

УДК 621.81

П.П. Мельничук, к.т.н., доц.  
Житомирський інженерно-технологічний інститут

**МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДЕФОРМАТИВНОСТІ ПРУЖНОЇ СИСТЕМИ ШПИНДЕЛЯ**

*Розглянута пружна система шпинделя вертикально-фрезерного верстата. Побудована математична модель деформативності пружної системи.*

При обробці заготовки фрезою косокутного різання на кожен ніж фрези діє вектор сил різання  $R_i$  (рис. 1). Величина цього вектора визначається численними факторами випадкового характеру. Зокрема, вона залежить від швидкості різання, подачі та припуску на обробку. Вектор сили різання залежить також від зміни взаємного положення фрези і заготовки, обумовленого змінами геометрії, деформацією пружної системи верстата і коливальними процесами в динамічній системі верстата [1].

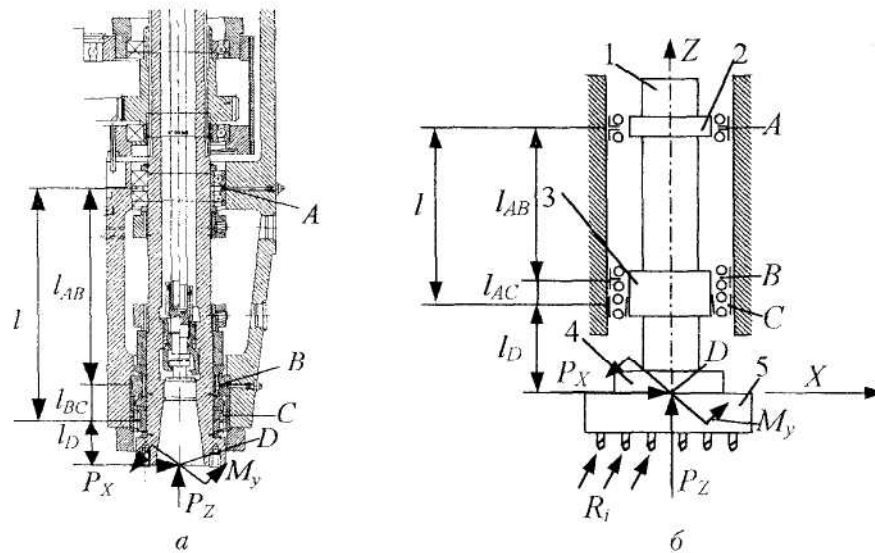


Рис. 1. Конструктивна (а) і геометрична (б) схеми шпинделя та схема дії силових факторів у площині XOZ:  $P_x, P_z$  – проєкції головного вектора сил різання;  $M_y$  – крутний момент, який діє на шпиндель

Сукупність випадкових векторів  $R_i$  сил різання, що діють на всі ножі, які беруть участь в обробці, утворює просторову систему сил, що діють на інструмент. Фреза косокутного різання конструктивно виконана у вигляді масивного тіла обертання і має високу жорсткість. Тому можна вважати фрезу абсолютно твердим тілом, на яке діє просторова система сил. Для абсолютно твердого тіла має місце теорема приведення сил.

Відповідно просторову систему сил можна привести до однієї точки, замінивши їх дію дією еквівалентних силових факторів: головного вектора  $P$  і головного моменту  $M$ . За точку приведення приймемо точку, розташовану на осі фрези в місці перегину осі з площиною нижнього торця шпинделя.

Головний вектор сил різання характеризується трьома своїми проєкціями:  $P_x, P_y, P_z$ . Головний момент має три складові, що відповідають моментам сили відносно осей  $X, Y, Z$ , а саме:  $M_x, M_y, M_z$ .

Всі шість названих силових факторів мають випадковий характер. Проєкції сил різання і крутні моменти є випадковими процесами.

Деформація системи “шпиндель–інструмент” обумовлена в основному складовими головного вектора сил різання, що діють в горизонтальній площині,  $P_x, P_y$  і складовими головного моменту  $M_x$  та  $M_y$ . Дія цих силових факторів зосереджується у двох взаємно перпендикулярних площинах, що проходять через геометричну вісь шпинделя. На рис. 1, б

наведено схему дії силових факторів у площині осей  $XYZ$ .

Шпиндель має складну систему опор у вигляді підшипників кочення. Опори утворюють статично невизначену деформативну систему шпинделя.

Опори мають нелінійні характеристики жорсткості. Всі геометричні характеристики опор та їх параметри жорсткості змінюються при обертанні шпинделя. Ці зміни мають випадковий характер.

Випадкові зміни геометричних параметрів шпинделя ілюструються конструктивною схемою, наведеною на рис 1, *a*. При обертанні шпинделя точки опори шпинделя в радіальному напрямку знаходяться в роликовому підшипнику передньої опори (точка  $П$ ) і в двох підшипниках задньої опори (еквівалентна середня точка  $A$ ). В залежності від різноманітних факторів ці точки зміщуються. Наприклад, якщо розміри тіл кочення верхнього підшипника задньої опори більші розмірів тіл кочення нижнього підшипника, то точка  $A$  зміститься вгору. Відстань по довжині шпинделя між осями підшипників задньої опори шпинделя складає приблизно 12 % від загальної відстані між передньою та задньою опорами. Тому зміщення точки  $A$  буде відбуватись в межах  $\pm 6$  %. Взагалі ці зміщення пабагато менші і не перевищують 1...2 %. Але це значення також є суттєвим і повинно враховуватись при оцінці деформативності шпинделя.

Аналогічним чином відбуваються випадкові зміни положення точки опори роликового підшипника передньої опори шпинделя (рис. 1, *a*). Причинами зміщення точки опори (точка  $C$ ) є різнорозмірність тіл кочення, похибки виготовлення кілець підшипника та контактні деформації в спряженнях кілець зі шпинделем та отвором шпиндельної бабки. Додатковою причиною зміщення точки опори є перерозподіл навантажень між роликовим і упорно-радіальним підшипником.

В цілому зміщення точки опори (точки  $C$ ) не перевищує осьового розміру роликового підшипника (8 % від загальної відстані між передньою та задньою опорами шпинделя). Максимальне зміщення точки  $C$  не буде перевищувати  $\pm 4$  %, а фактичне зміщення точки опори складає  $\pm 1...2$  %. Це зміщення має випадковий характер і є суттєвим при врахуванні деформативності шпинделя.

Ще більш суттєвим є зміщення точки дії реакції упорно-радіального підшипника. З врахуванням конструктивних особливостей підшипника та умов створення попереднього натягу встановлено, що випадкові зміщення точки прикладення реакції упорно-радіального підшипника знаходяться в межах  $\pm 5$  %.

Врахування випадкових зміщень точок опираючого шпинделя є надзвичайно складною задачею. Для рішення цієї задачі використані наближені методи теорії ймовірностей. Їх застосування правомірне, враховуючи незначні (кілька відсотків) випадкові зміщення точок опираючого шпинделя.

Згідно з даними методами, характеристики пружно-деформативної системи шпинделя можна розглядати як деякі усереднені значення та випадкові відхилення від усереднених значень. Це стосується як геометричних розмірів, так і показників жорсткості опор.

Розглянемо статично невизначену систему шпинделя та його деформації в площині  $XOZ$  (рис. 2).

Розглянемо рівняння статичної рівноваги шпинделя під дією випадкових сил різання з врахуванням його деформативності. При дії на шпиндель випадкової поперечної сили  $P$  і випадкового крутного моменту  $M$  мають місце поперечні та поворотні переміщення шпинделя в опорах. Для визначення випадкових реакцій опор  $R_3$  і  $R_n$  маємо два рівняння статички:

$$\sum R_i = 0; \quad \sum M_i = 0.$$

Визначимо суму проєкцій всіх сил, що діють на шпиндель:

$$P - R_{II} + R_3 - P_B = 0, \quad (1)$$

де  $P$  – проєкція головного вектора сил різання;  $R_{II}$  – загальна реакція передньої опори шпинделя;  $R_3$  – загальна реакція задньої опори шпинделя;  $P_B$  – зусилля, що діє на шпиндель з боку упорно-радіального підшипника.

Сума моментів сил, що діють на шпиндель, враховує наявність крутних моментів, які обумовлені кутовими переміщеннями перерізів шпинделя на опорах. Для моментів відносно точки  $B$  одержимо:

$$M_B + M - R_{II}l_B + P(l_{BC} + l_D) + M_C + M_A + P_3(l_{AB}) = 0, \quad (2)$$

де  $M_B$  – момент в упорно-радіальному підшипнику;  $M$  – крутний момент, обумовлений дією сил різання на шпиндель;  $M_C$  – крутний момент, який виникає в підшипнику передньої опори внаслідок повороту перерізу шпинделя;  $M_A$  – крутний момент, обумовлений кутовим переміщенням перерізу шпинделя в задній опорі;  $l_{AB}$ ,  $l_{BC}$ ,  $l_D$  – геометричні розміри шпинделя.

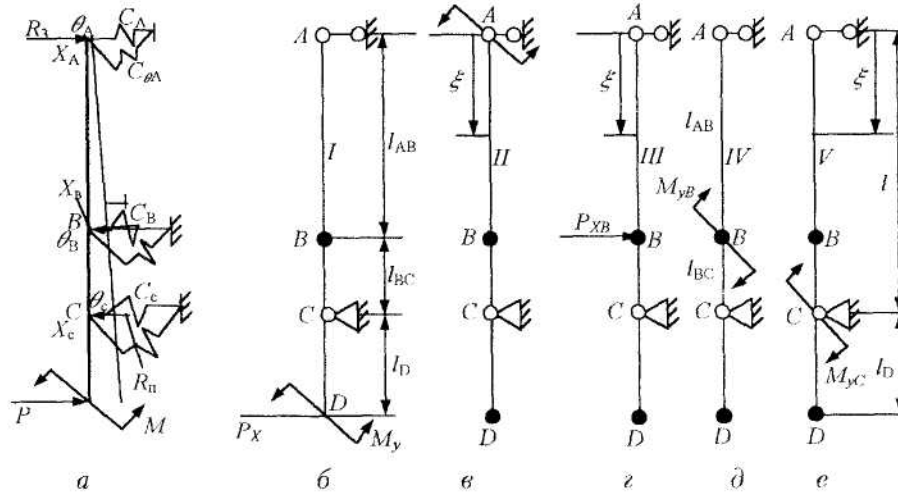


Рис. 2. Статично невизначена пружна система шпинделя (а), базова статично визначена пружна система (б) та додаткові пружні системи, які враховують: в – дію моменту в задній опорі шпинделя; з – дію поперечного зусилля в упорно-радіальному підшипнику; д – дію крутного моменту в упорно радіальному підшипнику; е – дію крутного моменту в роликівому підшипнику передньої опори шпинделя

При обертанні шпинделя проявляються неточності виготовлення підшипникових опор. Тому точки прикладення реакцій змінюються відносно деяких середніх значень.

Зміщення точок, в яких діють опорні реакції, залежать від численних факторів і є незначними. Тому можна вважати, що геометричні розміри  $l_{AB}$ ,  $l_{BC}$  і  $l_D$  мають незначні зміни випадкового характеру.

Відповідно випадковим чином змінюються і силові фактори. Випадкові силові фактори, які входять в рівняння (1) і (2), залежать від деформативності опор шпинделя. Деформативність опор описується суттєво нелінійними характеристиками. Згідно з [2], залежність деформації опори від навантаження визначається формулою:

$$\delta = k_3 \sqrt{\frac{R^2}{d_u Z^2}}, \tag{3}$$

де  $R$  – радіальне навантаження на підшипник;  $d_u$  – діаметр тіл кочення;  $Z$  – кількість тіл кочення.

Формула (3) є наближеною і змінюється в залежності від типу підшипника та умов його експлуатації.

Взагалі значення коефіцієнта  $k$ , що входить у формулу (3), залежить від багатьох факторів і є випадковою величиною. Тому статична характеристика опори шпинделя (3) включає в себе випадкові складові.

У загальному вигляді переміщення опори від навантаження запишемо у такому вигляді:

$$\delta = C_\delta f(R), \tag{4}$$

де  $f$  – деяка нелінійна функція навантаження на опору  $R$ ;  $C_\delta$  – коефіцієнт, що залежить від конструктивних параметрів опори.

Як функціональна залежність  $f$ , так і коефіцієнт  $C_\delta$  включають випадкові величини і змінюються випадковим чином при обертанні шпинделя.

Залежність (4) має місце і для поперечно-кутових переміщень опори. При цьому кутова деформація опори шпинделя буде:

$$\theta = C_\theta \cdot \varphi(M), \tag{5}$$

де  $C_\varphi$  – коефіцієнт, який залежить від конструктивних параметрів опори;  $\varphi$  – нелінійна функція, що визначає залежність кутової деформації  $\theta$  від крутного моменту в опорі.

Характеристика деформативності при поперечно-кутових переміщеннях шпинделя також включає випадкові складові.

Залежності (4) та (5) визначають взаємозв'язок відносно силових факторів у вигляді:

$$R = C_\delta^{-1} f^-(\delta); \tag{6}$$

$$M = C_\theta^{-1} \varphi^-(\theta), \tag{7}$$

де  $f^-$  та  $\varphi^-$  – функції, обернені до  $f$  і  $\varphi$ .

Залежності (6) та (7) також мають випадковий характер і змінюють в певних межах значення силових факторів відносно деяких середніх значень.

Визначимо переміщення опор шпинделя в радіально- і поперечно-кутовому напрямках. Переміщення задньої опори шпинделя (точка  $A$  на рис. 2) у радіальному напрямку складає:

$$\delta_A = C_{\delta A} f_A(R_A). \tag{8}$$

Відповідно поперечно-кутові переміщення задньої опори:

$$\theta_A = C_{\theta A} \varphi_A(M_A), \tag{9}$$

де  $C_{\delta A}$  і  $C_{\theta A}$  – коефіцієнти, які залежать від параметрів задньої опори;  $f_A$  – нелінійна характеристика жорсткості задньої опори шпинделя;  $\varphi_A$  – характеристика задньої опори по моменту, яка встановлює зв'язок кутових деформацій опори із реактивним моментом, який при цьому виникає. Ці коефіцієнти і функції, як показано раніше, мають випадкові складові. Переміщення упорно-радіального підшипника, обумовлене його деформативністю, залежать від радіального навантаження та від крутного моменту і визначаються залежностями:

$$\delta_B = C_{\delta B} f_B(P_B); \tag{10}$$

$$\theta_B = C_{\theta B} \varphi_B(M_B), \tag{11}$$

де  $C_{\delta B}$  і  $C_{\theta B}$  – коефіцієнти, які залежать від конструктивних параметрів упорно-радіального підшипника;  $P_B$  – радіальне зусилля в упорно-радіальному підшипнику;  $M_B$  – крутний момент, який виникає в упорно-радіальному підшипнику.

Переміщення шпинделя в області передньої опори визначається формулою:

$$\delta_C = C_{\delta C} f_C(R_{II}), \tag{12}$$

де  $C_{\delta C}$  – коефіцієнт, який залежить від конструктивних параметрів роликowego підшипника;  $R_{II}$  – реакція передньої опори шпинделя;  $f_C$  – нелінійна статична характеристика жорсткості роликowego підшипника.

Поперечно-кутові деформації роликowego підшипника описуються залежністю:

$$\theta_C = C_{\theta C} \varphi_C(M_C), \tag{13}$$

де  $C_{\theta C}$  – коефіцієнт, який залежить від конструктивних параметрів підшипника;  $M_C$  – крутний момент, який виникає при поперечно-кутових переміщеннях шпинделя в роликowego підшипнику;  $\varphi_C$  – нелінійна статична характеристика підшипника при поперечно-кутових переміщеннях шпинделя.

Залежності (8)–(13) є характеристиками опор, які враховують випадкові зміни жорсткісних параметрів.

Визначимо деформації шпинделя як статично невизначеної деформативної системи.

При розгляді деформацій шпинделя перейдемо до нової системи відліку, яка відповідає лінії, що проходить через точки  $A$  і  $C$  із врахуванням їх зміщення. При цьому радіальні деформації передньої та задньої опор шпинделя виключаються з розгляду при оцінці деформативності шпинделя. Дані деформації враховуються як додатковий силовий фактор в упорно-радіальному підшипнику.

В даній системі відліку радіальна деформація шпинделя в області упорно-радіального підшипника складає:

$$\Delta_B = \delta_B - \delta_A - \delta_C \frac{l_{AB}}{l}. \tag{14}$$

Підставимо значення радіальних деформацій опор із залежностей (8)–(10), (12) і визначимо статичну характеристику радіальної деформативності шпинделя в області упорно-радіального підшипника:

$$\Delta_B = C_{\delta B} f_B(P_B) - C_{\delta A} f_A(R_A) - C_{\delta C} \frac{l_{AB}}{l} f_C(P_{II}) - \text{включає випадкові складові.} \quad (15)$$

Залежність (15) дає можливість визначити деформацію власне шпинделя в області упрорно-радіального підшипника.

Введення нової системи відліку призводить до появи переміщення кінцевої частини шпинделя на величину:

$$\Delta_D = \delta_A + \delta_C \frac{l + l_D}{l}. \quad (16)$$

При цьому виникає і кутове переміщення кінцевої частини шпинделя:

$$\theta_{\omega D} = \arctg \left[ \frac{\delta_C - \delta_A}{l} \right] \cong \frac{\delta_C - \delta_A}{l}. \quad (17)$$

Радіальне: кутове переміщення включає випадкові складові.

Розглянемо статично невизначену систему шпинделя у введений системі відліку.

Для визначення деформативності пружної системи шпинделя виділимо базову статично-визначену систему I (рис. 2, б). Вона представляє собою балку на двох опорах, навантажену силою і моментом на консолі. Виділимо також допоміжні статично визначені системи (рис. 2, в-е).

Розглянемо окремо деформації шпинделя в кожній із статично визначених систем.

Базова статично визначена система (рис. 2, в) відповідає балці на двох опорах, навантаженій зосередженою силою та моментом на консолі.

З метою спрощення будемо розглядати окремо дію зосередженої сили і дію зосередженого моменту.

Визначимо форму пружної лінії осі балки на двох опорах, навантаженої зосередженою силою на консолі (рис. 2, б).

Реакції опор для цієї балки визначимо із умов рівноваги:

$$\begin{cases} R_A - R_C + P_x = 0 \\ lR_A = l_D P_x \end{cases} \quad (18)$$

Розв'язавши систему (18), знайдемо:

$$R_A = \frac{P_x l_D}{l}; \quad R_C = P_x \left( \frac{1 + l_D}{l} \right).$$

Таким чином, опорні реакції для даної балки будуть випадковими величинами, що залежать від випадкових змін проекції сили різання  $P_x$  та випадкових змін геометричних розмірів, які характеризують точки оширання.

Рівняння пружної осі балки між точками А і С, згідно з [3]:

$$X_{\delta 1} = \frac{P_x l_D}{GEJ} (g^3 - l^2 g), \quad (19)$$

де  $g$  – поточна координата, яка вимірюється вздовж балки, починаючи з точки А;  $X_{\delta 1}$  – деформація в напрямку осі X;  $E$  – модуль пружності матеріалу шпинделя;  $J$  – момент інерції перерізу шпинделя (еквівалентний).

В залежність (19) входять геометричні розміри пружної системи шпинделя ( $l, l_D$ ). Ці розміри мають невеликі випадкові зміни. Тому переміщення перерізів шпинделя буде мати додаткову випадкову складову, обумовлену змінами геометричних розмірів. Ця додаткова складова буде визначати випадкові зміни коефіцієнта жорсткості шпинделя.

Кут повороту перерізу балки визначається диференціюванням даної залежності і складає:

$$\theta_{\delta 1} = \frac{dX_{\delta 1}}{dg} = \frac{P_x l_D}{GEJ} (3g^2 - l^2). \quad (20)$$

Враховуючи, що сила  $P_x$  має випадкову складову, а геометричні розміри, які характеризують відстань між опорами, також мають випадкові флуктуації, формула (20) визначає кут повороту перерізу шпинделя із випадковою складовою.

Визначимо кути повороту перерізу (кут нахилу) для окремих точок шпинделя.

Для опори А кут нахилу складає:

$$X_{\delta 1} = \frac{P_x l_D}{GEJ} (g^3 - l^2 g). \quad (21)$$



Для опори  $C$  кут нахилу буде:

$$\theta_{sc1} = \frac{P_x l_D l}{3EJ}. \quad (22)$$

Ці кути нахилу також будуть змінюватись випадковим чином в залежності від випадкових змін сили різання та від зміни положення точок опори шпинделя.

Положення фрези визначається радіальним зміщенням та кутом повороту кінця шпинделя, яке відповідає переміщенню консольного краю балки (точка  $D$ ).

Згідно з [3], переміщення кінця балки (точка  $D$ ) складає:

$$X_{sd1} = \frac{P_x l_D^2 (l + l_D)}{3EJ}. \quad (23)$$

Кут повороту перерізу балки на кінці:

$$\theta_{sd1} = \frac{P_x l_D (2l + 3l_D)}{GEJ}. \quad (24)$$

Переміщення та кут повороту кінця балки також мають випадкові складові.

Розглянемо балку, навантажену моментом  $M_y$  на кінці консолі (рис. 2, б). Реакції опор для цієї балки визначимо із умов рівноваги сил:

$$R_1 = R_2 = \frac{M_y}{l}. \quad (25)$$

Рівняння пружної осі балки між опорами визначається залежністю [3]:

$$X_{s2} = \frac{M_y}{GEJ} [g^3 - l^2 g]. \quad (26)$$

Враховуючи, що момент сил різання є випадковою величиною, а розміри, що характеризують точки опори балки, мають випадкові флуктуації, формула (26) визначає випадкове зміщення перерізу шпинделя.

Кут повороту перерізів балки на проміжку між опорами  $A$  і  $C$  складає:

$$\theta_{s2} = \frac{M_y}{GEJ} (3g^2 - l^2). \quad (27)$$

Дана формула також визначає випадкову величину поперечно-кутового зміщення перерізів балки під дією випадкового моменту при випадкових змінах точок опори балки.

Формули (26) і (27) дають поперечні та кутові деформації балки між опорами. Для консольної частини балки формули переміщень мають інший вигляд.

Переміщення консольної частини балки визначається залежністю:

$$X_{s2} = \frac{M_y}{GEJ} [3(g - l)^2 - 2l(g - l)]. \quad (28)$$

Для кінця балки переміщення складає:

$$X_{sd2} = \frac{M_y}{GEJ} [3l_D^2 - 2l \cdot l_D]. \quad (29)$$

Дана формула в цілому аналогічна залежності (23) і визначає випадкові зміщення консольної частини балки під дією випадкового моменту сил різання із врахуванням випадкових змін точок опори балки.

Кут повороту перерізів консольної частини балки складає:

$$\theta_{s2} = \frac{dX\delta}{dg} = \frac{M_y}{EJ} \left[ g - \frac{2}{3}l \right]. \quad (30)$$

Для кінця балки кут повороту перерізу буде випадковою величиною, яка визначається за формулою:

$$\theta_{sd2} = \frac{M_y}{EJ} \left( l_D + \frac{l}{3} \right). \quad (31)$$

Для опори  $C$  кут нахилу перерізу балки буде залежати від випадкового моменту згідно з формулою:

$$\theta_{sc2} = \frac{M_y l}{3EJ}. \quad (32)$$

Складаючи поперечні та кутові деформації балки, що виникають при дії зосередженої сили

та зосередженого моменту, визначимо загальну деформативність балки, яка відповідає базовій статично визначеній схемі, наведеній на рис. 2, б).

Для врахування наявності статичної невизначеності пружної системи шпинделя розглянемо замкнений ряд статично визначених систем у вигляді окремих елементарних балок (рис. 2, в-е).

Визначимо поперечні та кутові переміщення окремих випадків елементарних балок.

Для випадку балки, навантаженої на опорі *A* крутним моментом, (рис. 2, в) прогини балки між точками *A* і *C* будуть визначатися залежністю:

$$X_B = \frac{M_{yA}(l-g)}{GEJ} \left[ 1 - \frac{(l-g)^2}{l^2} \right]. \quad (33)$$

Перетворимо дану залежність до виду:

$$X_B = \frac{M_{yA}}{GEJ} \left[ 2gl - 3g^2 + \frac{g^3}{l} \right]. \quad (34)$$

Кут повороту балки на ділянці *AC* складає:

$$\theta_B = \frac{dX_B}{dg} = \frac{M_{yA}}{3EJ} \left[ l - g + \frac{g^2 \cdot 3}{l} \right]. \quad (35)$$

Переміщення та кут повороту, які відповідають формулам (34) та (35), визначають випадкові деформації елементарної балки, навантаженої на опорі *A* крутним моментом.

Кут повороту балки в точці *C* можна одержати з формули (35) шляхом підстанови  $g = l$ . Він складає:

$$\theta_{BC} = -\frac{M_{yA}l}{GEJ}. \quad (36)$$

Для консольної частини балки (ділянка *CD*) пружна лінія буде прямою і буде визначатися рівнянням:

$$X_B = \theta_{BC} \cdot (g-l), \quad l \leq g \leq l+l_D. \quad (37)$$

Враховуючи наявні випадкові зміни моменту  $M_{yA}$  та міжопорної відстані  $l$ , які входять у формули (36) та (37), пряма, яка визначає прогин консолі, буде мати випадковий кут нахилу.

Розглянемо наступну елементарну балку (рис. 2, з).

Для випадку балки, навантаженої силою між опорами, рівняння пружної осі, згідно з [3]:

$$X_{21} = \frac{P_{XB} \cdot l_{BC} \cdot g}{GIEJ} (l^2 - l_{BC}^2 - g^2) \quad \text{при} \quad g \leq l_{AB}; \quad (38)$$

$$X_{21} = \frac{P_{XB} \cdot l_{BC} \cdot g}{GIEJ} (l^2 - l_{BC}^2 - g^2) + \frac{P_{XB}(g-l_{AB})^3}{GEJ} \quad \text{при} \quad l_{AB} < g < l. \quad (39)$$

Кути повороту перерізів балки, навантаженої зусиллям між опорами, будуть різними для різних ділянок і складуть:

$$\theta_{21} = \frac{dX_{21}}{dg} = \frac{P_{XB}l_{BC}}{GIEJ} (l^2 - l_{BC}^2) - \frac{P_{XB}l_{BC}}{2IEJ} g^2 \quad \text{при} \quad g \leq l_{AB}; \quad (40)$$

$$\theta_{22} = \frac{P_{XB}l_{BC}}{GIEJ} (l^2 - l_{BC}^2) - \frac{P_{XB}l_{BC}}{2IEJ} g^2 + \frac{P_{XB}(g-l_{AB})^2}{2EJ} \quad \text{при} \quad l_{AB} < g < l. \quad (41)$$

Значення прогинів  $X_{21}$  та  $X_{22}$  і кутових переміщень  $\theta_{21}$  та  $\theta_{22}$  будуть мати випадкові складові, обумовлені випадковими змінами сил  $P_x$  і випадковими флуктуаціями геометричних розмірів балки.

Кутове переміщення балки в точці *C* складає:

$$\theta_C = P_{XB} \frac{1}{GEJl} \left[ l_{BC}(l^2 - l_{BC}^2) - 3l_{BC}l^2 + 3l(l-l_{AB})^2 \right]. \quad (41a)$$

Дане кутове переміщення зберігається для всієї консольної частини балки, зокрема, для точки *D*.

Поперечне переміщення точки *D* буде складати:

$$X = \theta_C l_D. \quad (41б)$$

Розглянемо елементарну балку, що знаходиться під дією крутного моменту, прикладеного в точці *B*.

Для випадку балки, навантаженої моментом в середині (рис. 2, *д*), пружна лінія осі для ділянки *AB* буде:

$$X_{\delta} = \frac{M_{yB}g}{2l^2 EJ} \left[ l_{AB}^2 \left( l_{BC} + \frac{l_{AB}}{3} \right) - \frac{2}{3} l_{BC}^3 \right] - \frac{M_{yB}g^3}{6IEJ}. \quad (42)$$

Як і раніше, ця залежність визначає випадкові прогини шпинделя, що відповідають даній елементарній балці.

Визначимо кут повороту перерізу балки для ділянки *AB* шляхом диференціювання (42):

$$\theta_{\delta} = \frac{dX_{\delta}}{dg} = \frac{M_{yB}}{2l^2 EJ} \left[ l_{AB}^2 \left( l_{BC} + \frac{l_{AB}}{3} \right) - \frac{2}{3} l_{BC}^3 \right] - \frac{M_{yB}g^2}{2IEJ}. \quad (43)$$

Кути повороту перерізів балки для точки *A* і *C* складуть:

$$\theta_{\delta A} = \frac{M_{yB}}{2l^2 EJ} \left[ l_{AB}^2 \left( l_{ABC} + \frac{l_{AB}}{3} \right) - \frac{2}{3} l_{BC}^3 \right]; \quad (44)$$

$$\theta_{\delta C} = -\frac{M_{yB}}{2IEJ} \left( \frac{l^2}{3} - l_{AB}^2 \right). \quad (45)$$

Рівняння пружної осі балки на ділянці *CD* буде визначатися через кут повороту  $\theta_{\delta C}$  і буде мати вигляд:

$$X_{\delta} = \theta_{\delta C} (g - l), \quad l < g < l + l_D. \quad (46)$$

Всі деформаційні характеристики даної елементарної балки, визначені у вигляді залежностей (42)–(46), є випадковими величинами.

Розглянемо пастушину елементарну балку, яка відповідає балці на двох опорах, навантаженої зосередженим моментом на опорі *C* (рис. 2, *е*).

Для випадку балки, наведеної на рис. 2, *е*, пружна лінія визначена у вигляді (для перерізів між точками *A* і *C*):

$$X_e = \frac{M_{yC}gl}{GEJ} \left( 1 - \frac{g^2}{l^2} \right). \quad (47)$$

Кут повороту балки в перерізах між опорами складає:

$$\theta_e = \frac{dX_e}{dg} = \frac{M_{yC}l}{GEJ} \left[ 1 - 3 \frac{g^2}{l^2} \right]. \quad (48)$$

Для опори *C* кут повороту перерізу балки відповідно одержимо із (2) за допомогою підстановки  $g = l$ :

$$\theta_{ec} = \frac{-M_{yC}l}{3EJ}. \quad (49)$$

Для консольної частини балки (ділянка *CD*  $g = l \dots l + l_D$ ) пружна лінія балки визначиться як:

$$X_e = \theta_{ec} (g - l), \quad l \leq g \leq l + l_D. \quad (50)$$

Формули (47)–(50), як і раніше, визначають випадкові прогини та випадкові поперечно-кутові переміщення елементарної балки.

Загальні переміщення шпинделя будуть складені із переміщень окремих елементарних балок.

Визначимо сумарні поперечні переміщення в точці *B* та кутові переміщення перерізів шпинделя в точках *A*, *B* і *C*. Для цього використаємо принцип суперпозиції дії сил. Переміщення в точці *BC* буде визначатися як:

$$X_B = X_{\delta 1B} + X_{\delta 2B} + X_{eB} + X_{2B} + X_{\delta B} + X_{Be}, \quad (51)$$

де  $X_{\delta 1B}$ ,  $X_{\delta 2B}$  – переміщення точки *B* під дією сили  $P_x$  та моменту  $M_y$  на балку, зображену на рис. 2, *б*;

$X_{eB}$  – переміщення точки *B* під дією моменту в опорі *A*, згідно зі схемою, наведеною на рис. 2, *в*;

$X_{2B}$  – переміщення точки *B* під дією поперечної сили в цій самій точці (рис. 2, *г*);

$X_{\delta B}$  – переміщення точки *B* під дією моменту в цій точці, згідно зі схемою, наведеною на рис. 2, *д*;



$X_{Bc}$  – переміщення точки  $B$  під дією моменту, який виникає в передній опорі шпинделя (точка  $C$  на рис. 2,  $e$ ).

Враховуючи, що окремі складові переміщень, які входять у формулу (51), є випадковими величинами, отримаємо загальне переміщення також у вигляді випадкового значення  $X_B$ .

Переміщення точок  $B$  залежить від усіх силових факторів.

Підставивши значення складових переміщень точки  $B$  із формул (19), (26), (34), (38), (42), (47) для  $g = l_{AB}$ , одержимо загальне переміщення точки  $B$ :

$$X_B = P_x K_{PXB} + M_y K_{MyB} + M_{yA} K_{MyAB} + P_{xB} K_{PXB} + M_{yB} K_{MyBB} + M_{yC} K_{MyCB}, \quad (52)$$

де в правій частині знаходяться лінійні комбінації двох заданих  $P_x$  та  $M_y$  і чотирьох невідомих  $M_{yA}$ ,  $P_{xB}$ ,  $M_{yB}$ ,  $M_{yC}$  випадкових силових факторів. Коефіцієнти при силових факторах, що входять у формулу (52), також є випадковими величинами, які визначаються змінами геометричних розмірів, що характеризують точки опираювання шпинделя при його повороті.

Невідомі силові фактори визначимо як крутні моменти в опорах ( $M_{yA}$  – крутний момент в задній опорі шпинделя;  $M_{yC}$  – крутний момент в роликівому підшипнику шпинделя;  $M_{yB}$  – крутний момент в упорно-радіальному підшипнику, та  $P_{xB}$  – радіальне зусилля, яке виникає в радіально-упорному підшипнику).

Коефіцієнти, які входять в залежність (52), визначаються із формул (19), (26), (34), (38), (42) та (47), в яких значення поточної координати  $g = l_{AB}$ . Остаточні значення коефіцієнтів, виражені через параметри шпинделя, розраховуються за формулами:

$$K_{PXB} = \frac{l_D}{GEJl} (l_{AB}^3 - l^2 l_{AB}); \quad (53)$$

$$K_{MyB} = \frac{1}{GEJl} (l_{AB}^3 - l^2 l_{AB}); \quad (54)$$

$$K_{MyAB} = \frac{1}{GEJ} (2l_{AB} - 3l_{AB}^2 + l_{AB}^3 / l); \quad (55)$$

$$K_{PXB} = \frac{l_{BC} \cdot l_{AB}}{GEJl} (l^2 - l_{BC}^2 - l_{AB}^2); \quad (56)$$

$$K_{MyBB} = \frac{l_{AB}}{2EJl^2} \left[ l_{AB}^2 \left( l_{BC} + \frac{l_{AB}}{3} \right) - \frac{2}{3} l_{BC}^3 \right] - \frac{l_{AB}^3}{GEJ}; \quad (57)$$

$$K_{MyCB} = \frac{l_{AB} \cdot l}{GEJ} (1 - l_{AB}^2 / l^2). \quad (58)$$

Як вказано раніше, розраховані значення коефіцієнтів включають випадкові складові.

Ці випадкові складові визначаються зміною геометричних розмірів  $l_D$ ,  $l_{AB}$ ,  $l_{BC}$  та  $l$ . Ці геометричні розміри мають випадкові флуктуації в обсязі кількох відсотків від номінальної відстані шпинделя між передньою та задньою опорами.

Виконаємо оцінку випадкових змін коефіцієнтів. Коефіцієнти, що визначають залежність переміщення від сил (формули (53), (56)), мають порядок кубу геометричного розміру:

$$K_1 \approx l^3,$$

а коефіцієнти, які визначають залежність переміщення від моменту (формули (54), (57), (58)), мають порядок:

$$K_2 \approx l^2.$$

Відповідно відносні випадкові зміни цих груп коефіцієнтів складуть:

$$\Delta K_1 = \frac{1}{K_1} \cdot dK_1 \approx \frac{dl}{l}; \quad \Delta K_2 = \frac{1}{K_2} \cdot dK_2 \approx \frac{dl}{l}.$$

В давих формулах враховано, що диференціали коефіцієнтів:

$$dK_1 = \frac{\partial K_1}{\partial l} \cdot dl \cong 3l^2 \cdot dl;$$

$$dK_2 = \frac{\partial K_2}{\partial l} \cdot dl \cong 2l \cdot dl,$$

тобто порядок випадкових змін коефіцієнтів відповідає порядку відносних випадкових змін геометричних розмірів, які характеризують положення точок опори шпинделя, (1...2 %). Тому

випадкові зміни коефіцієнтів відносно номінальних значень є невеликими і складають 1...2 % від номінальних значень.

Визначимо загальне кутове зміщення перерізу шпинделя в області задньої опори. Воно також залежить від усіх випадкових силових факторів.

Підставивши значення складових поперечного кутового переміщення точки  $A$  із формул (21), (27), (35), (40), (44) та (48), для значення поздовжньої координати  $g = 0$ , що відповідає точці  $A$ , одержимо загальне кутове переміщення перерізу шпинделя:

$$\theta_A = P_x \cdot K_{PXB_A} + M_y \cdot K_{MyB_A} + M_{yA} \cdot K_{MyA_A} + P_{XB} \cdot K_{PXB_A} + M_{yB} \cdot K_{MyB_A} + M_{yC} \cdot K_{MyC_A} \quad (59)$$

В цій залежності, як і в (52), наявна лінійна комбінація заданих і невідомих силових факторів.

Оскільки силові фактори є випадковими, то і загальне переміщення  $\theta_A$  є випадковою величиною. Ця випадкова величина залежить, зокрема, від зміни геометрії, які враховані коефіцієнтами.

Коефіцієнти при силових факторах визначаються із формул (21), (27), (35), (40), (44), (48) при  $g = 0$  і складають:

$$K_{PXB_A} = -\frac{l_D l}{GEJ}; \quad (60)$$

$$K_{MyB_A} = -\frac{l}{GEJ}; \quad (61)$$

$$K_{MyA_A} = \frac{l}{3EJ}; \quad (62)$$

$$K_{PXB_B} = \frac{l_{BC}(l^2 - l_{BC}^2)}{GIEJ}; \quad (63)$$

$$K_{MyB_B} = \frac{1}{2l^2 EJ} \left[ l_{AB}^2 \left( l_{BC} + \frac{l_{AB}}{3} \right) - \frac{2}{3} l_{BC}^3 \right]; \quad (64)$$

$$K_{MyC_A} = \frac{l}{GEJ}. \quad (65)$$

Дані коефіцієнти включають геометричні параметри шпинделя, які є випадковими величинами. Коефіцієнти, визначені за формулами (60) та (63), пропорційні квадрату геометричного розміру, тобто:

$$K_1 \approx l^2.$$

Останні коефіцієнти пропорційні першому степеню геометричного розміру, тобто:

$$K_2 \approx l.$$

Відповідно диференціали коефіцієнтів будуть пропорційними:

$$dK_1 = \frac{\partial K_1}{\partial l} \cdot dl \approx 2l \cdot d \cdot l;$$

$$dK_2 = \frac{\partial K_2}{\partial l} \cdot dl \approx dl.$$

Відносні зміни коефіцієнтів будуть:

$$\Delta_{K_1} = \frac{dK_1}{K_1} \approx \frac{dl}{l}; \quad \Delta_{K_2} = \frac{dK_2}{K_2} \approx \frac{dl}{l}.$$

Таким чином, порядок відносних випадкових змін коефіцієнтів відповідає порядку відносних випадкових змін геометричних параметрів, що характеризують схему опирання шпинделя.

Визначимо загальне кутове переміщення перерізу шпинделя в області упорно-радіального підшипника.

Підставимо значення складових поперечно-кутового переміщення точки  $B$  із формул (20), (27), (35), (40), (43), (48) для значення поздовжньої координати  $g = l_{AB}$  і одержимо кутове переміщення перерізу шпинделя в точці  $B$ :

$$\theta_B = P_X \cdot K_{PX\theta B} + M_y \cdot K_{My\theta B} + M_{yA} \cdot K_{MyA\theta B} + P_{XB} \cdot K_{PXB\theta B} + M_{yB} \cdot K_{MyB\theta B} + M_{yc} \cdot K_{Myc\theta B}. \quad (66)$$

Дане кутове переміщення також є випадковою величиною.

Коефіцієнти лінійної комбінації силових факторів у правій частині даної залежності визначені з формул (20), (27), (35), (40), (43), (48):

$$K_{PX\theta B} = \frac{I_D}{GEJl} (3l_{AB}^2 - l^2); \quad (67)$$

$$K_{My\theta B} = \frac{1}{GEJl} (3l_{AB}^2 - l^2); \quad (68)$$

$$K_{MyA\theta B} = \frac{1}{EJ} \left( \frac{l}{3} - l_{AB} + \frac{l_{AB}^2}{2l} \right); \quad (69)$$

$$K_{PXB\theta B} = \frac{l_{BC}(l^2 - l_{BC}^2)}{GEJ} - \frac{l_{BC}l_{AB}^2}{2lEJ}; \quad (70)$$

$$K_{MyB\theta B} = \frac{1}{2l^2EJ} \left[ l_{AB}^2 \left( l_{BC} + \frac{l_{AB}}{3} \right) - \frac{2}{3} l_{BC}^3 - l_{AB}^2 \right]; \quad (71)$$

$$K_{Myc\theta B} = \frac{l}{GEJ} \left( 1 - 3 \frac{l_{AB}^2}{l^2} \right). \quad (72)$$

Аналогічним чином визначається кутове переміщення перерізу шпинделя в області роликів підшипника передньої опори шпинделя. Складові переміщення визначаються формулами (22), (32), (36), (41), (45), (49).

$$\theta_C = P_X \cdot K_{PX\theta C} + M_y \cdot K_{My\theta C} + M_{yA} \cdot K_{MyA\theta C} + P_{XB} \cdot K_{PXB\theta C} + M_{yB} \cdot K_{MyB\theta C} + M_{yc} \cdot K_{Myc\theta C}. \quad (73)$$

Коефіцієнти при силових факторах визначаються згідно з формулами (22), (32), (36), (41), (45), (49):

$$K_{PX\theta C} = \frac{I_D l}{3EJ}; \quad (74)$$

$$K_{My\theta C} = \frac{l}{3EJ}; \quad (75)$$

$$K_{MyA\theta C} = -\frac{l}{GEJ}; \quad (76)$$

$$K_{PXB\theta C} = \frac{l_{BC}(l^2 - l_{BC}^2)}{GEJ} - \frac{l_{BC}l^2}{2lEJ} + \frac{(l - l_{AB})^2}{2EJ}; \quad (77)$$

$$K_{MyB\theta C} = \frac{1}{2lEJ} \left( \frac{l^2}{3} - l_{AB}^2 \right); \quad (78)$$

$$K_{Myc\theta C} = -\frac{l}{3EJ}. \quad (79)$$

Формули для визначення коефіцієнтів по групах (60)–(65); (67)–(72); (74)–(79) в цілому мають однаковий порядок залежності від геометричних розмірів ( $l$ ). Тому порядок зміни коефіцієнтів у групах формул (67)–(72) і (74)–(79) відповідає встановленому раніше порядку зміни коефіцієнтів у формулах (60)–(65). Відповідно порядок відносних випадкових змін коефіцієнтів у формулах (67)–(72) та (74)–(79) складає  $K \approx \frac{dl}{l}$  і відповідає порядку відносних випадкових змін геометричних параметрів шпинделя.

Визначені залежностями (52), (59) та (73) поперечні та кутові переміщення повинні відповідати деформаціям опор, що визначаються за формулами (15), (9), (11), (13). Останні залежності використовуються для проєкцій навантажень на вісь X і мають наступний вигляд.

Із формули (15) одержимо ( $X_B = \Delta_B$ ):

$$K_B = C_{SB} f_B(P_{XB}) - C_{SA} f_A(R_3) - C_{\infty} \frac{l_{AB}}{l} f_C(R_{II}). \quad (80)$$

Із формули (9), (11), (13) знайдемо:

$$\begin{aligned} \theta_A &= C_{\theta A} \cdot \varphi_A(M_{yA}) & (M_A = M_{yA}); \\ \theta_B &= C_{\theta B} \cdot \varphi_B(M_{yB}) & (M_D = M_{yB}); \\ \theta_C &= C_{\theta C} \cdot \varphi_C(M_{yC}) & (M_C = M_{yC}). \end{aligned}$$

Три останні нелінійні залежності розкладемо в ряд Маклорена і одержимо значення кутів у вигляді суми лінійних складових і нелінійних випадкових складових, а саме:

$$\theta_A = Q_{\theta A} \cdot M_{yA} + R_{\theta A}; \tag{81}$$

$$\theta_B = Q_{\theta B} \cdot M_{yB} + R_{\theta B}; \tag{82}$$

$$\theta_C = Q_{\theta C} \cdot M_{yC} + R_{\theta C}. \tag{83}$$

В дані формули входять коефіцієнти, які визначаються згідно з залежностями:

$$\left. \begin{aligned} Q_{\theta A} &= C_{\theta A} \cdot \left. \frac{\partial \varphi_A}{\partial M_{yA}} \right|_{M_{yA}=0} \\ Q_{\theta B} &= C_{\theta B} \cdot \left. \frac{\partial \varphi_B}{\partial M_{yB}} \right|_{M_{yB}=0} \\ Q_{\theta C} &= C_{\theta C} \cdot \left. \frac{\partial \varphi_C}{\partial M_{yC}} \right|_{M_{yC}=0} \end{aligned} \right\}. \tag{83a}$$

Дані коефіцієнти представляють собою лінеаризовані характеристики опор при їх кутовому переміщенні, обумовленому моментним навантаженням.

В залежності (81)–(83) входять нелінійні складові поперечно-кутових переміщень опор. Вони визначаються за формулами (81)–(83) із врахуванням залежності (3). Для кожної із опор одержимо:

$$\begin{aligned} R_{\theta A} &= -M_{yA} \left( Q_{\theta A} - \frac{K_{\theta A}}{\sqrt[3]{M_{yA}}} \right); \\ R_{\theta B} &= -M_{yB} \left( Q_{\theta B} - \frac{K_{\theta B}}{\sqrt[3]{M_{yB}}} \right); \\ R_{\theta C} &= -M_{yC} \left( Q_{\theta C} - \frac{K_{\theta C}}{\sqrt[3]{M_{yC}}} \right). \end{aligned} \tag{83b}$$

Всі параметри, які входять в залежності (81)–(83), змінюються випадково.

До отриманих залежностей (20)–(83) додаються рівняння статки (1) і (2), які для випадку плоскої системи сил, розташованих в площині XOZ, мають вигляд:

$$\begin{cases} P_X - R_{II} + R_3 - P_{XB} = 0 \\ M_y + M_{yB} + P_X(l_{BC} + l_D) - R_{II}l_{BC} + M_{yC} - R_3 \cdot l_{AB} + M_{yA} = 0 \end{cases} \tag{84}$$

Розв'яжемо систему рівнянь (84) відносно опорних реакцій  $R_{II}$  і  $R_3$ . Остаточоно знайдемо:

$$\begin{aligned} R_3 &= P_X \left( \frac{l_D}{l_{AB} + l_{BC}} \right) + P_{XB} \left[ 1 - \frac{l_{AB}}{l_{AB} + l_{BC}} \right] + \\ &+ \left( \frac{1}{l_{AB} + l_{BC}} \right) \cdot [M_y + M_{yB} + M_{yC} + M_{yA}] \end{aligned} \tag{85}$$

$$R_{II} = P_X \left[ 1 + \frac{l_D}{l_{AB} + l_{BC}} \right] - \left[ \frac{l_{AB}}{l_{AB} + l_{BC}} \right] P_{XB} - \frac{1}{(l_{AB} + l_{BC})} \cdot [M_y + M_{yB} + M_{yC} + M_{yA}]. \tag{86}$$

Дані значення підставимо у формулу (80) і одержимо величину  $X_B$  у функції силових факторів:

$$\begin{aligned}
 X_B = & C_{\delta B} f_B(P_{XB}) - C_{\delta A} f_A \left\{ P_X \frac{l_D}{l} + P_{XB} \left[ 1 - \frac{l_D}{l} \right] + \frac{1}{l} (M_y + M_{yB} + M_{yC} + M_{yA}) \right\} - \\
 & - C_{\delta C} \frac{l_{AB}}{l} f_C \left[ P_X \left( 1 + \frac{l_D}{l} \right) - P_{XB} \frac{l_{AB}}{l} + \frac{1}{l} (M_y + M_{yB} + M_{yC} + M_{yA}) \right].
 \end{aligned}
 \tag{87}$$

У правій частині формули (87) знаходиться нелінійна функція випадкових параметрів. Подамо її у вигляді розкладу в ряд Тейлора, записавши як суму лінійної та додаткової нелінійної частин:

$$\begin{aligned}
 X_B = & Q_{PX B} \cdot P_X + M_y \cdot Q_{My B} + M_{yA} \cdot Q_{My AB} + \\
 & + P_{XB} \cdot Q_{PX BB} + M_{yB} \cdot Q_{My BB} + M_{yC} \cdot Q_{My CB} + R_{XB}
 \end{aligned}
 \tag{88}$$

В дану залежність входять коефіцієнти, які є випадковими величинами і визначаються через геометричні та силові характеристики шпіндельного вузла згідно з залежностями:

$$Q_{PX B} = C_{\delta A} \left. \frac{\partial f_A}{\partial P_X} \right|_{P_X = 0} + \left. \frac{\partial f_C}{\partial P_X} \right|_{P_X = 0} = C_{\delta C} \frac{l_{AB}}{l};
 \tag{89}$$

$$Q_{My B} = C_{\delta A} \left. \frac{\partial f_A}{\partial M_y} \right|_{M_y = 0} + C_{\delta C} \frac{l_{AB}}{l} \cdot \left. \frac{\partial f_C}{\partial M_y} \right|_{M_y = 0};
 \tag{90}$$

$$Q_{My AB} = C_{\delta A} \left. \frac{\partial f_A}{\partial M_{yA}} \right|_{M_{yA} = 0} + C_{\delta C} \frac{l_{AB}}{l} \cdot \left. \frac{\partial f_C}{\partial M_{yA}} \right|_{M_{yA} = 0};
 \tag{91}$$

$$Q_{PX BB} = C_{\delta B} \left. \frac{\partial f_B}{\partial P_{XB}} \right|_{P_{XB} = 0} + C_{\delta A} \cdot \left. \frac{\partial f_A}{\partial P_{XB}} \right|_{P_{XB} = 0} + C_{\delta C} \frac{l_{AB}}{l} \cdot \left. \frac{\partial f_C}{\partial P_{XB}} \right|_{P_{XB} = 0};
 \tag{92}$$

$$Q_{My BB} = C_{\delta A} \left. \frac{\partial f_A}{\partial M_{yB}} \right|_{M_{yB} = 0} + C_{\delta C} \frac{l_{AB}}{l} \cdot \left. \frac{\partial f_C}{\partial M_{yB}} \right|_{M_{yB} = 0};
 \tag{93}$$

$$Q_{My CB} = C_{\delta A} \left. \frac{\partial f_A}{\partial M_{yC}} \right|_{M_{yC} = 0} + C_{\delta C} \frac{l_{AB}}{l} \cdot \left. \frac{\partial f_C}{\partial M_{yC}} \right|_{M_{yC} = 0}.
 \tag{94}$$

Частинні похідні, які знаходяться в правих частинах формул (89)–(94), знаходяться шляхом диференціювання силових характеристик опор, визначених за залежностями (8), (10) та (12).

У формулу (88) входить нелінійна випадкова складова змінних  $R_{XB}$ , яка залежить від всіх



силових факторів. Нелінійна випадкова складова в цілому відповідає нелінійним складовим, які входять у формули (81)–(83), що є основою визначення кутових переміщень опор.

Вона визначається із формули (88) із врахуванням залежності (6):

$$R_{XB} = C_{\delta}^{-1} f^{-}(X_B) - Q_{PXB} \cdot P_X - Q_{MyB} \cdot M_y - Q_{MyAB} \cdot M_{yA} - P_{XB} \cdot Q_{PXBB} - M_{yB} \cdot Q_{MyBB} \quad (95)$$

В дану залежність входить нелінійна характеристика упорно-радіального підшипника, яка визначається як функція, обернена лінійній степеневій залежності (3).

Прирівняємо праві частини залежностей (52) та (88), а також праві частини (59), (66), (73) і запишемо систему рівнянь для знаходження невідомих силових факторів:

$$\begin{cases} a_{11} M_{yA} + a_{12} P_{XB} + a_{13} M_{yB} + a_{14} M_{yC} = v_{11} P_X + v_{12} M_y + R_{XB} \end{cases} \quad (96)$$

$$\begin{cases} a_{21} M_{yA} + a_{22} P_{XB} + a_{23} M_{yB} + a_{24} M_{yC} = v_{21} P_X + v_{22} M_y + R_{OA} \end{cases} \quad (97)$$

$$\begin{cases} a_{31} M_{yA} + a_{32} P_{XB} + a_{33} M_{yB} + a_{34} M_{yC} = v_{31} P_X + v_{32} M_y + R_{OB} \end{cases} \quad (98)$$

$$\begin{cases} a_{41} M_{yA} + a_{42} P_{XB} + a_{43} M_{yB} + a_{44} M_{yC} = v_{41} P_X + v_{42} M_y + R_{OC} \end{cases} \quad (99)$$

Коефіцієнти, які входять в систему рівнянь (95)–(98), пов'язані із раніше визначеними параметрами такими співвідношеннями:

$$\begin{aligned} a_{11} &= K_{MyAB} - Q_{MyAB}; \\ a_{12} &= K_{PXB} - Q_{PXB}; \\ a_{13} &= K_{MyBB} - Q_{MyBB}; \\ a_{14} &= K_{MyCB} - Q_{MyCB}; \\ v_{11} &= Q_{PXB} - K_{PXB}; \\ v_{12} &= Q_{MyB} - K_{MyB}; \\ a_{21} &= K_{MyAA} - Q_{OA}; \\ a_{22} &= K_{PXBAA}, \quad a_{23} = K_{MyBAA}; \\ a_{24} &= K_{MyCAA}, \quad v_{21} = -K_{PXA}; \\ v_{22} &= -K_{MyAA}; \\ a_{32} &= K_{MyBB} - Q_{OB}, \quad a_{34} = K_{MyCB}; \\ v_{31} &= -K_{PXB}; \quad v_{32} = -K_{MyB}; \\ a_{41} &= K_{MyAC}, \quad a_{42} = K_{PXC}; \\ a_{43} &= K_{MyBC}, \quad a_{44} = K_{MyCB} - Q_{OC}; \\ v_{41} &= -K_{PXC}, \quad v_{42} = -K_{MyC}. \end{aligned} \quad (100)$$

Значення коефіцієнтів, які входять в праві частини формул (100), визначені раніше залежностями (33)–(58), (60)–(65), (67)–(72), (89)–(94).

Всі параметри, які входять в систему (96)–(98), змінюються випадковим чином. Як показано раніше, порядок зміни коефіцієнтів не перевищує 10 %. Тому значення коефіцієнтів, які входять в систему рівнянь (96)–(99), можна подати у вигляді суми детермінованої та випадкової складових. Враховуючи незначні зміни коефіцієнтів, можна прийняти випадкові складові незалежними від зміни силових факторів. Визначимо коефіцієнти системи рівнянь у вигляді матриці:

$$A = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} + \delta a_{11} & \bar{a}_{12} + \delta a_{12} & \bar{a}_{13} + \delta a_{13} & \bar{a}_{14} + \delta a_{14} \\ \bar{a}_{21} + \delta a_{21} & \bar{a}_{22} + \delta a_{22} & \bar{a}_{23} + \delta a_{23} & \bar{a}_{24} + \delta a_{24} \\ \bar{a}_{31} + \delta a_{31} & \bar{a}_{32} + \delta a_{32} & \bar{a}_{33} + \delta a_{33} & \bar{a}_{34} + \delta a_{34} \\ \bar{a}_{41} + \delta a_{41} & \bar{a}_{42} + \delta a_{42} & \bar{a}_{43} + \delta a_{43} & \bar{a}_{44} + \delta a_{44} \end{pmatrix}, \quad (101)$$

де  $\bar{a}_{ij}$  ( $i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, 3, 4$ ) – математичні сподівання значень коефіцієнтів;  $\delta a_{ij}$  – випадкові складові коефіцієнтів системи рівнянь.

Позначимо коефіцієнти, які входять у праві частини рівнянь, у векторному вигляді. Коефіцієнти дають праву частину у вигляді лінійної комбінації зовнішніх силових факторів та нелінійних складових:

$$B_1 = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{11} + \delta\sigma_{11} \\ \bar{\sigma}_{21} + \delta\sigma_{21} \\ \bar{\sigma}_{31} + \delta\sigma_{31} \\ \bar{\sigma}_{41} + \delta\sigma_{41} \end{bmatrix}; \quad B_2 = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{12} + \delta\sigma_{12} \\ \bar{\sigma}_{22} + \delta\sigma_{22} \\ \bar{\sigma}_{32} + \delta\sigma_{32} \\ \bar{\sigma}_{42} + \delta\sigma_{42} \end{bmatrix}, \quad (102)$$

де введені детерміновані та випадкові складові векторів  $\bar{\sigma}_{ij}$  ( $i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2$ ) представляють собою математичні сподівання коефіцієнтів;  $\delta\sigma_{ij}$  – випадкові складові коефіцієнтів правих частин рівнянь.

Вектор нелінійних складових системи рівнянь визначимо у вигляді:

$$R = \begin{bmatrix} R_{XB} \\ R_{\sigma A} \\ R_{\sigma B} \\ R_{\sigma C} \end{bmatrix}. \quad (103)$$

В цілому нелінійні складові системи алгебраїчних рівнянь визначаються залежностями (38в) та (95) і є функціями внутрішніх силових факторів.

Введемо вектор невідомих системи рівнянь (96)–(99), компоненти якого є внутрішніми силовими факторами:

$$Z = \begin{bmatrix} M_{yA} \\ P_{XB} \\ M_{yB} \\ M_{yC} \end{bmatrix}. \quad (104)$$

Враховуючи введені залежностями (101)–(104) матрично-векторні позначення, запишемо систему рівнянь (96)–(99) у компактному вигляді:

$$AZ = B_1 P + B_2 M + R. \quad (105)$$

Система чотирьох рівнянь з чотирма невідомими (105) є нелінійною системою алгебраїчних рівнянь з випадковими коефіцієнтами. Для розв'язку цієї системи розроблена спеціальна методика, яка базується на застосуванні системи візуального математичного моделювання SIMULINK математичного пакета MATLAB 6.0.

#### ЛІТЕРАТУРА:

1. Мельничук П.П., Струтинський В.Б. Структурна стохастична математична модель биття шпинделя вертикально-фрезерного верстата // Вісник ЖІТІ. – 2001 / Спеціальний випуск / Технічні науки. – С. 223.
2. Попов В.И., Локтев В.И. Динамика станков. – К.: Техніка, 1975. – 136 с.
3. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле: Пер. с англ. Л.Г. Корнейчука. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.

МЕЛЬНИЧУК Петро Петрович – кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри “Технологія машинобудування і конструювання технічних систем”, ректор Житомирського інженерно-технологічного інституту.

Наукові інтереси:

- механічні процеси обробки, верстати та системи;
- механіка руйнування.