УДК 621.777

С.Г. Кравченко, к.т.н., доц.
Національний технічний університет України "КПІ"

ПОСТАНОВКА І МЕТОДИКА ВИРІШЕННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ПРОЦЕСІВ ПРЕСУВАННЯ ТРУБ І ПРУТКІВ

Запропоновано алгоритм розв'язання крайової задачі процесів пресування труб і прутків, у тому числі з вільним контуром осередку деформації, для основних технологічних схем виробництва профілів на пресах.

При постановці вказаної задачі прийняті такі основні параметри:
– матеріал: грузло-пластичний, тобто виконуються умови:

$$\tau_s = \tau_s(\mathrm{H}, \varepsilon, \theta);\ S_{rr} = \frac{2\tau_s}{H}\xi_{rr};\ S_{zz} = \frac{2\tau_s}{H}\xi_{zz};$$

$$S_{\omega\omega} = \frac{2\tau_s}{H}\xi_{\omega\omega};\ S_{rz} = \frac{2\tau_s}{H}\xi_{rz};$$

– середовище нестисливе, тобто

$$\frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{V_\omega}{r} = 0;$$

– умови рівноваги записуються у вигляді:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0;$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{z\rho}}{\partial z} + \frac{\tau_{z\rho}}{\rho} = 0.$$

Механічні граничні умови наведені на рис. 1.

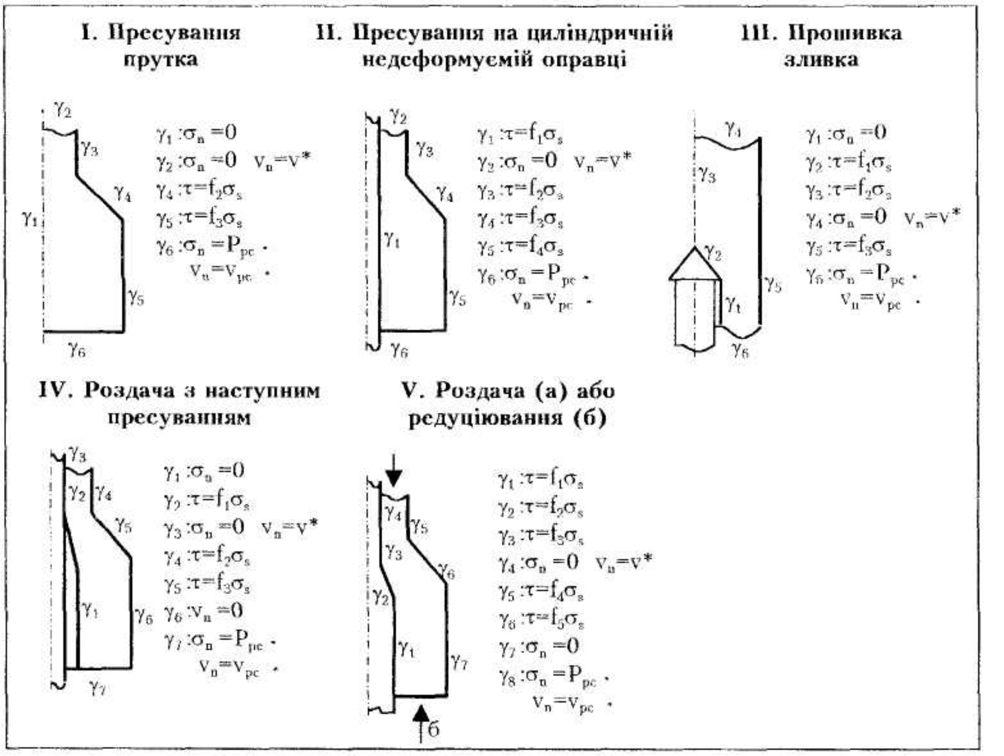

Рис. 1. Модельні схеми процесів пресування:

γ_i – відповідна дільниця межі; σ_n – нормальна напруга; $\tau = f_i\sigma_s$ – дотична напруга; f_i – коефіцієнти в законі Прандтля (задаються з досвіду); σ_s – межа текучості; V^* – визначається з закону сталості об'єму.

Для схеми V (рис. 1) процесу роздачі, або скорочування труб на оправці, коли межу осередку деформації з боку оправлення не задано чіткими координатами, потрібен додатковий алгоритм постановки і розв'язання задачі.

Для розв'язання даної задачі необхідно (рис. 2), щоб:

- елемент (осередок) знаходився в рівновазі;
- потік був постійний;
- нев'язки рівні ПРО;
- були визначені початкові значення a_{ij}^{H}, B_{ij}^{H} в поправочних функціях;
- було прийнято наступне рівняння для елемента (рис. 2) в інтегральній формі:

$$F_z^{ij}=\frac{1}{2}\Big[(\sigma_{zz}^{i,j-1}+\sigma_{zz}^{i,j})dR+(S_{rz}^{i,j}+S_{rz}^{i-1,j})\Delta Z+(\sigma_{zz}^{i-1,j-1}-\sigma_{zz}^{i-1,j})\Delta R+(S_{rr}^{i,j-1}+S_{rz}^{i-1,j-1})\Delta Z\Big]$$
$$F_r^{ij}=\frac{1}{2}\Big[(S_{rz}^{i,j-1}+S_{rz}^{i,j})\Delta R+(\sigma_{rr}^{i,j}+\sigma_{rr}^{i-1,j})\Delta Z+(S_{rz}^{i-1,j-1}+S_{rz}^{i-1,j})\Delta R+(\sigma_{rr}^{i,j-1}+\sigma_{rr}^{i-1,j-1})\Delta Z\Big] \quad (1)$$

- при такій умові нестискуваності:

$$K_i=\Delta R\sum_{j=0}^{m}V_{ij}\,;$$
$$K_i=V_0(r_1-r_o)=const. \quad (2)$$

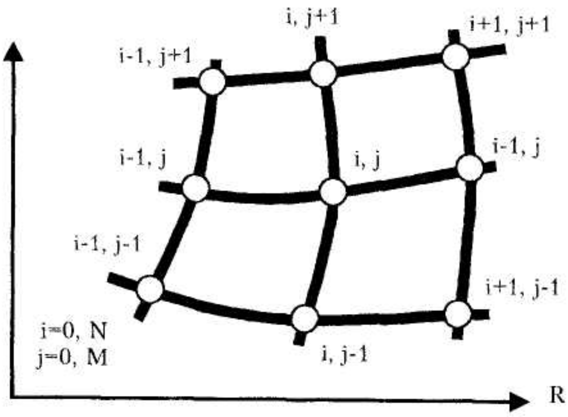

Рис. 2. До рішення задачі з вільним контуром осередку деформації

Розв'язання задачі зводиться до мінімізації суми:

$$\sum_{j=o,\,i=o}^{M,N}\left\{(F_r^{ij})^2+(F_z^{ij})^2+\Pi^2\right\}+\sum_{i=1}^{N+1}(K_i-K_{i-1})^2\,, \quad (3)$$

де П – нев'язка граничних умов.

Граничні умови для φ і ψ задовольняються з мінімізації суми:

$$\sum\left\{\left[\varphi_o(O,Z_i)-r_o\psi_o(R,Z_i)\right]^2+\left[\varphi_o(R^*,Z_i)-r_i\Psi_o(R,Z_i)\right]\right\}+\sum_{j=o}^{M}\varepsilon_{zz}^2(R_j,O)\,; \quad (4)$$

із (4) знаходимо коефіцієнт $\alpha_{ij}^{o},b_{ij}^{o}$ для опорних функцій φ_o,Ψ_o.

Виконання умови (4) рішення задачі можливо:

- з використанням варіаційно-різницевих методів;
- методом граничних інтегральних рівнянь;
- методом сіток.

Для визначення початкових коефіцієнтів $\alpha_{ij}^{H},b_{ij}^{H}$ у поправочних функціях використовуємо метод скінчених елементів (МСЕ), тобто знаходимо координати деформованої сітки r_{ij},Z_{ij} з застосуванням рівняння зв'язку:

$$r_{ij}=\varphi_c^{o}(R_i,Z_j)+\varphi^{\Pi}(R_i,Z_j)\,; \quad (5)$$

$$Z_{ij} = \Psi^{o}(R_i, Z_j) + \Psi^{\Pi}(R_i, Z_j),$$

визначаємо $\alpha_{ij}^{H}, b_{ij}^{H}$ з наступною інтерполяцією за В-сплайнами.

Суть розв'язання крайової задачі осесиметричного процесу пресування зводиться до пошуку значень деформації і швидкостей на межах осередку деформації в системі координат Ейлера–Лагранжа [1, 2] (рис. 3).

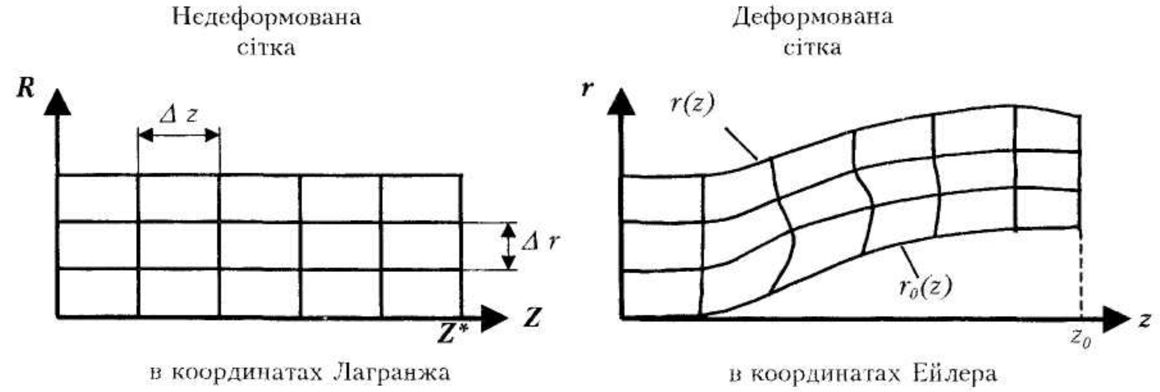

Рис. 3. До методики рішення крайової задачі пресування

I. Введемо функції відповідності систем координат:

$$r = \varphi(R, Z); \; Z = \Psi(R, Z); \; \omega = \omega; \tag{6}$$

функції (6) містять коефіцієнти $\varphi - \alpha_{ij}, \Psi - b_{ij}$, подані В-сплайнами у вигляді:

$$\begin{aligned} \varphi &= \sum_{i=o}^{N+1}\sum_{j=o}^{M+1} \alpha_{ij} b_3^i(R) b_3^j(Z); \\ \Psi &= \sum_{i=o}^{N+1}\sum_{j=o}^{M-1} b_{ij} b_3^i(R) b_3^j(Z). \end{aligned} \tag{7}$$

II. Деформації представляються різницями квадратних форм:

$$\begin{aligned} ds^2 - dS^2 &= dr^2 - r^2 d\omega^2 + dz^2 - dR - R^2 d\omega^2 - dZ^2 = (\varphi^1{}_R dR + \varphi^1{}_z dZ)^2 + \varphi^2 d\omega^2 + \\ &+ (\Psi_R^1 dR + \Psi_z^1 dZ) - dR^2 - R^2 d\omega^2 - dZ^2 = 2\varepsilon_{RR} dR^2 + 2\varepsilon_{zz} dZ^2 + 2\varepsilon_{\omega\omega} R^2 d\omega^2 + \\ &+ 4\varepsilon_{RZ} dRdZ + 4\varepsilon_{R\omega} RdRd\omega + 4\varepsilon_{Z\omega} RdZd\omega. \end{aligned}$$

Звідси:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{RR} &= 1/2\left[\left(\varphi_R^1\right)^2 + \left(\Psi_R^1\right)^2 - 1\right]; \\ \varepsilon_{ZZ} &= 1/2\left[\left(\varphi_Z^1\right)^2 + \left(\Psi_z^1\right)^2 - 1\right]; \\ \varepsilon_{RZ} &= 1/2\left(\Psi_Z^1 \Psi_R^1 + \varphi_R^1 \varphi_z^1\right); \\ \varepsilon_{\omega\omega} &= \frac{1}{2}\frac{\varphi^2 - R}{R^2}; \\ \varepsilon_{R\omega} &= \varepsilon_{z\omega} = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

III. Швидкість деформації $\xi_{ij} = V_0 \dfrac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial Z}$, де V_0 – швидкість пресування:

$$\begin{aligned} \xi_{RR} &= 1/2\left(\varphi_{RR}^{II} \varphi_R^{I} + \Psi_{RR}^{I} \Psi_R^{II}\right) V_0; \\ \xi_{ZZ} &= 1/2\left(\varphi_{ZZ}^{II} \varphi_Z^{I} + \Psi_{ZZ}^{I} \Psi_Z^{II}\right) V_0; \\ \xi_{RZ} &= 1/2\left[\Psi_{RZ}^{II}\left(\Psi_R^{I} + \Psi_Z^{I}\right) + \varphi_{RZ}^{II}\left(\varphi_R^{I} + \varphi_R^{I}\right)\right] V_0; \\ \xi_{\omega\omega} &= \frac{\varphi\varphi_Z^{I}}{R^2} V_0. \end{aligned} \tag{9}$$

IV. Визначимо значення σ з (6), представивши у вигляді:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial r} = fr(r, Z);$$
$$\frac{\partial\sigma}{\partial z} = fr(R, Z). \tag{10}$$

Інтегруючи (10) у квадратурах, перейдемо до Лагранжових координат .

V. Швидкості течії V_{ij} у Ейлерових координатах визначаються з (6) і (7) у вигляді:

$$V_r = V_0\varphi_R^I;$$
$$V_z = V_0\Psi_z^I. \tag{11}$$

Таким чином, знаючи зміну вузлів при моделюванні процесу пресування, наприклад, координатної сітки, можна поетапно на кожній ділянці деформації заготовок визначити значення основних параметрів напружено-деформованого стану при пресуванні.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Рихтмайер Р., Морюн К.* Разностные методы решения краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 212 с.

2. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. – Киев: Наукова думка, 1985. – 224 с.

КРАВЧЕНКО Сергій Григорович – кандидат технічних наук, доцент кафедри обробки металів тиском Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут".

Наукові інтереси:
- технологія і обладнання для отримання труб та профілів;
- теорія нагріву металу.

Подано 10.10.2001