

УДК 539.376

О.В. Луциков, ст. викл.

Житомирський військовий інститут радіоелектроніки ім. С.П. Корольова

В.В. Михайленко, д.ф.-м.н.

Житомирський інженерно-технологічний інститут

ДО ПИТАННЯ ПРО КОНЦЕПЦІЮ АМПЛІТУДНОЗАЛЕЖНИХ КОМПЛЕКСНИХ МОДУЛІВ В МЕХАНІЦІ НЕПРУЖНИХ ІЗОТРОПНИХ МАТЕРІАЛІВ

Показано, що моногармонічне наближення коливань непружних ізотропних тіл в загальному випадку може бути описане в термінах амплітуднозалежних комплексних модулів в межах точності, яку забезпечує метод найменших квадратів.

Моногармонічне наближення коливань фізично нелінійних непружних тіл описується рівняннями, які встановлюють зв'язок між тензорами $\varepsilon'_{ij}, \varepsilon''_{ij}$, що характеризують механічну деформацію:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij} \cos \omega t - \varepsilon''_{ij} \sin \omega t \tag{1}$$

і тензорами $\sigma'_{ij}, \sigma''_{ij}$, які визначають механічне напруження:

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} \cos \omega t - \sigma''_{ij} \sin \omega t \tag{2}$$

В загальному випадку цей зв'язок записується у вигляді тензорних функцій:

$$\sigma'_{ij} = \sigma'_{ij}(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}), \quad \sigma''_{ij} = \sigma''_{ij}(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}), \tag{3}$$

які повинні задовольняти обмеженням, що накладаються законами термодинаміки, типом симетрії матеріалу і умовою інваріантності амплітуд відносно зсуву в часі [1]. Остання умова означає інваріантність залежностей (3) відносно заміни в (1) і (2) ωt на $\omega t + \varphi$ і може бути представлена у вигляді:

$$\begin{cases} \sigma'_{ij}(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}) \cos \varphi - \sigma''_{ij}(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}) \sin \varphi = \sigma'_{ij}(\varepsilon'_{kl} \cos \varphi - \varepsilon''_{kl} \sin \varphi, \varepsilon'_{kl} \sin \varphi + \varepsilon''_{kl} \cos \varphi), \\ \sigma'_{ij}(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}) \sin \varphi + \sigma''_{ij}(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}) \cos \varphi = \sigma''_{ij}(\varepsilon'_{kl} \cos \varphi - \varepsilon''_{kl} \sin \varphi, \varepsilon'_{kl} \sin \varphi + \varepsilon''_{kl} \cos \varphi). \end{cases} \tag{4}$$

Припустивши диференційованість функцій (3), з рівнянь (4) можна отримати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \sigma'_{ij} = \frac{\partial \sigma''_{ij}}{\partial \varepsilon'_{kl}} \varepsilon'_{kl} - \frac{\partial \sigma''_{ij}}{\partial \varepsilon''_{kl}} \varepsilon''_{kl}, \\ \sigma''_{ij} = \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial \varepsilon'_{kl}} \varepsilon'_{kl} - \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial \varepsilon''_{kl}} \varepsilon''_{kl}. \end{cases} \tag{5}$$

Для спрощення викладок введемо оператор

$$A[u] = \frac{\partial u}{\partial \varepsilon'_{kl}} \varepsilon'_{kl} - \frac{\partial u}{\partial \varepsilon''_{kl}} \varepsilon''_{kl}.$$

Очевидно, що оператор $A[u]$ має такі властивості:

$$A[u \pm v] = A[u] \pm A[v], \quad A[uv] = A[u]v + uA[v], \quad A[f(I_k)] = \frac{\partial f}{\partial I_k} A[I_k], \tag{6}$$

де u, v – диференційовані функції від $\varepsilon'_{ij}, \varepsilon''_{ij}$, f – функція від $I_k(\varepsilon'_{ij}, \varepsilon''_{ij})$.

Рівняння (5) можна записати у вигляді:

$$\sigma'_{ij} = A[\sigma''_{ij}], \quad \sigma''_{ij} = -A[\sigma'_{ij}]. \tag{7}$$

Далі скористаємося загальним представленням квазілінійних ізотропних функцій, які мають вигляд [1]:

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij} &= \beta_{01}(\cdot) \delta_{ij} + \beta_{11}(\cdot) \varepsilon'_{ij} + \beta_{21}(\cdot) \varepsilon''_{ij}, \\ \sigma''_{ij} &= \beta_{02}(\cdot) \delta_{ij} + \beta_{12}(\cdot) \varepsilon'_{ij} + \beta_{22}(\cdot) \varepsilon''_{ij}, \end{aligned} \tag{8}$$

$$(\cdot) = (I'_1, I''_1, I'_2, I''_2, I_{12}),$$

$$I'_1 = \varepsilon'_{ij}, \quad I''_1 = \varepsilon''_{ij}, \quad I'_2 = \varepsilon'_{ij} \varepsilon'_{ij}, \quad I''_2 = \varepsilon''_{ij} \varepsilon''_{ij}, \quad I_{12} = \varepsilon'_{ij} \varepsilon''_{ij}. \tag{9}$$

Враховуючи, що

$$\frac{\partial I'_1}{\partial \varepsilon'_{ij}} = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial I''_1}{\partial \varepsilon''_{ij}} = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial I'_2}{\partial \varepsilon'_{ij}} = 2\varepsilon'_{ij}, \quad \frac{\partial I''_2}{\partial \varepsilon''_{ij}} = 2\varepsilon''_{ij}, \quad \frac{\partial I_{12}}{\partial \varepsilon'_{ij}} = \varepsilon''_{ij}, \quad \frac{\partial I_{12}}{\partial \varepsilon''_{ij}} = \varepsilon'_{ij},$$

отримаємо

$$A[\beta_{ij}] = I_1' \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial I_1''} + 2I_{12} \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial I_2''} + (I_2' - I_2'') \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial I_{12}} - I_1'' \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial I_1'} - 2I_{12} \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial I_2'}, \quad (10)$$

тобто $A[\beta_{ij}]$ ($i = 0, 1, 2, j = 1, 2$) також є функцією інваріантів (9). Крім того, $A[\varepsilon_{ij}'] = -\varepsilon_{ij}''$, $A[\varepsilon_{ij}''] = \varepsilon_{ij}'$. Підставивши залежності (8) в рівняння (7) і прирівнявши скалярні коефіцієнти при δ_{ij} , ε_{ij}' і ε_{ij}'' , отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \beta_{01} = A[\beta_{02}] \\ \beta_{02} = -A[\beta_{01}] \\ \beta_{11} = \beta_{22} + A[\beta_{12}] \\ \beta_{22} = \beta_{11} - A[\beta_{21}] \\ \beta_{12} = -\beta_{21} - A[\beta_{11}] \\ \beta_{21} = -\beta_{12} + A[\beta_{22}] \end{cases} \quad (11)$$

Розглянемо рівняння $A[\beta] = 0$, де β – функція інваріантів (9). З (10) випливає, що цьому рівнянню відповідає характеристична система:

$$\frac{dI_1''}{I_1'} = \frac{dI_2''}{2I_{12}} = \frac{dI_{12}}{I_2' - I_2''} = \frac{dI_1'}{-I_1''} = \frac{dI_2'}{-2I_{12}}.$$

Першими інтегралами цієї системи є:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2}(I_1'^2 + I_1''^2), \quad I_2 = \frac{1}{2}(I_2' + I_2''), \\ J_1 &= \frac{1}{4}(I_1'^2 I_2' + I_1''^2 I_2'' + 2I_1' I_1'' I_{12}), \quad J_2 = \frac{1}{4}(I_2'^2 + I_2''^2 + 2I_{12}^2). \end{aligned} \quad (12)$$

Тому загальним розв'язком рівняння $A[\beta] = 0$ є довільна диференційована функція від I_1, I_2, J_1, J_2 . З 3-го і 4-го та 5-го і 6-го рівнянь системи (11) випливає: $A[\beta_{12} - \beta_{21}] = 0$ і $A[\beta_{11} + \beta_{22}] = 0$. Тому функції:

$$2\mu' = \beta_{11} + \beta_{22}, \quad 2\mu'' = \beta_{12} - \beta_{21} \quad (13)$$

є функціями величин (12). Для знаходження загального розв'язку системи (11) зробимо заміну змінних. Як нові змінні візьмемо I_1, I_2, J_1, J_2 і функцію $J(I_1', I_1'', I_2', I_2'', I_{12})$, яку виберемо так, щоб вираз для $A[\beta]$ набув найпростішого вигляду. Оператор $A[\beta]$, виражений через нові змінні, позначимо $A_1[\beta]$. Враховуючи властивості (6), будемо мати:

$$A_1[\beta] = \frac{\partial \beta}{\partial I_1} A[I_1] + \frac{\partial \beta}{\partial I_2} A[I_2] + \frac{\partial \beta}{\partial J_1} A[J_1] + \frac{\partial \beta}{\partial J_2} A[J_2] + \frac{\partial \beta}{\partial J} A[J] = \frac{\partial \beta}{\partial J} A[J].$$

Нехай J залежить тільки від I_1', I_1'' і задовольняє рівняння $A[J] = 1$, тобто $I_1' \frac{\partial J}{\partial I_1''} - I_1'' \frac{\partial J}{\partial I_1'} = 1$.

Загальний розв'язок цього рівняння: $J = \arcsin \frac{I_1''}{\sqrt{I_1'^2 + I_1''^2}} + g(I_1'^2 + I_1''^2)$, де g – довільна диференційована функція. Візьмемо $g \equiv 0$. Функція

$$J = \arcsin \frac{I_1''}{\sqrt{I_1'^2 + I_1''^2}} \quad (14)$$

функціонально незалежна від I_1, I_2, J_1, J_2 тому що задовольняє рівняння $A[J] = 1$. Отже, $A_1[\beta] = \frac{\partial \beta}{\partial J}$.

Для функцій $\beta_{01}, \beta_{02}, F = \beta_{12} + \beta_{21}, G = \beta_{11} - \beta_{22}$ з системи (11) отримаємо:

$$\frac{\partial \beta_{02}}{\partial J} = \beta_{01}, \quad \frac{\partial \beta_{01}}{\partial J} = -\beta_{02}, \quad \frac{\partial F}{\partial J} = 2G, \quad \frac{\partial G}{\partial J} = -2F, \quad (15)$$

звідки знаходимо:

$$\begin{aligned} \beta_{02} &= C_1 \sin J + C_2 \cos J, \quad \beta_{01} = C_1 \cos J - C_2 \sin J, \\ F &= C_3 \sin 2J + C_4 \cos 2J, \quad G = C_3 \cos 2J - C_4 \sin 2J, \end{aligned}$$

де C_1, C_2, C_3, C_4 – довільні диференційовані функції від інваріантів (12). Замінюючи J за формулою (14) і враховуючи (13), отримаємо загальний розв'язок системи (11) у вигляді:

$$\beta_{01} = \lambda' I_1' - \lambda'' I_1'', \quad \beta_{02} = \lambda' I_1'' + \lambda'' I_1',$$

$$\beta_{11} = \mu' + \eta'(I_1'^2 - I_1''^2) - 2\eta'' I_1' I_1'', \quad \beta_{12} = \mu'' + 2\eta' I_1' I_1'' + \eta''(I_1'^2 - I_1''^2),$$

$$\beta_{21} = -\mu'' + 2\eta' I_1' I_1'', \quad \beta_{22} = \mu' - \eta'(I_1'^2 - I_1''^2) + 2\eta'' I_1' I_1'',$$

де $\lambda', \lambda'', \mu', \mu'', \eta', \eta''$ – функції від інваріантів (12). Залежності (8) можна представити у вигляді:

$$\sigma'_{ij} = (\lambda' I_1' - \lambda'' I_1'') \delta_{ij} + (\mu' + \eta'(I_1'^2 - I_1''^2) - 2\eta'' I_1' I_1'') \varepsilon'_{ij} +$$

$$+ (-\mu'' + 2\eta' I_1' I_1'' + \eta''(I_1'^2 - I_1''^2)),$$

$$\sigma''_{ij} = (\lambda' I_1'' + \lambda'' I_1') \delta_{ij} + (\mu'' + 2\eta' I_1' I_1'' + \eta''(I_1'^2 - I_1''^2)) \varepsilon''_{ij} +$$

$$+ (\mu' - \eta'(I_1'^2 - I_1''^2) + 2\eta'' I_1' I_1'') \varepsilon'_{ij},$$
(16)

або в комплексній формі:

$$\sigma_{ij} = \tilde{\lambda} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + \tilde{\mu} \varepsilon_{ij} + \eta \varepsilon_{kk}^2 \bar{\varepsilon}_{ij},$$
(17)

де

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \sqrt{-1} \sigma''_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij} + \sqrt{-1} \varepsilon''_{ij}, \quad \tilde{\lambda} = \lambda' + \sqrt{-1} \lambda'', \quad \tilde{\mu} = \mu' + \sqrt{-1} \mu'',$$

$$\eta = \eta' + \sqrt{-1} \eta'', \quad \bar{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon'_{ij} - \sqrt{-1} \varepsilon''_{ij}.$$

Для величин

$$\bar{D} = \sigma''_{ij} \varepsilon'_{ij} - \sigma'_{ij} \varepsilon''_{ij}, \quad \bar{\Pi} = \sigma'_{ij} \varepsilon'_{ij} + \sigma''_{ij} \varepsilon''_{ij},$$

які, як відомо з [2, 3], характеризують дисиповану та накопичену механічну енергію, з врахуванням (16), можна записати:

$$\bar{D} = 2\lambda'' I_1 + 2\mu'' I_2 + 2\eta'(I_1' I_1'' (I_2' - I_2'') - I_{12} (I_1'^2 - I_1''^2)) + \eta''(4I_1' I_1'' I_{12} + (I_1'^2 - I_1''^2)(I_2' - I_2'')),$$

$$\bar{\Pi} = 2\lambda' I_1 + 2\mu' I_2 + \eta'(4I_1' I_1'' I_{12} + (I_1'^2 - I_1''^2)(I_2' - I_2'')) - 2\eta''(I_1' I_1'' (I_2' - I_2'') - I_{12} (I_1'^2 - I_1''^2)),$$
(18)

де

$$4I_1' I_1'' I_{12} + (I_1'^2 - I_1''^2)(I_2' - I_2'') = 8J_1 - 4I_1 I_2,$$

$$(I_1' I_1'' (I_2' - I_2'') - I_{12} (I_1'^2 - I_1''^2))^2 = 8I_1^2 (J_2 - I_2^2) + 16J_1 (I_1 I_2 - J_1).$$
(19)

Розглянемо деякі частинні випадки.

Для нестискуваного матеріалу ($\varepsilon_{kk} = 0$) залежність (17) набуває вигляду $\sigma_{ij} = \tilde{\mu} \varepsilon_{ij}$.

У випадку моногармонічної деформації $\varepsilon_{ij} = \alpha \varepsilon'_{ij}$ ($\alpha = \text{const}$), $\frac{\varepsilon_{kk}^2 \bar{\varepsilon}_{ij}}{\varepsilon_{ij}} = 2I_1$, (по i, j не сумувати) і

(17) має вигляд $\sigma_{ij} = \tilde{\lambda} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + (\tilde{\mu} + 2I_1 \eta) \varepsilon_{ij}$.

Отже, в розглянутих частинних випадках концепція амплітуднозалежних комплексних модулів існує. В загальному випадку ця концепція, як видно з (17), не виконується.

Апроксимуємо рівняння (16) рівняннями виду:

$$\bar{\sigma}'_{ij} = (\bar{\lambda}' I_1' - \bar{\lambda}'' I_1'') \delta_{ij} + \bar{\mu}' \varepsilon'_{ij} - \bar{\mu}'' \varepsilon''_{ij},$$

$$\bar{\sigma}''_{ij} = (\bar{\lambda}' I_1'' + \bar{\lambda}'' I_1') \delta_{ij} + \bar{\mu}' \varepsilon''_{ij} + \bar{\mu}'' \varepsilon'_{ij},$$
(20)

в яких величини $\bar{\lambda}', \bar{\lambda}'', \bar{\mu}', \bar{\mu}''$ вважаються функціями аргументів $I_1', I_1'', I_2', I_2'', I_{12}$. Знайдемо ці функції з умови мінімуму величини:

$$\Sigma = (\sigma'_{ij} - \bar{\sigma}'_{ij})(\sigma'_{ij} - \bar{\sigma}'_{ij}) + (\sigma''_{ij} - \bar{\sigma}''_{ij})(\sigma''_{ij} - \bar{\sigma}''_{ij}).$$

Розв'язавши систему рівнянь:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \bar{\lambda}'} = 0, \quad \frac{\partial \Sigma}{\partial \bar{\lambda}''} = 0, \quad \frac{\partial \Sigma}{\partial \bar{\mu}'} = 0, \quad \frac{\partial \Sigma}{\partial \bar{\mu}''} = 0,$$

відносно величин $\bar{\lambda}', \bar{\lambda}'', \bar{\mu}', \bar{\mu}''$, з врахуванням (19), можна показати, що ці величини є функціями набору аргументів I_1, I_2, J_1, J_2 (12).

Отже, в межах точності, яку забезпечує метод найменших квадратів при апроксимації рівнянь (16) рівняннями (20), можна користуватися наближеними рівняннями стану:

$$\sigma'_{ij} \approx \bar{\sigma}'_{ij}, \quad \sigma''_{ij} \approx \bar{\sigma}''_{ij}.$$

Крім того, можна показати, що апроксимація (20) не змінює характеристик накопичення та дисипації енергії (18), вирази для яких можна записати в такому ж вигляді, як і в лінійній теорії, але із змінними коефіцієнтами:

$$\bar{D} = 2\bar{\lambda}'' I_1 + 2\bar{\mu}'' I_2,$$

$$\bar{\Pi} = 2\bar{\lambda}' I_1 + 2\bar{\mu}' I_2.$$

ЛІТЕРАТУРА:

1. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф. Электротермовязкоупругость: Механика связанных полей в элементах конструкций. – К.: Наук. думка, 1988. – Т. 4. – 320 с.
2. Михайленко В.В. До питання про дисипацію та накопичення електромеханічної енергії при коливаннях в'язкопружних п'єзоелектричних тіл // Вісник Київського ун-ту, серія: фіз.-мат. науки. – 1997. – С. 128–132.
3. Михайленко В.В. Общая структура амплитудных определяющих уравнений неупругих пьезоэлектрических тел при циклических электромеханических процессах // Прикл. механика. – 1996. – 32. – № 12. – С. 37–42.

ЛУЩИКОВ Олександр Володимирович – старший викладач кафедри математики Житомирського військового інституту радіоелектроніки ім. С.П. Корольова.

Наукові інтереси:

– механіка деформівного твердого тіла.

МИХАЙЛЕНКО Василь Васильович – доктор фізико-математичних наук, завідувач кафедри вищої математики Житомирського інженерно-технологічного інституту.

Наукові інтереси:

– механіка деформівного твердого тіла.

Подано 14.12.2001