\tau_{41} = (4, 3, 1, 2)$, $\tau_{42} = (2, 4, 1, 3)$, $\tau_{43} = (2, 3, 4, 1)$. Визначаємо вартості перестановок:

$$D(\tau_{41}) = D(\tau_{03}) - d_{12} + d_{14} + d_{42} = 11 - 3 + 7 + 7 = 22;$$
$$D(\tau_{42}) = D(\tau_{03}) - d_{23} + d_{24} + d_{43} = 11 - 7 + 7 + 9 = 20;$$
$$D(\tau_{43}) = D(\tau_{04}) - d_{31} + d_{34} + d_{41} = 11 - 1 + 7 + 8 = 25.$$

Надалі будемо розглядати циклічну перестановку $\tau_{04} = \tau_{42} = (2, 4, 1, 3)$, яку отримано з перестановки τ_{03} видаленням дуги $(2, 3)$ та додаванням дуг $(2, 4)$ та $(4, 3)$ (рис. 3).

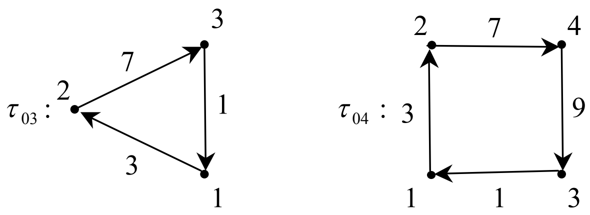


Рис. 3. Утворення нової перестановки

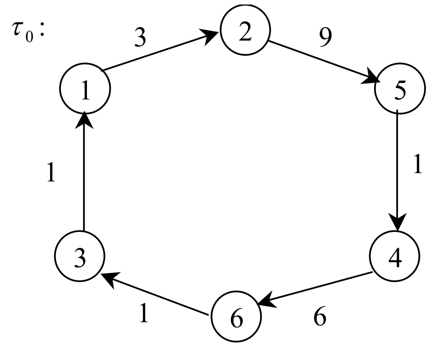


Рис. 4. Розв'язок, отриманий за допомогою алгоритму

Після виконання аналогічних дій при $l = 5$ отримаємо циклічну перестановку довжиною 5 $\tau_{05} = (2, 5, 1, 3, 4)$, $D(\tau_{05}) = 23$.

Алгоритм закінчує працювати при $l = 6$ з побудовою обходу $\tau_{06} = \tau_0 = (2, 5, 1, 6, 4, 3)$, $D(\tau_0) = 3 + 9 + 1 + 6 + 1 + 1 = 21$.

Цікавим є той факт, що вартість побудованого обходу співпадає з вартістю оптимального обходу: $D(\tau^*) = 21$ (рис. 4).

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Тараканов В.Е.* Комбинаторные задачи и (0, 1)-матрицы. – М.: Наука, 1985. – 189 с.
2. *Пападимитроу Х., Стайглиц К.* Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. – М.: Мир, 1985. – 510 с.
3. *Панишев А.В., Подоляка О.А., Скакалина Е.В.* Эффективный алгоритм распараллеливания работ на неидентичных машинах // Авиационно-космическая техника и технология: Сборник научных трудов. – Выпуск 13. – Харьков: Государственный аэрокосмический университет «ХАИ», 1999. – С. 136–146.
4. *Панишев А.В., Скрипина И.В., Скакалина Е.В.* Эффективное построение оптимальных решений в задаче о назначениях транспортного типа // Автомобильный транспорт: Сборник научных трудов. – Выпуск 4. – Харьков: ХТАДТУ, 2000. – С. 63–65.
5. *Панішев А.В., Подоляка О.М., Подоляка О.О.* Ефективна схема розв'язання узагальнення задачі про редактора // Вісник ЖІТІ. – 2001. – № 18. – С. 126–134.

ПАНІШЕВ Анатолій Васильович – доктор технічних наук, професор Житомирського інженерно-технологічного інституту.
Наукові інтереси:
– комбінаторна оптимізація;
– теорія розкладів.

ПЛЕЧИСТИЙ Дмитро Дмитрович – магістр комп'ютерних наук, аспірант Житомирського інженерно-технологічного інституту.
Наукові інтереси:
– комп'ютерно-інформаційні технології;
– комбінаторна оптимізація.

Подано 15.02.2002

Панішев А.В., Плечистий Д.Д. До питання побудови маршруту комівояжера
Панишев А.В., Плечистый Д.Д. К вопросу построения маршрута коммивояжера
Panishev A.V., Plechystyy D.D. About the problem of traveling salesman

УДК 681.3
К вопросу построения маршрута коммивояжера / А.В. Панишев, Д.Д. Плечистый
Предложен эффективный алгоритм решения задачи построения маршрута движения коммивояжера с помощью метода оптимальных локальных последовательностей.

УДК 681.3
About the problem of traveling salesman / A.V. Panishev, D.D. Plechystyy

In the given article an effective algorithm of solving the task of traveling salesman by means of the method of optimal local sequences is proposed.