

УДК 517.958:539.372

С.І. Скуратівський, ст. викл.
Житомирський інженерно-технологічний інститут**ЕВОЛЮЦІЯ ТЕСТОВОГО АВТОХВИЛЬОВОГО РОЗВ'ЯЗКУ
МОДЕЛІ СЕРЕДОВИЩА З НЕЛОКАЛЬНОСТЯМИ**

(Представлено д.ф.-м.н. В.В. Михайленком)

Для моделі структурованого середовища, записаної у вигляді системи диференціальних рівнянь з частинними похідними, будується неявна чисельна схема в рамках кінево-різницевого методу. За текст для чисельної схеми пропонується задача поширення неперервної автомобільної хвилі.

Вступ

Рух суцільного середовища, в якому відсутнє внутрішнє тертя та теплопровідність, моделюється системою рівнянь з частинними похідними, що виражають закони збереження маси та імпульсу. В довгохвильовому наближенні вищезгадана система описує адиабатичні рухи структурованого середовища [1]. Система замикається динамічним рівнянням стану, яке містить інформацію про релаксаційні властивості середовища. Для опису нерівноважних процесів, що характеризуються малим відхиленням від стану повної термодинамічної рівноваги, використовують рівняння Максвелла, Олдройта, Кельвіна-Фойгта, Ляхова тощо [3]. Однак вони непридатні для опису високоінтенсивного імпульсного навантаження (удар, вибух, сейсмічна хвиля, асоційована з землетрусом чи падінням метеориту). Для дослідження таких задач динамічне рівняння стану запропоновано в роботах [1–3] В.А. Даниленка, В.А. Владімірова, Т.Б. Даневич, В.Ю. Королевича та інших. Після процедури безрозмірювання замкнута система диференціальних рівнянь має наступний вигляд [3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) &= 0; & \frac{\partial u}{\partial t} + (u \nabla) u &= -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \frac{F}{\rho}; \\ \tau \left(\frac{dp}{dt} - \chi \frac{d\rho}{dt} \right) &= \kappa p - p + \sigma \left\{ \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} - \chi \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 \right) \right\}, \end{aligned} \quad (1)$$

де u – масова швидкість; ρ – густина; p – тиск; $F = \gamma p$ – масова сила; χ , κ , τ , σ , h – безрозмірні параметри. Представлена модель гідродинамічного типу враховує вплив просторової нелокальності та презентує новий клас задач, який потребує всебічного вивчення. Як показали дослідження [4–5], модель (1) в класі інваріантних розв'язків демонструє періодичну, мультиперіодичну, квазіперіодичну, хаотичну солітоноподібну поведінку. Однак відкритим лишається питання про стійкість таких розв'язків відносно малих збурень початкових даних. Дослідження цього питання можна провести за допомогою чисельного моделювання системи (1).

У випадку нелінійних систем диференціальних рівнянь з частинними похідними чисельне моделювання є одним з найбільш розвинутих методів їх вивчення. Чисельні методи передбачають перехід від неперервної до дискретної моделі, яка являє собою систему *різницевих рівнянь* (або *чисельну схему*) [6] відносно значень функцій в скінченній або зчисленній кількості точок простору незалежних змінних. У зв'язку з цією обставиною розв'язки дискретного аналога проявляють ряд специфічних рис, не властивих неперервній моделі. До розряду «небажаних» проявів дискретизації моделі можна віднести появу схемних коливань, ентропійного сліду, неконсервативності, немонотонності тощо [6]. Способи подолання наведених та інших недоліків чисельних схем, як правило, дослідник знаходить самостійно, але найбільш часто вживані в деталях описані в багатьох роботах [6–8]. На сьогоднішній день будуються одно- або багатопараметричні чисельні схеми, серед яких вибираються кращі. Тобто схема повинна мати достатній порядок апроксимації вихідної системи, має бути стійкою, по можливості консервативною та простою при описі неоднорідностей потоку, дискретний розв'язок повинен збігатися до розв'язку неперервної моделі тощо [6]. Але такий вичерпний аналіз вдається провести далеко не завжди, особливо у випадку нелінійної моделі.

Як правило, відносно простіше мати справу з явними чисельними схемами (метод характеристик, схема Лакса-Вендрофа, метод Годунова), коли значення невідомих на наступному часовому шарі визначаються лише їх значеннями на попередньому. Такі схеми добре працюють з неперервними розв'язками. Однак в «жорстких» задачах при описі ударних хвиль суперпози-

ції хвиль використання таких схем обмежується або просто неможливе із-за малого кроку по часовій змінній, що визначається умовою Куранта [6].

В таких ситуаціях вдаються до використання явно-неявних (схема предиктор-коректор, схема Кранка-Ніколсона) та суто неявних схем, коли значення невідомих змінних на наступному часовому шарі не виражаються через їх значення на попередньому шарі. Такі схеми демонструють більшу область стійкості, вищу точність розв'язку та інші переваги (більш детально [6]). До деяких незручностей можна віднести більший об'єм необхідних даних, що одночасно знаходяться в пам'яті ЕОМ.

Така різноманітність чисельних схем є доказом того, що «ідеальної» схеми немає. Нерідко трапляються ситуації, коли одна схема «працює», інша – ні. У випадку лінійних та квазілінійних систем диференціальних рівнянь аналіз придатності схеми можна провести аналітично [6]. Для нелінійних систем такий аналіз проводять рідко. Як пояснює А.А. Самарський, «во-первых, это приводит к весьма громоздким вычислениям и, во-вторых, получаемые оценки весьма грубы (что, вообще говоря, типично для нелинейных задач) и дают не вполне правильное представление об условиях применимости ... разностных схем. В связи с этим заметим, что для нелинейных задач первостепенное значение для проверки качества численных методов имеют тесты, т.е. численное решение частных задач – типичных представителей класса решаемых задач, для которых известны аналитические решения» [7].

1. Побудова чисельної схеми

Одну з можливих чисельних схем для інтегрування системи (1) можна побудувати в рамках кінцево-різницевого методу.

Виконаємо перетворення координат, вигляд яких продиктований симетричними властивостями системи (1):

$$u(x, t) = U(x, t) + D, \quad \rho(x, t) = \rho_0 \text{Exp}[S(x, t) + \xi t], \quad p(x, t) = \rho(x, t)Z(x, t).$$

Тоді система ДРЧП (1) прийме вигляд:

$$\begin{aligned} U_t + (U + D)U_x + S_x Z + Z_x - \gamma &= 0; \\ Z_t - \frac{1}{\tau}(\kappa - \chi\sigma S_{xx} - \chi\tau U_x - Z + 2\sigma S_x^2 Z + \sigma S_{xx} Z + \tau U_x Z + 3\sigma Z_x S_x - D\tau Z_x - \\ - \tau U Z_x + \sigma Z_{xx}) &= 0; \\ S_t + \xi + (U + D)S_x + U_x &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Для системи (2) запишемо чисельну схему, апроксимувавши значення похідних та функцій їх різницевиими аналогами:

$$\begin{aligned} f_t &\sim \frac{f_i^{j+1} - f_i^j}{dt}, \quad f_x \sim \frac{f_{i+1}^{j+1} - f_{i-1}^{j+1}}{2h}, \\ f_{xx} &\sim \frac{f_{i-1}^{j+1} - 2f_i^{j+1} + f_{i+1}^{j+1}}{h^2}, \quad f_i^j \sim \frac{f_i^{j+1} + f_i^j}{2}. \end{aligned} \tag{3}$$

Остаточно одержимо наступну чисельну схему:

$$\begin{aligned} f1(U^{j+1}, Z^{j+1}, S^{j+1}) &\equiv \frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{dt} + \left(\frac{U_{i+1}^{j+1} + U_{i-1}^j}{2} + D \right) \frac{U_{i+1}^{j+1} - U_{i-1}^{j+1}}{2h} + \\ &+ \frac{(S_{i+1}^{j+1} - S_{i-1}^{j+1})(Z_i^{j+1} + Z_i^j)}{4h} + \frac{Z_{i+1}^{j+1} - Z_{i-1}^{j+1}}{2h} - \gamma = 0; \\ f2(U^{j+1}, Z^{j+1}, S^{j+1}) &\equiv \frac{Z_i^{j+1} - Z_i^j}{dt} - \frac{1}{\tau}(\kappa - \chi\sigma \frac{S_{i+1}^{j+1} - 2S_i^{j+1} + S_{i-1}^{j+1}}{h^2} - \chi\tau \frac{U_{i+1}^{j+1} - U_{i-1}^{j+1}}{2h} - \\ &- \frac{Z_i^{j+1} + Z_i^j}{2} + 2\sigma \left(\frac{S_{i+1}^{j+1} - S_{i-1}^{j+1}}{2h} \right)^2 \frac{Z_i^{j+1} + Z_i^j}{2} + \sigma \frac{(S_{i+1}^{j+1} - 2S_i^{j+1} + S_{i-1}^{j+1})(Z_i^{j+1} + Z_i^j)}{2h^2} + \\ &+ \tau \frac{(U_{i+1}^{j+1} - U_{i-1}^{j+1})(Z_i^{j+1} + Z_i^j)}{4h} + 3\sigma \frac{(S_{i+1}^{j+1} - S_{i-1}^{j+1})(Z_{i+1}^{j+1} - Z_{i-1}^j)}{4h^2} - \\ &- \tau \left(\frac{U_{i+1}^{j+1} + U_{i-1}^j}{2} + D \right) \frac{Z_{i+1}^{j+1} - Z_{i-1}^{j+1}}{2h} + \sigma \frac{Z_{i+1}^{j+1} - 2Z_i^{j+1} + Z_{i-1}^{j+1}}{h^2} = 0; \\ f3(U^{j+1}, Z^{j+1}, S^{j+1}) &\equiv \frac{S_i^{j+1} - S_i^j}{dt} + \xi + \left(\frac{U_{i+1}^{j+1} + U_{i-1}^j}{2} + D \right) \frac{S_{i+1}^{j+1} - S_{i-1}^{j+1}}{2h} + \frac{U_{i+1}^{j+1} - U_{i-1}^{j+1}}{2h} = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Розв'язання одержаних рівнянь проведемо за допомогою методу Ньютона [9]. Для застосування методу необхідно утворити матрицю Якобі J .

$$J = \begin{bmatrix} H_{1,1} & H_{1,2} & H_{1,3} \\ H_{2,1} & H_{2,2} & H_{2,3} \\ H_{3,1} & H_{3,2} & H_{3,3} \end{bmatrix},$$

$$H_{1,1} = \frac{\partial f_1}{\partial U_j}, \quad H_{1,2} = \frac{\partial f_1}{\partial S_j}, \quad H_{1,3} = \frac{\partial f_1}{\partial Z_j};$$

$$H_{2,1} = \frac{\partial f_2}{\partial U_j}, \quad H_{2,2} = \frac{\partial f_2}{\partial S_j}, \quad H_{2,3} = \frac{\partial f_2}{\partial Z_j};$$

$$H_{3,1} = \frac{\partial f_3}{\partial U_j}, \quad H_{3,2} = \frac{\partial f_3}{\partial S_j}, \quad H_{3,3} = \frac{\partial f_3}{\partial Z_j};$$

$$i = 0, 1, \dots, n, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

$$(H_{1,1})_{i-1} = -dt \frac{U_i^{j+1} + U_i^j + 2D}{4h}, \quad (H_{1,1})_i = 1 + \frac{U_{i+1}^{j+1} - U_{i-1}^{j+1}}{4h} dt;$$

$$(H_{1,1})_{i+1} = dt \frac{U_i^{j+1} + U_i^j + 2D}{4h},$$

$$(H_{1,2})_{i-1} = -\frac{dt}{2h}, \quad (H_{1,2})_i = dt \frac{S_{i-1}^{j+1} - S_{i-1}^{j+1}}{4h}, \quad (H_{1,2})_{i+1} = \frac{dt}{2h},$$

$$(H_{1,3})_{i-1} = -dt \frac{Z_i^{j+1} + Z_i^j}{4h}, \quad (H_{1,3})_i = 0, \quad (H_{1,3})_{i+1} = dt \frac{Z_i^{j+1} + Z_i^j}{4h},$$

$$(H_{2,1})_{i-1} = dt \frac{2\chi - Z_i^{j+1} - Z_i^j}{4h}, \quad (H_{2,1})_i = dt \frac{Z_{i-1}^{j+1} - Z_{i+1}^{j+1}}{4h}, \quad (H_{2,1})_{i+1} = -dt \frac{2\chi - Z_i^{j+1} - Z_i^j}{4h},$$

$$(H_{2,2})_{i-1} = dt \frac{4\sigma + 3\sigma S_{i-1}^{j+1} - 3\sigma S_{i+1}^{j+1} + \tau h U_i^{j+1} + 2Dh\tau + h\tau U_i^j}{4h^2\tau},$$

$$(H_{2,2})_i = dt \left(\frac{-1}{2} - 2\frac{\sigma}{h^2} + \sigma \frac{(S_{i-1}^{j+1} - S_{i+1}^{j+1})^2}{4h^2} + \sigma \frac{S_{i-1}^{j+1} - 2S_{i+1}^{j+1} + S_{i+1}^{j+1}}{2h^2} + \tau^2 \frac{U_{i+1}^{j+1} - U_{i-1}^{j+1}}{4h} \right) - 1,$$

$$(H_{2,2})_{i+1} = dt \frac{4\sigma - 3\sigma S_{i-1}^{j+1} + 3\sigma S_{i+1}^{j+1} - \tau h U_i^{j+1} - 2Dh\tau - h\tau U_i^j}{4h^2\tau},$$

$$(H_{2,3})_{i-1} = \frac{3Z_{i-1}^{j+1} + 2Z_i^{j+1} - 3Z_{i+1}^{j+1} + 2Z_i^{j+1} S_{i-1}^{j+1} - 2Z_i^{j+1} S_{i+1}^{j+1} - 4\chi + Z_i^j (2 + 2S_{i-1}^{j+1} - 2S_{i+1}^{j+1})}{4h^2\tau(dt\sigma)^{-1}},$$

$$(H_{2,3})_i = dt\sigma \frac{2\chi - Z_i^{j+1} - Z_i^j}{h^2\tau},$$

$$(H_{2,3})_{i+1} = \frac{2Z_i^{j+1} - 3Z_{i-1}^{j+1} + 3Z_{i+1}^{j+1} - 2Z_i^{j+1} S_{i-1}^{j+1} + 2Z_i^{j+1} S_{i+1}^{j+1} - 4\chi + 2Z_i^j (1 - S_{i-1}^{j+1} + S_{i+1}^{j+1})}{4h^2\tau(dt\sigma)^{-1}},$$

$$(H_{3,1})_{i-1} = -\frac{dt}{2h}, \quad (H_{3,1})_i = \frac{(S_{i+1}^{j+1} - S_{i-1}^{j+1})dt}{4h}, \quad (H_{3,1})_{i+1} = \frac{dt}{2h},$$

$$(H_{3,2})_{i-1} = (H_{3,2})_i = (H_{3,2})_{i+1} = 0,$$

$$(H_{3,3})_{i-1} = -dt \frac{U_i^{j+1} + U_i^j + 2D}{4h}, \quad (H_{3,3})_i = 1, \quad (H_{3,3})_{i+1} = dt \frac{U_i^{j+1} + U_i^j + 2D}{4h}.$$

Проведемо гармонічний аналіз [6] схеми (4) в лінійному наближенні, підставивши варіацію у вигляді гармоніки. Нехай

$$\delta U_i^j = \delta U_0 R^j \Psi^i, \quad \delta Z_i^j = \delta Z_0 R^j \Psi^i, \quad \delta S_i^j = \delta S_0 R^j \Psi^i, \quad (5)$$

де $R = e^{wdt}$, $\Psi = e^{Ikh}$,

k – дійсне, I – уявна одиниця.

Тоді дисперсійне рівняння схеми (4) має вигляд:

$$\begin{vmatrix} P + DRQ & RQ & 0 \\ \chi\tau RQ & \tau P + \frac{R+1}{2} + D\tau RQ + \frac{4\sigma R \sin^2(kh/2)}{h^2} & -4\chi\sigma R \frac{\sin^2(kh/2)}{h^2} \\ RQ & 0 & P + DRQ \end{vmatrix} = 0, \quad (6)$$

де $Q = I \frac{\sin(kh)}{h}$; $P = \frac{R-1}{dt}$.

Аналітичний розв'язок рівняння (6) відносно R доволі громіздкий та непридатний для аналізу, тому не наводиться в розгорнутому вигляді. Однак при фіксованих значеннях параметрів чисельно можна знайти розв'язок рівняння (6).

2. Постановка задачі Коші для чисельної схеми (4)

Тестовою задачею для чисельної схеми (4) виберемо задачу про поширення неперервної автомодельної хвилі зі сталою швидкістю.

Нехай $\xi = 0 \Rightarrow \gamma = 0$. Підставимо

$$U = U(\omega) + D, \quad w = x - Dt, \quad \rho = \rho_0 e^{s(\omega)}, \quad p = Z(w)\rho$$

в систему (2). Тоді можна отримати наступні квадратури:

$$S = \ln\left(\frac{C_1}{U}\right), \quad (7)$$

$$Z = (C_2 - U)U \quad (8)$$

та системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку:

$$\begin{aligned} \dot{U} &= W, \\ \dot{W} &= \frac{U^2(\kappa - Z) + \tau W U^2(U^2 - \chi) + \sigma W^2(U^2 - \chi)}{\sigma U(U^2 - \chi)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Структуру розв'язків отриманої системи (9) дослідимо за допомогою методів якісного аналізу [9]. Прирівнявши праві частини рівнянь системи (9) до нуля та поклавши $U_1 = -D$, одержимо координати особливих точок $(U_{1,2}, W_{1,2})$, а саме:

$$P_1 = (-D, 0) \text{ та } P_2 = \left(-\frac{\kappa}{D}, 0\right).$$

Тоді можна встановити і константи в умовах (7-9). Оскільки $\rho_{+\infty} = \rho_0 \Rightarrow C_1 = -D$, константа $C_2 = U_1 + U_2 = -\frac{D^2 + \kappa}{D}$. З фізичних міркувань слідує, що $D^2 > \kappa > 0$ та $\chi > D^2$, $\sigma > 0, \tau > 0$. Тому неперервна хвиля має виходити з особливої точки P_2 в точку P_1 . Таким чином, точка P_1 має бути або стійким вузлом, або стійким фокусом.

Оскільки матриця лінеаризованої системи в точці P_1 рівна

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\kappa - D^2}{\sigma(\chi - D^2)} & -\frac{D\tau}{\sigma} \end{pmatrix},$$

то стійкий фокус спостерігається у випадку

$$4D^2\sigma - 4\kappa\sigma + D^4\tau^2 - D^2\chi\tau^2 > 0, \quad (10)$$

в протилежному випадку особлива точка є стійким вузлом.

Матриця лінеаризованої системи в точці P_2 рівна

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\kappa(\kappa - D^2)}{\sigma(\kappa^2 - \chi D^2)} & -\frac{1}{D\sigma} \end{pmatrix}.$$

Оскільки $sp(J) = -\frac{\kappa\tau}{D\sigma} < 0$ та $\det(J) = \frac{\kappa(D^2 - \kappa)}{\sigma(\kappa^2 - \chi D^2)} < 0$, то особлива точка P_2 завжди не-

стійка. Використовуючи попередній аналіз особливих точок, можна вибрати значення параметрів так, щоб отримати розв'язок з різним типом хвильового фронту. Так, при $c = 2.0, k = 0.25, t = 1.0, s = 0.2, D = 1.0$ точка P_1 вузол, а відповідний розв'язок системи (9) подано на рис. 1.

Поданий на рис. 1 розв'язок знайдений з кроком $h = 0.45$ в $n = 101$ точці. Дослідимо його еволюцію, підставивши як початкові дані в чисельну схему (4). Виберемо крок вздовж часової змінної, рівний $dt = 0.5$, та виводитимемо результати роботи програми у вигляді послідовних графіків (рис. 2) через кожні 2.0 умовні одиниці часу.

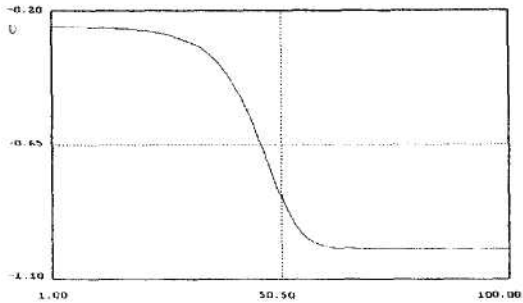


Рис. 1. Розв'язок системи (9)

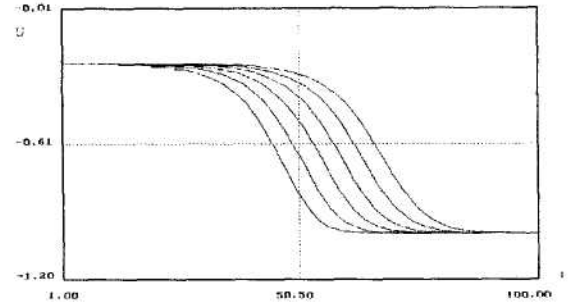


Рис. 2. Поширення інваріантної хвилі

Як показали обчислення, розв'язок (рис. 1) стійко еволюціонує в автотельному режимі, принаймні, протягом 10 умовних одиниць часу, що підтверджує коректну роботу схеми.

Висновки

Таким чином, в роботі наведено одна з можливих чисельних схем, складена в рамках кінцево-різницевого методу, та здійснено її тестування на задачі поширення автотельної хвилі. Вдале тестування схеми відкриває шлях до розв'язання більш складних задач, наприклад, моделювання поширення солітоноподібного розв'язку [5].

ЛІТЕРАТУРА:

1. Даневич Т.Б., Даниленко В.А. Уравнение состояния нелокальной среды с внутренними переменными, учитывающее временную и пространственную нелокальности // ДАН Украины. – 1998. – № 10. – С. 3–20.
2. Владимиров В.А., Даниленко В.А., Даневич Т.Б. Качественный анализ уравнений гидродинамики реагирующих и релаксирующих сред: Препр. / АН УССР. Ин-т проблем прочности. – К., 1989. – 50 с.
3. Владимиров В.А., Даниленко В.А., Королевич В.Ю. Нелинейные модели многокомпонентных сред. Динамика волновых структур и качественный анализ: Препр. / АН УССР. Ин-т геофизики. – К., 1990. – 40 с.
4. Vladimirov V.A., Skuratovsky S.I. Soliton-like solutions and other wave patterns in the nonlocal model of structured media // Reports on Math. Phys. – 2000. – Vol. 46, № 1/2. – P. 287–294.
5. Vladimirov V.A., Sidorets V.N., Skuratovsky S.I. Complicated travelling wave solutions of a modeling system describing media with memory and spatial nonlocality // Reports on Math. Phys. – 1999. – Vol. 44, № 1/2. – P. 275–282.
6. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. – М.: Наука, 1968. – 592 с.
7. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
8. Самарский А.А., Попов Ю.П. Конечно-разностные методы в решениях задач газовой динамики. – М.: Наука, 1980. – 300 с.
9. Методы анализа нелинейных динамических моделей / С.Холоднюк, А.Клич, М.Кубичек, М.Марек: Пер. с чеш. – М.: Мир, 1991. – 368 с.

СКУРАТИВСЬКИЙ Сергій Іванович – старший викладач кафедри вищої математики Житомирського інженерно-технологічного інституту.

Наукові інтереси:

- моделювання хвильових процесів;
- якісний аналіз динамічних систем.

E-mail: skur@ukr.net.ua