## РАДІОТЕХНІКА ТА ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЇ

УДК 621.396.96

**А.І. Білоцький, аспір.**
**М.В. Коваленко, д.т.н., проф.**
**Н.В. Петриченко, аспір.**
*Житомирський інженерно-технологічний інститут*
**О.М. Шиманський, оператор РКП**
*Державна інспекція електрозв'язку*

# МОДЕЛЮВАННЯ РОЗПІЗНАВАННЯ ГАРМОНІЧНИХ СИГНАЛІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ВЕЙВЛЕТ-ПЕРЕТВОРЕННЯ

*Розглянута можливість використання при розпізнаванні сигналів вейвлет-перетворення для визначення параметрів сигналу, що розпізнається, – частоти та фази (часу затримки). Проведене моделювання визначення параметрів гармонічного сигналу за допомогою вейвлета Морлета.*

Завдання розпізнавання сигналів постає у радіолокації, радіонавігації, радіорозвідці, радіоконтролі та у багатьох інших галузях сучасної радіоелектроніки. У цих галузях використовуються переважно квазігармонічні сигнали. Застосування вейвлет-перетворення дозволяє при розпізнаванні визначати такі параметри квазігармонічного сигналу,як частота та фаза (часова затримка).

Спрощеною моделлю квазігармонічного сигналу є звичайний гармонічний сигнал. Шляхом математичного моделювання було встановлено, що серед досліджених вейвлетів (Хаара, "сомбреро", Морлета, Баркера) найкращі результати для гармонічних сигналів дає вейвлет Морлета (Morlet), що має породжувальну функцію:

$$\psi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}\cos 5x . \tag{1}$$

Вейвлет-перетворення сигналу $s(t)$ при цьому визначається таким чином:

$$W_s(a,b) = W[s(t)] = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt , \tag{2}$$

де $a$ – параметр, що за сенсом близький до періоду; $b$ – параметр, що за сенсом близький до часової затримки.

Підставивши в (2) гармонічний сигнал $s(t) = A\cos(\omega_0 t - \varphi)$, отримаємо:

$$W_s(a,b) = \frac{A}{\sqrt{|a|}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-b)^2}{2a^2}}\cos(\omega_0 t - \varphi)\cos\left(\frac{5(t-b)}{a}\right)dt . \tag{3}$$

Перейшовши до змінної $x = \dfrac{t-b}{a}$, (3) можна записати у вигляді:

$$W_s(a,b) = A\sqrt{|a|}\,\mathrm{sgn}\, a\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\cos(a\omega_0 x + b\omega_0 - \varphi)\cos 5x dx . \tag{4}$$

Шляхом нескладних перетворень, враховуючи, що [1], маємо:

$$\begin{gathered}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2}\cos mx dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-\frac{m^2}{4a^2}} ,\\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2}\sin mx dx = 0 ,\end{gathered} \tag{5}$$

отже:

$$W_s(a,b) = A\sqrt{|a|}\,\mathrm{sgn}\, a\cos(b\omega_0 - \varphi)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(e^{-\frac{(a\omega_0+5)^2}{2}} + e^{-\frac{(a\omega_0-5)^2}{2}}\right) . \tag{6}$$

Бачимо, що отриманий вейвлет є подільною функцією, тобто його можна представити як добуток двох функцій, кожна з яких залежить лише від однієї змінної:

$$W_s(a,b)=W_{sa}(a)W_{sb}(b)\,, \tag{7}$$

де

$$\begin{aligned}W_{sa}(a)&=A\sqrt{|a|}\,\mathrm{sgn}\,a\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(e^{-\frac{(a\omega_0+5)^2}{2}}+e^{-\frac{(a\omega_0-5)^2}{2}}\right)=\\&=A\sqrt{|a|}\,\mathrm{sgn}\,a\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{a^2\omega_0^2+25}{2}}\left(e^{-5a\omega_0}+e^{5a\omega_0}\right)\end{aligned}, \tag{8а}$$

$$W_{sb}(b)=\cos(b\omega_0-\varphi)\,. \tag{8б}$$

Як відомо, екстремуми функції двох змінних визначаються умовою [2]

$$\begin{cases}\dfrac{\partial W_s}{\partial a}=0\\ \dfrac{\partial W_s}{\partial b}=0\end{cases}. \tag{9}$$

В нашому випадку $W_s(a,b)$ є подільною функцією, тому (9) з врахуванням (7) розпадається на два незалежних рівняння:

$$\frac{\partial W_{sa}}{\partial a}=0\,, \tag{10а}$$

$$\frac{\partial W_{sb}}{\partial b}=0\,. \tag{10б}$$

Розглянемо спочатку область $a>0$. Рівняння (10а) при підстановці в нього (8а) в цій області зводиться до рівняння:

$$A\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{a^2\omega_0^2+25}{2}}\sqrt{a}\,\mathrm{sgn}\,a\left[\left(\frac{1}{2a}-\omega_0^2a\right)\left(e^{5a\omega_0}+e^{-5a\omega_0}\right)+5\omega_0\left(e^{5a\omega_0}-e^{-5a\omega_0}\right)\right]=0\,,$$

$$A\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{(a\omega_0-5)^2}{2}}\sqrt{a}\,\mathrm{sgn}\,a\left[\left(\frac{1}{2a}-\omega_0^2a\right)\left(1+e^{-10a\omega_0}\right)+5\omega_0\left(1-e^{-10a\omega_0}\right)\right]=0\,,$$

$$\left(\frac{1}{2a}-\omega_0^2a\right)\left(1+e^{-10a\omega_0}\right)+5\omega_0\left(1-e^{-10a\omega_0}\right)=0\,. \tag{11}$$

При $a\omega_0\cong 1$ та $a\omega_0>>1$ $e^{-10\omega_0 a}<<1$, тому рівняння (11) можна наближено записати у вигляді:

$$\frac{1}{2a}-\omega_0^2a+5\omega_0=0\,,\ 2\omega_0^2a^2-10\omega_0a-1=0\,. \tag{12а}$$

Розв'язком квадратного рівняння (12а) будуть значення $a\omega_0=\dfrac{5\pm3\sqrt{3}}{2}$. Можна вважати, що в область $a\omega_0>>1$ та $a\omega_0\cong 1$ входить лише значення $a\omega_0=\dfrac{5+3\sqrt{3}}{2}$.

При $a\omega_0<<1$ $e^{-10\omega_0 a}\approx 1$, тому рівняння (13) можна наближено записати у вигляді:

$$\frac{1}{2a}-\omega_0^2a=0\,,\ 2\omega_0^2a^2-1=0\,. \tag{12б}$$

Розв'язком рівняння (12б) буде $\omega_0 a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, але це значення потрапляє в діапазон $a\omega_0\cong 1$, де коректним є рівняння (12а), а не рівняння (12б).

Аналогічно можна довести, що екстремумом в області $a<0$ буде $a\omega_0=-\dfrac{5+3\sqrt{3}}{2}$.

Отже, екстремуми вейвлета будуть знаходитись вздовж ліній

$$a=\pm\frac{5+3\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\omega_0}=\pm\frac{5+3\sqrt{3}}{4\pi}T_0=\pm0{,}81T_0\,, \tag{13}$$

де $T_0$ – період сигналу.

Рівняння (10б) при підставленні в нього (8б) зводиться до рівняння:

$$-\omega_0 \sin(\omega_0 b - \varphi) = 0\ ,\ \sin(\omega_0 b - \varphi) = 0\ . \tag{14}$$

Розв'язком рівняння (14) будуть значення:

$$b = \frac{k\pi + \varphi}{\omega_0} = \frac{\varphi}{\omega_0} + k\frac{\pi}{\omega_0} = t_з + k\frac{T_0}{2}\ ,\ k \in Z\ , \tag{15}$$

де $t_з$ – час затримки сигналу; $Z$ – множина цілих чисел.

Отже, екстремуми вейвлета будуть знаходитись у точках $a = \pm 0{,}81T_0$ , $b = t_з + k\frac{T_0}{2}$ , $k \in Z$ .

За значеннями екстремумів вейвлета можна визначити одночасно період сигналу, оскільки $a_{extr} = \pm 0{,}81T_0$ , та його затримку (фазу) з точністю до періоду, оскільки $b_{extr} = t_з + k\frac{T_0}{2}$ ($k \in Z$).

Реально будь-який сигнал має обмежений час спостереження $T$ , тому реальне вейвлет-перетворення буде виконуватися за формулою:

$$W_s(a,b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\int_0^T s(t)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt\ . \tag{16}$$

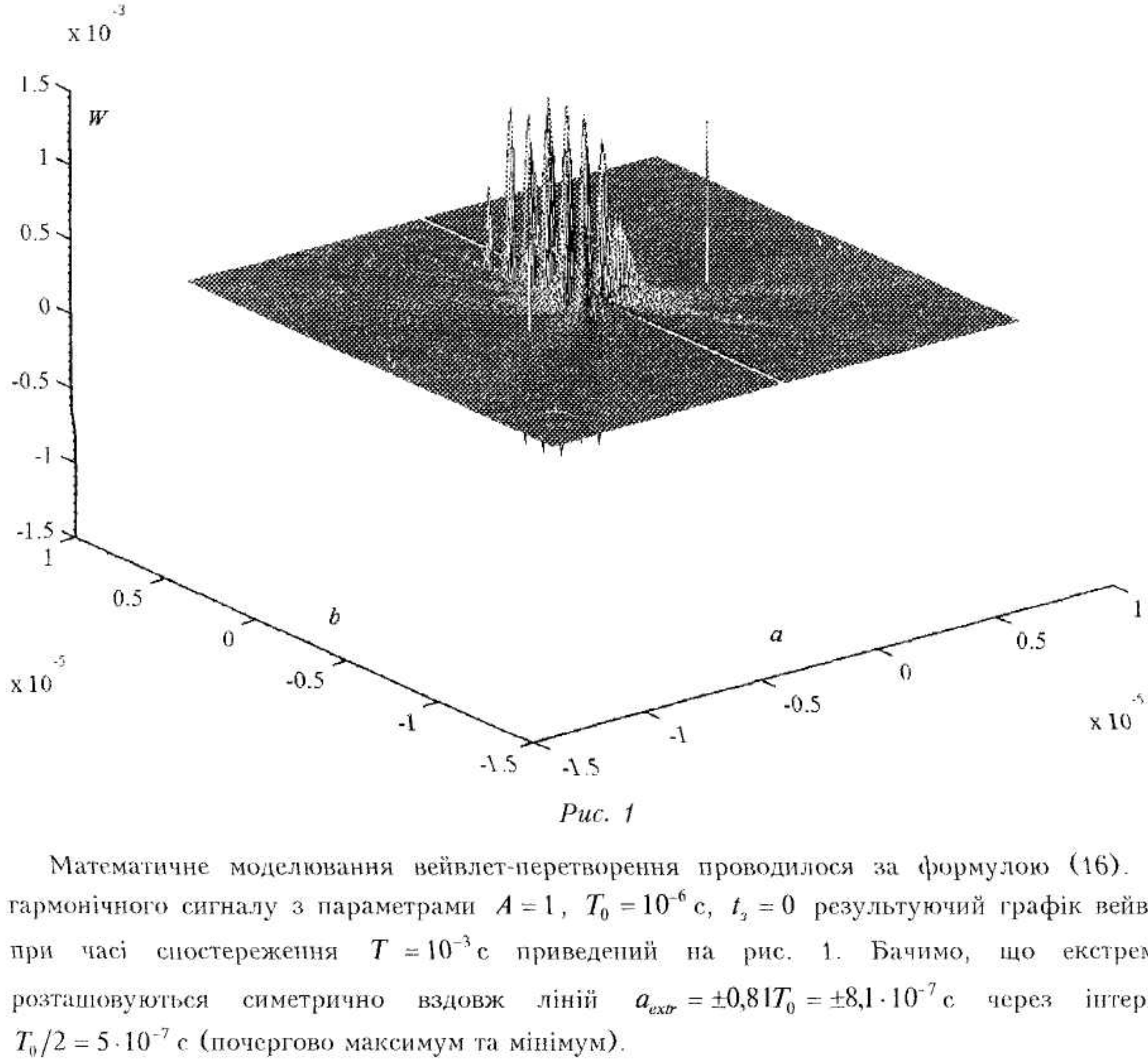


*Рис. 1*

Математичне моделювання вейвлет-перетворення проводилося за формулою (16). Для гармонічного сигналу з параметрами $A = 1$ , $T_0 = 10^{-6}$ с, $t_з = 0$ результуючий графік вейвлета при часі спостереження $T = 10^{-3}$ с приведений на рис. 1. Бачимо, що екстремуми розташовуються симетрично вздовж ліній $a_{extr} = \pm 0{,}81T_0 = \pm 8{,}1 \cdot 10^{-7}$ с через інтервали $T_0/2 = 5 \cdot 10^{-7}$ с (почергово максимум та мінімум).

На рис. 2 приведений перетин вейвлета $b = b_{extr} = t_з = 0$ . З рисунку можна визначити період сигналу $T_0 = \frac{4\pi}{5 + 3\sqrt{3}} a_{extr} = 1{,}23 a_{extr}$ .

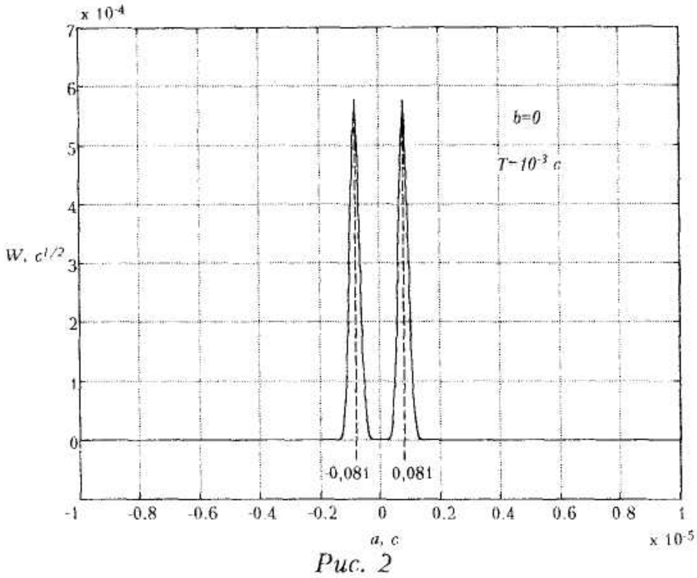


*Рис. 2*

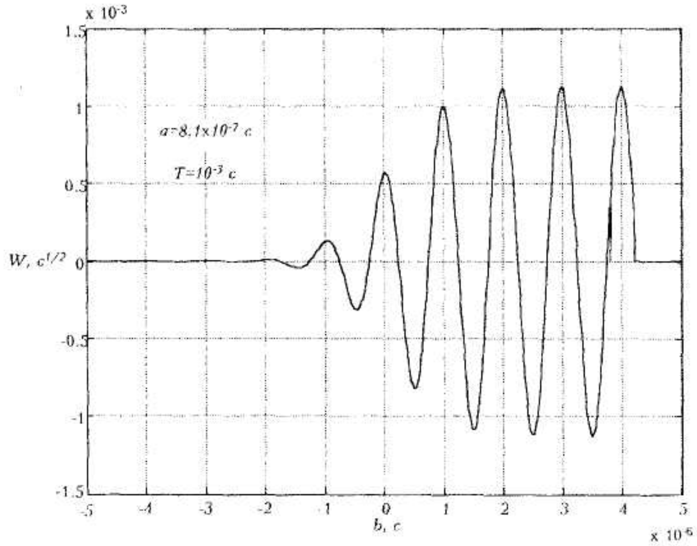


*Рис. 3*

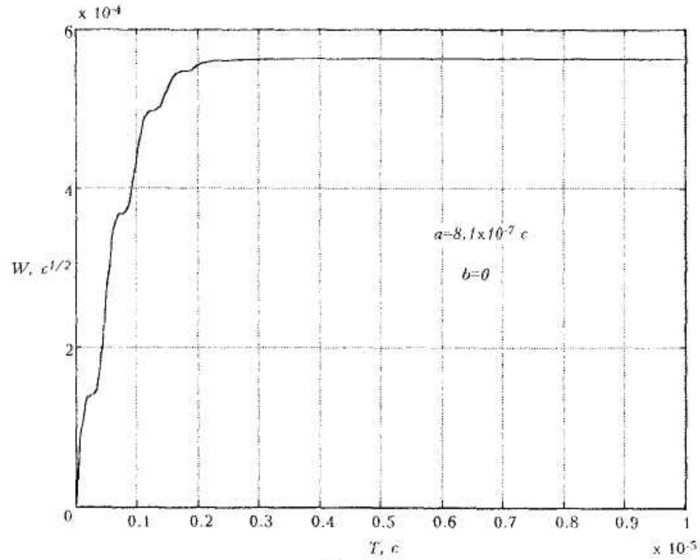


*Рис. 4*

На рис. 3 приведений перетин вейвлета $a = a_{extr} = 0{,}81T_0 = 8{,}1 \cdot 10^{-7}$ с. За максимумом, що потрапляє в інтервал $[0,\ T_0)$, можна визначити затримку сигналу $t_з = b_{extr} = 0$.

На рис. 4 приведена залежність вейвлета (16) від часу спостереження сигналу. Бачимо, що вже при $T > T_0$ час спостереження не впливає на значення вейвлета у точці екстремуму $W_s(a_{extr}, b_{extr})$.

Таким чином, застосування вейвлет-перетворення дозволяє одночасно визначити частоту та затримку (фазу) сигналів, що розпізнаються. Недоліком цього методу є наявність побічних екстремумів вейвлета, які ускладнюють визначення параметрів сигналу. Цю проблему можна частково вирішити, підбираючи тип вейвлета, щоб зменшити рівень побічних екстремумів.

**ЛІТЕРАТУРА:**

1. *Двайт Г.Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. – М.: Наука, 1966. – 228 с.

2. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. – Т.1. –М.: Наука,1976. – 456 с.

БІЛОЦЬКИЙ Андрій Іванович – аспірант кафедри радіотехніки Житомирського інженерно-технологічного інституту.

Наукові інтереси:
– пристрої НВЧ та антени;
– радіотехнічні системи.
E-mail: belotsky@ziet.zhitomir.ua

КОВАЛЕНКО Микола Вікторович – доктор технічних наук, професор, завідуючий кафедрою радіотехніки Житомирського інженерно-технологічного інституту.

Наукові інтереси:
– пристрої НВЧ та антени;
– радіотехнічні системи.

ПЕТРИЧЕНКО Наталія Василівна – аспірант кафедри радіотехніки Житомирського інженерно-технологічного інституту.

Наукові інтереси:
– пристрої НВЧ та антени;
– радіотехнічні системи.
E-mail: pnv@ziet.zhitomir.ua

ШИМАНСЬКИЙ Олександр Миколайович – оператор радіоконтрольного пункту Державної інспекції електрозв'язку по Житомирській області.

Наукові інтереси:
– радіоконтроль.

Подано 11.12.2001