

УДК 53.05

В.Г. Хоменко, ст. викл.

Житомирський військовий інститут радіоелектроніки ім. С.П. Корольова

РОЗРАХУНОК КООРДИНАТ ДЖЕРЕЛ СЕЙСМІЧНИХ ЗБУРЕНЬ ДАЛЕКОМІРНИМ МЕТОДОМ

(Представлено д.т.н. В.Л. Барановим)

Запропоновано математичний апарат визначення координат джерел сейсмічних збурень за результатами вимірювань двох далекомірних пунктів. Математичний апарат ґрунтується на розв'язанні головних геодезичних задач на сферичній та сфероїдальній моделі поверхні Землі та методі Бесселя зображення сфероїдальної поверхні на поверхню сфери.

Вступ

Наявність та стан сейсмічної активності Землі, збільшення кількості факторів, які впливають на сейсмічний стан Землі, обумовлюють необхідність створення спеціальних систем сейсмічних спостережень. Однією з головних задач, що розв'язуються в цих системах, є задача визначення координат джерел сейсмічних збурень. До цих збурень слід віднести землетруси, переміщення значних мас землі, вибухи у добувних кар'єрах, інші аномальні явища, які обумовлені внутрішньою активністю Землі та окремими техногенними факторами.

Практика розв'язання подібних задач потребує апроксимації реальної форми поверхні Землі деякою її геометричною моделлю. Найбільш точною моделлю реальної форми поверхні Землі є поверхня геоїда, яка є поверхнею рівня потенціалу сили тяжіння [1]. Математичний опис цієї моделі досить складний і в практичних задачах місцевизначення не застосовується. Для наукового та практичного використання застосовуються інші моделі поверхні Землі. Такими є: сфера як одна з найпростіших її геометричних моделей та сфероїд – еліпсоїд обертання, вибір параметрів якого здійснюється з умови відповідності до форми геоїда. У всіх геодезичних роботах, що проводяться в Україні, застосовується еліпсоїд обертання Красівського, параметрами якого є [2] велика піввісь $a = 6\,378\,245,00000$ м, мала піввісь $b = 6\,356\,863,01877$ м, ступінь стиску поверхні $\alpha = \frac{a-b}{a} \approx 1:298,3$. Середній радіус Землі, що розрахований за параметрами еліпсоїда Красівського, складає значення $R_3 = 6\,371\,116$ м.

Визначення координат джерел сейсмічних збурень може здійснюватися за допомогою різних методів, які широко застосовуються в системах пасивної локації. Такими є далекомірний, різницево-далекомірний та кутомірний методи. Найбільш перспективним з них є далекомірний метод. Практична реалізація цього методу ґрунтується на визначенні відстаней до джерела сейсмічних збурень з декількох пунктів реєстрації, які в сукупності утворюють систему місцевизначення. Відстані до джерела можуть визначатися за відомими годографами різних типів сейсмічних хвиль – повздовжньої P , поперечної S , хвилі Лява, поверхневих та інших типів хвиль, які утворюються внаслідок сейсмічних збурень [3].

Розв'язання задач визначення координат джерел сейсмічних збурень далекомірним методом на сфероїдальній моделі поверхні Землі ґрунтується на розв'язанні головних геодезичних задач на сферичній та сфероїдальній моделях, розв'язанні задач місцевизначення далекомірним методом на допоміжній геометричній моделі поверхні Землі – сфері та відображенні сфероїдальної поверхні на поверхню сфери.

1. Розв'язання головних геодезичних задач на сферичній моделі поверхні Землі

1.1. Пряма головна геодезична задача на сферичній моделі поверхні Землі

Розглянемо дві точки на поверхні сфери (рис. 1): точку Q_1 , сферичні координати якої λ_1, φ_1 , та точку Q_2 , сферичні координати якої λ_2, φ_2 (λ_1, λ_2 – сферичні довготи, φ_1, φ_2 – сферичні широти точок). Позначимо сферичну відстань між цими точками як σ ($\sigma = R / R_3$, де R – лінійна відстань між точками), а сферичні азимуты напрямків з однієї точки на іншу точку як α_1 та α_2 . Відомими величинами є координати однієї з точок, наприклад $Q_1 - \lambda_1, \varphi_1$,

виміряні відстань σ та кут α_1 . Невідомими величинами є координати іншої точки – точки Q_2 – λ_2, φ_2 . Ці координати потрібно визначити.

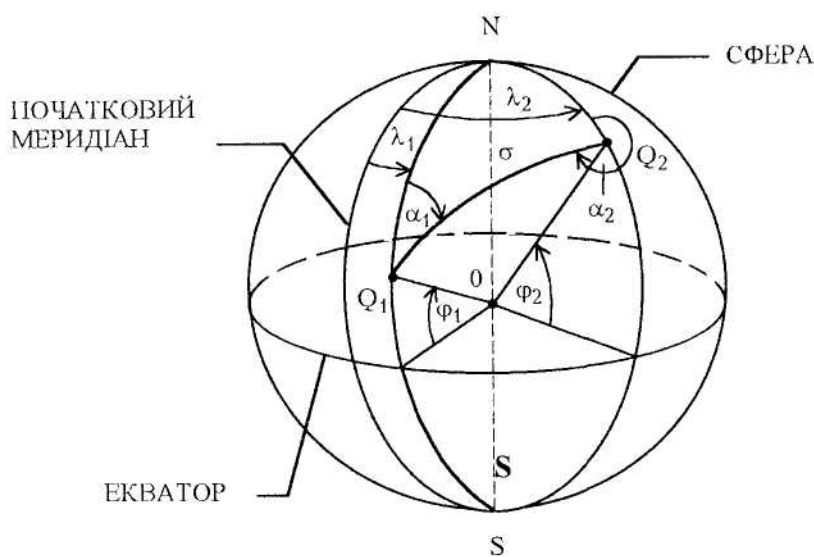


Рис. 1

Наведемо загальний математичний апарат розв’язання задачі, який придатний для будь-якого відносного розміщення точок Q_1 та Q_2 [1, 4].

1. За допомогою формули

$$\operatorname{tg}(\lambda_2 - \lambda_1) = \frac{\sin \alpha_1}{x}, \tag{1}$$

де

$$x = (\operatorname{ctg} \sigma - \cos \alpha_1 \operatorname{tg} \varphi_1) \cos \varphi_1$$

обчислюється різниця сферичних довгот $\lambda_2 - \lambda_1$ точок Q_2 та Q_1 . За цією різницею та відомою сферичною довготою λ_1 точки Q_1 обчислюється сферична довгота λ_2 точки Q_2 .

2. За формулою

$$\sin \varphi_2 = \sin \sigma \cos \varphi_1 (\operatorname{ctg} \sigma \operatorname{tg} \varphi_1 + \cos \alpha_1) \tag{2}$$

обчислюється сферична широта φ_2 точки Q_2 .

3. Азимут α_2 напрямку на точку Q_1 з точки Q_2 розраховується за формулою:

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\sin(\lambda_2 - \lambda_1)}{\sin \varphi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1) - \operatorname{tg} \varphi_1 \cos \varphi_2}. \tag{3}$$

Широта φ_2 точки Q_2 знаходиться в межах від 0° до $\pm 90^\circ$ (знак плюс відповідає північній широті, знак мінус – південній). Тому знак синуса широти φ_2 у формулі (2) одночасно визначає і знак широти φ_2 . Для визначення квадрантів кутів $\lambda_2 - \lambda_1$ та α_2 , які розраховуються за формулами (1) та (3), слід використовувати дані таблиць 1.1 та 1.2.

Таблиця 1.1

Визначення значення кута $\lambda_2 - \lambda_1$

Знак $\sin \alpha_1$	Знак x	Значення $\lambda_2 - \lambda_1$
+	+	$ \lambda_2 - \lambda_1 $
-	+	$- \lambda_2 - \lambda_1 $
-	-	$ \lambda_2 - \lambda_1 - \pi$
+	-	$\pi - \lambda_2 - \lambda_1 $

Таблиця 1.2

Визначення значення кута α_2

Знак $\sin(\lambda_2 - \lambda_1)$	Знак $\operatorname{tg} \alpha_2$	Значення α_2
-	+	$ \alpha_2 $
-	-	$\pi - \alpha_2 $
+	+	$\pi + \alpha_2 $
+	-	$2\pi - \alpha_2 $

У формулах (1), (3), таблицях 1.1 та 1.2 східна довгота відповідає знаку плюс, західна довгота – знаку мінус.

1.2. Обернена головна геодезична задача на сферичній моделі поверхні Землі

На сферичній моделі поверхні Землі відомі координати двох точок (рис.1): точки Q_1 (довгота λ_1 , широта φ_1) та точки Q_2 (довгота λ_2 , широта φ_2). Потрібно визначити сферичну відстань σ (лінійну відстань R) між цими точками та сферичні азимуты α_1 та α_2 напрямків з однієї точки на іншу точку.

Для розв'язання задачі застосовуються формули [1, 4],

$$\cos \sigma = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos (\lambda_2 - \lambda_1), \quad (4)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\sin (\lambda_2 - \lambda_1)}{x'}, \quad (5)$$

де

$$x' = \cos \varphi_1 [\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1 \cos (\lambda_2 - \lambda_1)].$$

Сферична відстань σ обчислюється в радіанах, є додатною і знаходиться в межах $0 \leq \sigma \leq \pi$. Якщо значення функції $\cos \sigma$, що отримане за формулою (4), не є від'ємним ($\cos \sigma \geq 0$), то сферична відстань σ знаходиться в межах $0 \leq \sigma \leq \frac{\pi}{2}$, якщо ж значення функції

$\cos \sigma$ від'ємне ($\cos \sigma < 0$), то сферична відстань σ знаходиться в межах $\frac{\pi}{2} < \sigma \leq \pi$.

В зв'язку з тим, що функція $\operatorname{tg} \alpha_1$ однозначно визначає кут α_1 лише в межах $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha_1 \leq \frac{\pi}{2}$, для визначення дійсного значення цього азимута після обчислень за формулою (5) необхідно використовувати дані таблиці 1.3.

Таблиця 1.3

Визначення значення кута α_1

Знак $\sin(\lambda_2 - \lambda_1)$	Знак x'	Значення α_1
+	+	$ \alpha_1 $
+	-	$\pi - \alpha_1 $
-	-	$\pi + \alpha_1 $
-	+	$2\pi - \alpha_1 $

Для розрахунку азимута α_2 напрямку на точку Q_1 з точки Q_2 необхідно застосовувати формулу (3) та таблицю 1.2.

2. Розв'язання головних геодезичних задач на сфероїдальній моделі поверхні Землі

Сфероїдальна модель є найбільш точною геометричною моделлю поверхні Землі. Разом з тим, розв'язання задач місцевизначення з застосуванням безпосередньо цієї моделі є досить складною математичною задачею. Це пов'язано з тим, що зв'язок між геометричними параметрами сфероїдальної поверхні в елементарних функціях не визначається: досить складно встановити співвідношення між довжиною геодезичної лінії S , її геодезичним азимутом A та координатами точок L та B цієї лінії (L – геодезична довгота, B – геодезична широта цих точок). Тому в задачах місцевизначення діють таким чином [2]. Умови задачі, що задані на сфероїдальній моделі поверхні Землі, переносять на допоміжну геометричну модель поверхні Землі – сферу, розв'язують задачу місцевизначення на сферичній моделі поверхні Землі, а потім здійснюють зворотний перехід: результат, що отриманий на сфері, переносять на сфероїд. Використання цього прийому пов'язане з відображенням сфероїдальної поверхні на поверхню сфери та розв'язанням головних геодезичних задач на сфероїді.

Методи відображення сфероїдальної поверхні на поверхню сфери можна поділити на дві групи [2]. Одну групу складають геодезичні методи, другу – негеодезичні. Геодезичні методи відображення передбачають відображення геодезичних ліній сфероїдальної поверхні дугами

великих кіл сфери, на яку здійснюється відображення, з радіусом, який дорівнює радіусу сфери. До таких методів належить метод Бесселя. Негеодезичні методи передбачають відображення геодезичних ліній сфероїдальної поверхні не дугами великих кіл сфери, а деякими іншими лініями. Це призводить до необхідності розраховувати спеціальні поправки (редукції) у відстані та кутах, які знайдені після відображення, що значно ускладнює математичні викладки та розрахунки. До таких методів належить метод рівнопроміжного відображення та деякі інші [2]. В зв'язку з цим, при виборі методу відображення сфероїдальної поверхні на поверхню сфери з метою спрощення математичного апарата та зменшення об'єму обчислень, доцільно вибирати геодезичні методи, умови відображення яких повністю або частково співпадають з початковими умовами головних геодезичних задач. Оскільки в прямій головній геодезичній задачі початковими умовами є виміряна відстань між точками та азимут напрямку з однієї точки на іншу, то для відображення сфероїдальної поверхні на поверхню сфери доцільно застосовувати метод Бесселя.

2.1. Метод Бесселя відображення сфероїдальної поверхні на поверхню сфери

Метод Бесселя відображення сфероїдальної поверхні (рис. 2) на поверхню сфери передбачає такі умови [2]:

- геодезична лінія на сфероїдальній поверхні відображається дугою великого кола сфери;
- у відповідних точках геодезичної лінії сфероїда та дуги великого кола сфери азимуту однакові;
- широта довільної точки на сферичній поверхні дорівнює приведеній геодезичній широті відповідної точки на сфероїдальній поверхні.

Згідно з другою та третьою умовами відображення існують рівняння:

$$\alpha = A \tag{6}$$

та

$$\varphi = u = \text{arctg}(\sqrt{1-e^2} \text{tg } B), \tag{7}$$

де α , A – відповідно сферичний та геодезичний азимуту ліній на поверхнях сфери та сфероїда;

φ , B , u – сферична, геодезична та приведена геодезична широта відповідних точок сфери та сфероїда.

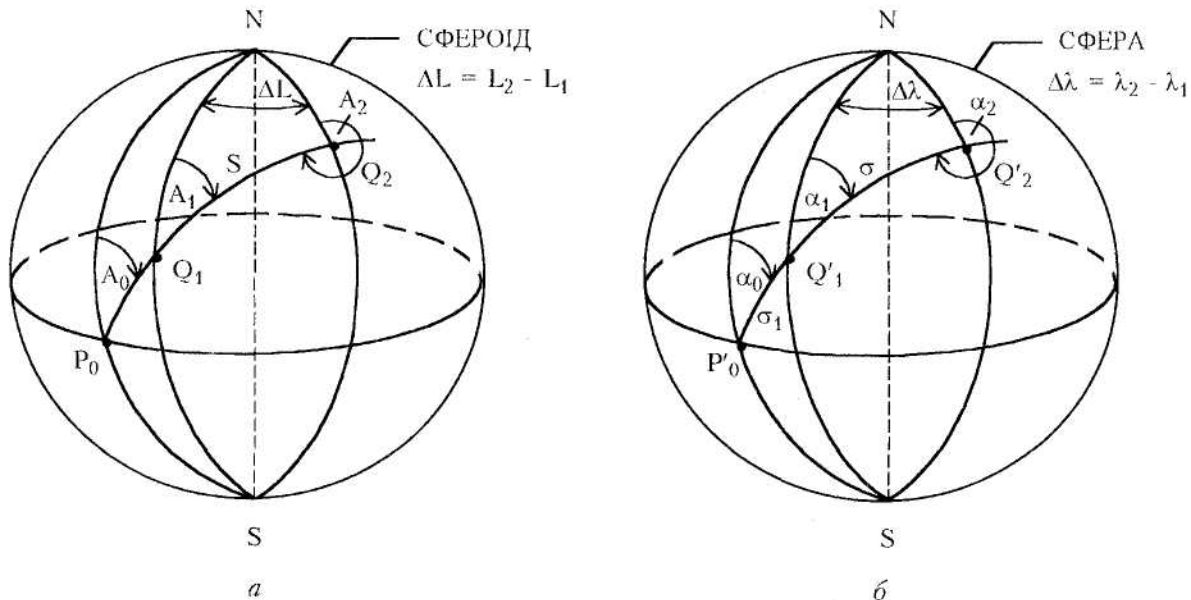


Рис. 2

Зв'язок між довжиною геодезичної лінії на сфероїдальній поверхні S та відповідною їй сферичною довжиною дуги великого кола сфери σ визначається за формулою:

$$S = b[K_1\sigma - K_2 \sin \sigma \cos (2\sigma_1 + \sigma) - K_3 \sin 2\sigma \cos (4\sigma_1 + 2\sigma) - K_4 \sin 3\sigma \cos (6\sigma_1 + 3\sigma) - \dots], \tag{8}$$

де

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= 1 + \frac{1}{4}K^2 - \frac{3}{64}K^4 + \frac{5}{256}K^6 - \dots; \\ K_2 &= \frac{1}{4}K^2 - \frac{1}{16}K^4 + \frac{15}{256}K^6 - \dots; \\ K_3 &= \frac{1}{64}K^4 - \frac{3}{256}K^6 + \dots; \\ K_4 &= \frac{1}{512}K^6 - \dots \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

У цих формулах σ_1 – відстань вздовж дуги великого кола сфери, яке проходить через точки Q'_1, Q'_2 від точки перетину з екватором P'_0 до точки Q'_1 (рис.2,б).

Коефіцієнт K^2 обчислюється за формулою:

$$K^2 = \frac{e^2}{1-e^2} \cos^2 \alpha_0, \quad (10)$$

де α_0 – азимут дуги великого кола сфери, що проходить через точки Q'_1, Q'_2 у точці перетину з екватором P'_0 .

Азимут α_0 та відстань σ_1 обчислюються за формулами:

$$\sin \alpha_0 = \sin \alpha_1 \cos \varphi_1, \quad (11)$$

$$\sin \sigma_1 = \frac{\sin \varphi_1}{\cos \alpha_0}, \quad (12)$$

де α_1 – азимут дуги великого кола сфери, яке проходить через точки Q'_1, Q'_2 у точці Q'_1 ;

φ_1 – широта точки Q'_1 на поверхні сфери.

З формули (8) можна отримати формулу для обчислення невідомої відстані на поверхні сфери σ за відомою відстанню на поверхні сфероїда S :

$$\sigma = \frac{1}{K_1} \left[\frac{S}{b} + K_2 \sin \sigma \cos (2\sigma_1 + \sigma) + K_3 \sin 2\sigma \cos (4\sigma_1 + 2\sigma) + K_4 \sin 3\sigma \cos (6\sigma_1 + 3\sigma) + \dots \right]. \quad (13)$$

Отримане рівняння є трансцендентним, тому обчислення сферичної відстані σ за його допомогою здійснюється методом послідовних наближень. Як початкове наближення береться перший член формули (13):

$$\sigma_0 = \frac{1}{K_1 b} S. \quad (14)$$

Різниця геодезичних довгот $L_2 - L_1$ точок Q_2 та Q_1 сфероїдальної поверхні пов'язана з різницею довгот $\lambda_2 - \lambda_1$ точок Q'_2 та Q'_1 на поверхні сфери формулою:

$$L_2 - L_1 = (\lambda_2 - \lambda_1) - \sin \alpha_0 [K'_1 \sigma + K'_2 \sin \sigma \cos (2\sigma_1 + \sigma) - K'_3 \sin 2\sigma \cos (4\sigma_1 + 2\sigma) + \dots], \quad (15)$$

де

$$\left. \begin{aligned} K'_1 &= \frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{8} + \frac{e^6}{16} + \dots - \left(\frac{e^4}{16} + \frac{e^6}{16} \right) \cos^2 \alpha_0 + \left(\frac{3}{128} e^6 + \dots \right) \cos^4 \alpha_0 + \dots; \\ K'_2 &= \left(\frac{e^4}{16} + \frac{e^6}{16} + \dots \right) \cos^2 \alpha_0 - \left(\frac{e^6}{32} + \dots \right) \cos^4 \alpha_0 + \dots; \\ K'_3 &= \frac{e^6}{256} \cos^4 \alpha_0 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

коефіцієнти, що обчислюються за відомим значенням сферичного азимута α_0 .

2.2. Пряма головна геодезична задача на сфероїдальній моделі поверхні Землі

Вихідними даними для розв'язання прямої головної геодезичної задачі на сфероїдальній моделі поверхні Землі є (рис. 2, а):

- геодезична довгота L_1 та геодезична широта B_1 точки Q_1 ;

- геодезичний азимут A_1 лінії $Q_1 Q_2$ у точці Q_1 ;
- геодезична відстань S між точками Q_1 та Q_2 .

Потрібно визначити:

- геодезичну довготу L_2 та геодезичну широту B_2 точки Q_2 ;
- геодезичний азимут A_2 напрямку на точку Q_1 з точки Q_2 .

Задача розв'язується у такій послідовності [2]:

1. За допомогою формул (6) та (7) умови задачі переносяться на допоміжну геометричну модель поверхні Землі – сферу.

2. Для розрахунку сферичної відстані σ за відомою геодезичною відстанню S за допомогою формули (11) обчислюється азимут $\alpha_0 = A_0$ дуги великого кола сфери у точці її перетину з екватором P'_0 (рис. 2, б), за формулою (12) – сферична відстань σ_1 від цієї точки до точки Q'_1 , за допомогою формул (9) та (10) – значення допоміжних коефіцієнтів K^2, K_1, \dots, K_4 . За формулою (13) методом послідовних наближень обчислюється сферична відстань σ між зображеннями точок Q_1 та Q_2 на поверхні сфери точками Q'_1 та Q'_2 .

3. Розв'язується пряма головна геодезична задача на сферичній моделі поверхні Землі (п. 1.1). За відомими значеннями сферичної широти φ_1 точки Q'_1 , сферичної відстані σ між точками Q'_1, Q'_2 та азимуту $\alpha_1 = A_1$ обчислюються значення різниці сферичних довгот $\lambda_2 - \lambda_1$ точок Q'_1 та Q'_2 , сферичної широти φ_2 точки Q'_2 та сферичного азимуту α_2 напрямку на точку Q'_1 з точки Q'_2 . Окремо довгота λ_2 точки Q'_2 не визначається.

4. За знайденими значеннями величин $\lambda_2 - \lambda_1$ та φ_2 на сфері розраховуються геодезичні координати L_2 та B_2 точки Q_2 на сфероїді. Для обчислень застосовуються формули (7), (15) та (16). Згідно з умовою (6) геодезичний азимут A_2 дорівнює сферичному азимуту α_2 ($A_2 = \alpha_2$).

2.3. Обернена головна геодезична задача на сфероїдальній моделі поверхні Землі

Вихідними даними для розв'язання оберненої головної геодезичної задачі на сфероїдальній моделі поверхні Землі є геодезичні координати L_1, B_1 та L_2, B_2 точок Q_1 та Q_2 . Потрібно визначити геодезичну відстань S між цими точками та геодезичні азимуты A_1, A_2 напрямків з однієї точки на іншу (рис. 2, а).

Для розв'язання задачі застосовується метод послідовних наближень [2].

1. Умови задачі переносяться на допоміжну геометричну модель поверхні Землі – сферу. За допомогою формули (7) обчислюються сферичні широти φ_1, φ_2 точок Q'_1, Q'_2 на поверхні сфери.

2. У першому наближенні приймається, що різниця сферичних довгот точок Q'_1, Q'_2 дорівнює різниці геодезичних довгот точок Q_1, Q_2 :

$$(\lambda_2 - \lambda_1)' = L_2 - L_1.$$

За допомогою формули (4) обчислюється перше наближення сферичної відстані σ' між точками Q'_1, Q'_2 на сфері.

3. Розв'язується сферичний трикутник $Q'_1 N Q'_2$ (рис. 2, б). За допомогою формули

$$\sin \alpha'_1 = \frac{\sin(\lambda_2 - \lambda_1)' \cos \varphi_2}{\sin \sigma'}$$

обчислюється перше наближення азимуту α'_1 напрямку на точку Q'_2 з точки Q'_1 . За формулою (11) розраховується перше наближення азимуту α'_0 дуги великого кола сфери, яке проходить через точки Q'_1, Q'_2 у точці її перетину з екватором P'_0 .

4. Уточнюється різниця довгот точок Q'_1, Q'_2 на сфері. За допомогою перших двох членів формули (15)

$$(\lambda_2 - \lambda_1)'' = L_2 - L_1 + K'_1 \sigma' \sin \alpha'_0,$$

де K'_1 – коефіцієнт, що розраховується за першою формулою системи (16), обчислюється друге наближення різниці сферичних довгот точок Q'_1, Q'_2 .

5. За відомими значеннями сферичних широт φ_1, φ_2 точок Q'_1, Q'_2 та отриманим значенням різниці сферичних довгот $(\lambda_2 - \lambda_1)''$ цих точок розв'язується обернена головна геодезична задача на сферичній моделі поверхні Землі (п. 1.2), визначаються другі наближення сферичної відстані σ'' між точками Q'_1, Q'_2 та сферичних азимутів α''_1 та α''_2 напрямків з однієї точки на іншу.

Подальші розрахунки дійсних значень сферичної відстані σ , азимутів α_1, α_2 та різниці сферичних довгот $\lambda_2 - \lambda_1$ точок Q'_1, Q'_2 на поверхні сфери зводяться до послідовного застосування формул (11), (12), (15), (16) та розв'язання оберненої головної геодезичної задачі на сферичній моделі поверхні Землі з відповідним збільшенням на кожному наступному кроці обчислень кількості членів у формулі (15).

6. За допомогою формул (11) та (12) розраховуються дійсні значення сферичної відстані σ_1 та сферичного азимута α_0 на поверхні сфери. За цими значеннями та формулами (8)–(10) обчислюється геодезична відстань S між точками Q_1, Q_2 на сфероїді. Геодезичні азимуты A_1, A_2 напрямків з однієї точки на іншу дорівнюють сферичним азимутам α_1 та α_2 відповідних напрямків на сфері: $A_1 = \alpha_1, A_2 = \alpha_2$.

3. Розрахунок координат джерел сейсмічних збурень далекомірним методом

3.1. Розрахунок координат джерел сейсмічних збурень на сферичній моделі поверхні Землі

Вважатимемо, що на сфері як на геометричній моделі поверхні Землі задано положення двох далекомірних пунктів (рис. 3, а): пункту P'_1 (сферична довгота λ_1 та сферична широта φ_1) та пункту P'_2 (сферична довгота λ_2 та сферична широта φ_2). У цих пунктах виміряні лінійні відстані до місця джерела появи сигналів – відповідно відстані R_1 та R_2 . Потрібно визначити координати джерела – його сферичну довготу λ_M та сферичну широту φ_M .

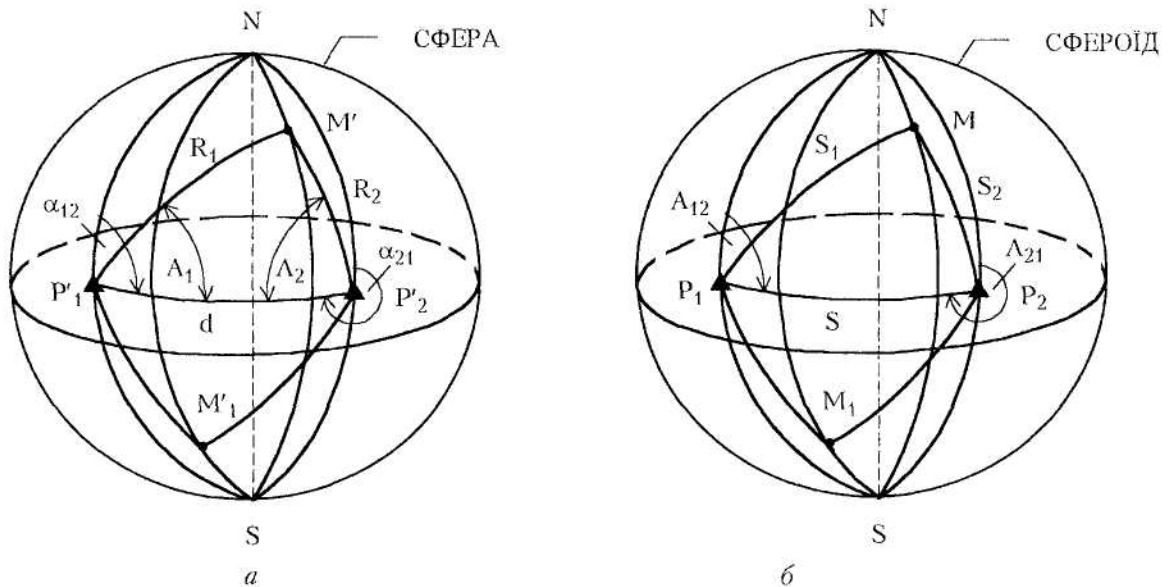


Рис. 3

Лінії положення сталого значення відстані на сфері являють собою кола з радіусами R_1 та R_2 , які дорівнюють відстаням, що виміряні до джерела. Оскільки ці кола перетинаються в двох точках, то визначених місць джерел появи сейсмічних сигналів (в подальшому просто сигналів) два (точки M' та M'_1). Одне з них є дійсним місцем джерела сигналів, інше – хибним, яке з'являється внаслідок обчислень. Для встановлення дійсного положення місця джерела необхідні додаткові дані. Такими даними можуть бути або приблизне значення азимута напрямку на джерело, що визначений в одному з пунктів, або дані вимірювань відстані до джерела за допомогою додаткового (третього) далекомірного пункту.

Розглянемо математичний апарат, за допомогою якого можна визначити координати місця джерела появи сигналів з двох далекомірних пунктів.

За допомогою математичного апарата розв'язання оберненої головної геодезичної задачі на сферичній моделі поверхні Землі (п. 1.2) розраховується величина бази d між пунктами P_1 , P_2 та сферичні азимути α_{12} та α_{21} напрямків з одного пункту на інший (рис. 3, а).

З трикутника P_1MP_2 за теоремою косинуса сторони сферичного трикутника [5] визначаються допоміжні кути A_1 та A_2 , які створені базою d та сторонами R_1 , R_2 :

$$\cos A_1 = \frac{\cos \frac{R_2}{R_3} - \cos \frac{d}{R_3} \cos \frac{R_1}{R_3}}{\sin \frac{d}{R_3} \sin \frac{R_1}{R_3}}, \quad \cos A_2 = \frac{\cos \frac{R_1}{R_3} - \cos \frac{d}{R_3} \cos \frac{R_2}{R_3}}{\sin \frac{d}{R_3} \sin \frac{R_2}{R_3}}.$$

Подальші розрахунки координат місця джерела появи сигналів (точки M') здійснюються шляхом розв'язання прямої головної геодезичної задачі на сферичній моделі поверхні Землі (п. 1.1) за відомими сферичними координатами φ_1 , λ_1 пункту P_1 , значеннями сферичної відстані $\sigma_1 = R_1 / R_3$ та різниці кутів α_{12} та A_1 – азимута $\alpha_{12} - A_1$ (або за координатами φ_2 , λ_2 пункту P_2 , значеннями відстані $\sigma_2 = R_2 / R_3$ та азимута $\alpha_{21} + A_2$). Координати точки M' можна отримати таким же чином, але з врахуванням інших кутів – відповідно азимутів $\alpha_{12} + A_1$ та $\alpha_{21} - A_2$.

3.2. Розрахунок координат джерел сейсмічних збурень на сфероїдальній моделі поверхні Землі

На сфероїдальній моделі поверхні Землі задача визначення координат місця джерел появи сигналів далекомірним методом формулюється таким чином.

Відомі геодезичні координати двох далекомірних пунктів (рис. 3, б): пункту P_1 – геодезична довгота L_1 та геодезична широта B_1 та пункту P_2 – геодезична довгота L_2 та геодезична широта B_2 . У цих пунктах виміряні геодезичні відстані до джерела сигналів – відповідно відстані S_1 та S_2 . Потрібно визначити координати джерела: його геодезичну довготу L_M та геодезичну широту B_M .

Розв'язання задачі здійснюється шляхом розв'язання головних геодезичних задач з застосуванням методу послідовних наближень. Для зображення сфероїда на сферу застосовується метод Бесселя.

Послідовність обчислень така:

1. За відомими геодезичними координатами точок реєстрації P_1 , P_2 (відповідно L_1 , B_1 та L_2 , B_2) згідно з математичним апаратом розв'язання оберненої головної геодезичної задачі на сфероїдальній моделі поверхні Землі (п. 2.3) розраховується величина бази s між пунктами P_1 , P_2 та геодезичні азимуты A_{12} напрямку на пункт P_2 з пункту P_1 та A_{21} напрямку на пункт P_1 з пункту P_2 . У процесі розв'язання цієї задачі визначається сферична довжина бази $\sigma = s / R_3$ між зображеннями P_1' , P_2' пунктів P_1 , P_2 на сфері та сферичні азимуты напрямків з одного пункту на інший пункт: $\alpha_{12} = A_{12}$, $\alpha_{21} = A_{21}$.

2. Застосовується метод послідовних наближень. У першому наближенні вважається, що лінійні відстані між зображеннями пунктів реєстрації P_1' , P_2' та зображенням джерела сигналів на сфері (точкою M') дорівнюють геодезичним відстаням між цими пунктами та джерелом, що визначені на сфероїді: $R_1 = S_1$, $R_2 = S_2$. За формулою (7) обчислюються сферичні широти φ_1 , φ_2 зображень пунктів реєстрації P_1' , P_2' на сфері.

3. За допомогою математичного апарата визначення координат місця джерел появи сигналів далекомірним методом на сферичній моделі поверхні Землі (п. 3.1) розраховується сферична широта φ_M зображення джерела сигналів на сфері та різниця сферичних довгот $\lambda_M - \lambda_1$ зображень джерела та пункту реєстрації P_1' . Окремо сферична довгота λ_M на сфері не обчислюється.

4. За допомогою формул (11), (12), (15) та (16) за різницею сферичних довгот $\lambda_M - \lambda_1$, що обчислена, розраховується різниця геодезичних довгот $L_M - L_1$. За цією різницею та відомою

геодезичною довготою L_1 пункту P_1 визначається перше наближення геодезичної довготи L'_M місця джерела появи сигналів на сфероїді. За формулою (7) розраховується перше наближення геодезичної широти B'_M джерела сигналів на сфероїді.

5. За відомими геодезичними координатами пунктів P_1, P_2 та першим наближенням координат місця джерела появи сигналів L'_M, B'_M згідно з математичним апаратом розв'язання оберненої головної геодезичної задачі на сфероїдальній моделі поверхні Землі (п. 2.3) розраховуються відстані $S'_{1РОЗР}$ та $S'_{2РОЗР}$ від джерела до далекомірних пунктів P_1, P_2 . В загальному випадку значення цих відстаней будуть відрізнятися від їх вимірних значень: $S'_{1РОЗР} \neq S_1, S'_{2РОЗР} \neq S_2$.

6. За формулами:

$$\Delta S'_1 = S'_{1РОЗР} - S_1, \quad \Delta S'_2 = S'_{2РОЗР} - S_2$$

та

$$S'_1 = S_1 - \Delta S'_1, \quad S'_2 = S_2 - \Delta S'_2$$

обчислюються та вводяться поправки $\Delta S'_1, \Delta S'_2$ у виміряні значення геодезичних відстаней S_1, S_2 від далекомірних пунктів P_1, P_2 до джерела сигналів на сфероїді.

7. За новими значеннями відстаней S'_1, S'_2 повторно розв'язується задача місцевизначення (виконуються пункти 2–7). Визначається друге наближення координат місця джерела появи сигналів на сфероїді L''_M, B''_M . На цьому кроці обчислень координати місця джерела появи сигналів будуть визначені більш точно, ніж на попередньому кроці (L'_M, B'_M), а поправки $\Delta S''_1, \Delta S''_2$ у відстані S'_1, S'_2 будуть мати менші значення ніж поправки $\Delta S'_1, \Delta S'_2$ на попередньому кроці обчислень. Значення цих поправок визначають точність обчислень. Якщо ця точність нижча необхідної ($\Delta S''_1 > \varepsilon, \Delta S''_2 > \varepsilon$, де ε – деяке число, що визначає відстань), то за значеннями різниць $\Delta S''_1, \Delta S''_2$ обчислюються нові значення відстаней S''_1, S''_2 до джерела сигналів (поправки вводяться у відстані S'_1, S'_2) та нові значення його координат L'''_M, B'''_M (виконуються пункти 2–7). Обчислення здійснюються доти, доки не буде досягнута необхідна точність розрахунків. Як правило, достатньо трьох-чотирьох кроків обчислень.

Розрахунки показують, що даний математичний апарат забезпечує точність обчислення координат місця джерел появи сигналів на сфероїдальній моделі поверхні Землі (похибку методу обчислень), що відповідає похибці за положенням в декілька сантиметрів.

Викладений математичний апарат може застосовуватись не тільки для визначення координат джерел сейсмічних збурень, а й в геодезії, картографії, навігації, інших галузях науки і техніки, загалом там, де існує необхідність визначення координат об'єктів зі значною точністю.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Закатов П.С.* Курс высшей геодезии. – М.: Недра, 1976. – 511 с.
2. *Баграмуни Г.В.* Курс сфероидической геодезии. – М.: Геодезиздат, 1962. – 252 с.
3. *Пасечник И.П.* Характеристика сейсмических волн при ядерных взрывах и землетрясениях. – М.: Наука, 1970. – 191 с.
4. *Яковлев Н.В., Беспалов Н.А., Глумов В.П. и др.* Практикум по высшей геодезии (вычислительные работы): Учебное пособие для вузов. – М.: Недра, 1982. – 368 с.
5. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / Под общей редакцией И.Г. Арамановича. – М.: Наука, 1974. – 640 с.

ХОМЕНКО В'ячеслав Григорович – старший викладач Житомирського військового орденів Жовтневої Революції і Червоного Прапора інституту радіоелектроніки імені С.П. Корольова.

Наукові інтереси:

– методи визначення координат об'єктів на геометричних моделях поверхні Землі.