УДК 621.565

Д.В. Дмитришин, к.ф.-м.н., доц.
Одеський національний політехнічний університет

МЕТОДИ РОБАСТНОГО МОДЕЛЮВАННЯ СТІЙКИХ СИСТЕМ УПРАВЛІННЯ ЗІ ЗВОРОТНИМ ЗВ'ЯЗКОМ ЗАПІЗНЮВАННЯ

Отримані умови робастної стійкості систем управління із ланкою запізнювання зворотного зв'язку, яка є лінійною астатичною фіксованого порядку. Згідно з цими умовами, сформульовані принципи моделювання неідентифікованих систем.

1. Опис об'єкта дослідження.

В задачах моделювання лінійних систем автоматичного управління (САУ) одним з основних етапів дослідження є аналіз стійкості системи. При цьому в реальних САУ нерідко приходиться стикатися з явищем запізнювання, яке викликає появу самозбурних коливань, збільшення часу перерегулювання та інші небажані явища.

Питання про стійкість лінійних САУ із запізнюванням зводиться до перевірки знаків дійсних частин всіх нулів характеристичного квазіполіному [1, 2].

Розглянемо одноконтурну САУ із зворотним зв'язком при наявності елемента запізнювання (рис. 1).

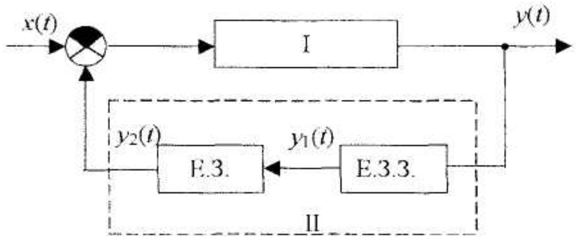

Рис. 1. Структурна схема одноконтурної САУ: I – власне система; II – ланцюг зворотного зв'язку, «Е.З.» – елемент запізнювання; «Е.З.З» – елемент зворотного зв'язку

Відмітимо, що елемент запізнювання може бути віднесений як до ланцюга зворотного зв'язку II, так і до власне системи I.

Блоки I, II вважаються лінійними об'єктами. При цьому ланки I, «Е.З.З.» моделюються за допомогою апріорі відомих передаточних функцій $W_1(\lambda)$, $W_{\text{Е.З.З.}}(\lambda)$, які є дробово-раціональними функціями змінної λ.

Лінійний об'єкт «Е.З.», який моделює залежність між вхідною $y_1(t)$ та вихідною $y_2(t)$ величинами, вважаємо стаціонарним. Якщо τ – величина повної затримки сигналу у ланці «Е.З», то

$$y_2(t) = L(y_1(t+\theta) \mid \theta \in [-\tau, 0]), \qquad (1)$$

де $L(\cdot)$ – лінійний неперервний функціонал, визначений у просторі неперервних функцій $X = \{x_t(\theta) = x(t+\theta) \mid \theta \in [-\tau, 0]\}$. Для того, щоб функціонал $L(\cdot)$ дозволяв моделювати ланки чистої затримки, наділимо простір X рівномірною нормою: $\|x_t(\theta)\| = \max\limits_{\theta \in [-\tau, 0]} |x(t+\theta)|$. Тоді за теоремою Рісса про представлення лінійного неперервного функціоналу [3] співвідношення (1) можна записати у вигляді:

$$y_2(t) = \int_0^1 y_1(t - \sigma\tau)\, dg(\sigma), \qquad (2)$$

де $g(\sigma)$ – функція обмеженої варіації на [0, 1].

Співвідношення

$$y_2(t) = \sum_{j=0}^{k} \gamma_j y_1(t - \sigma_j \tau), \qquad (3)$$

де $0 \le \sigma_0 < \sigma_1 < \ldots < \sigma_k = 1$, $\gamma_0, \ldots, \gamma_k$ – деякі дійсні числа, є частинним випадком (2), і йому відповідає структурна схема (рис. 2), в якій інтеграл згортки $\int_0^1 y_1(t-\sigma\tau)dg(\sigma)$ замінюється кінцево-різницевим виразом.

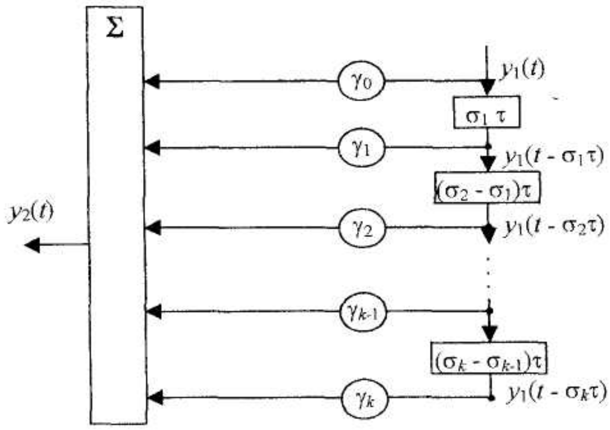

Рис. 2. Структурна схема ланки «Е.З.»

У загальному випадку ланка «Е.З.» моделює декілька фізичних процесів: збір, обробку інформації, передачу сигналу на виконавчі пристрої тощо. Тому вагова функція $g(\sigma)$, яка називається характеристичною функцією фільтра, апріорі невідома і дає загальний непараметричний опис лінійного об'єкта, а вся необхідна апріорна інформація зводиться лише до того, що об'єкт лінійний і що повна затримка сигналу рівна τ.

Питання про ідентифікацію вагової функції за експериментальними даними, які знімаються на вході та виході об'єкта, розглядався, наприклад, в [4] і зводився, насправді, до побудови параметричної моделі вагової функції (3). Цей спосіб ідентифікації має ряд недоліків: в модель явно входить параметричний порядок системи, який, взагалі кажучи, невідомий; отримана задача суттєво нелінійна; необхідно визначати достатньо велику кількість параметрів. Ці недоліки особливо суттєві в тих задачах, де об'єм вхідної вибірки значно перевищує об'єм вихідної. Такі задачі виникають, наприклад, у машинобудуванні, нафтопереробній, хімічній, харчовій промисловості – взагалі всюди, де неперервному чи неперервно-дискретному надходженню вхідного сигналу відповідає вихідний сигнал, що вимірюється лише в дискретні моменти часу.

В [5] запропонований метод непараметричної ідентифікації лінійних стаціонарних об'єктів вільний від вказаних недоліків. Теоретичною основою цього методу є проблема моментів, що потребує для застосування методу додаткової апріорної інформації про астатизм об'єкта: припускається, що вихідний об'єкт є астатичним $(m+1)$-го порядку, тобто обробляються без усталеної помилки вхідні сигнали, які насправді собою константи чи поліноми відносно змінної часу не вище степеня m. У цьому випадку вагова функція $g(\sigma)$ задовольняє додатковим співвідношенням [6]:

$$\int_0^1 \sigma^j dg(\sigma) = c_j\,,\ \ j = 0,\ \ldots,\ m. \tag{4}$$

Всюди в подальшому будемо вважати, що $c_0 = \int_0^1 dg(\sigma) = \int_0^1 | dg(\sigma) | = 1$, тобто $g(\sigma)$ належить множині функцій розподілу, які ускладнені моментними співвідношеннями (4), при цьому функції, які відрізняються тільки значеннями в точках розриву і постійними доданками, визначають один і той же розподіл. Цю множину позначимо $G(c_1, \ldots, c_m)$.

Питання про ідентифікацію чи повну ідентифікацію лінійної ланки «Е.З.» зводиться до вирішеності чи визначеності проблеми моментів (4). Так, ланка «Е.З.» ідентифікується, якщо послідовність $c_0, \ldots, c_m$ позитивна відносно системи функцій $1, \sigma, \ldots, \sigma^m$, і повністю ідентифікується, якщо послідовність $c_0, \ldots, c_m$ сингулярно позитивна [7].

2. Формулювання задачі

Якщо послідовність $c_0, \ldots, c_m$ сингулярно позитивна, то питання про стійкість САУ вирішується просто: необхідна та достатня умова стійкості – від'ємність дійсних частин всіх нулів характеристичного квазіполіному:

$$f(\lambda) = p_0(\lambda) + p_1(\lambda) \cdot \int_0^1 e^{-\lambda\tau\sigma} dg(\sigma),$$

де поліноми $p_0(\lambda)$, $p_1(\lambda)$ визначаються передаточними функціями $W_1(\lambda)$, $W_{\text{Е.З.З.}}(\lambda)$, причому, як правило, степінь $p_0(\lambda)$ більший за степінь $p_1(\lambda)$, а $g(\sigma)$ – єдине рішення моментної задачі (4). Квазіполіном $f(\lambda)$ у цьому випадку називається стійким. Критерії стійкості квазіполіномів відомі [8, 9].

Якщо ж $c_0, \ldots, c_m$ – позитивна послідовність, то ланка «Е.З.» ідентифікується не повністю, і стійкість САУ можна гарантувати лише тоді, коли стійкий кожен квазіполіном сімейства:

$$P_c = \left\{ f(\lambda) = p_0(\lambda) + p_1(\lambda) \cdot \int_0^1 e^{-\lambda\tau\sigma} dg(\sigma) \mid g(\sigma) \in G(c_1, \ldots, c_m) \right\}. \quad (5)$$

Таким чином, отримана класична задача робастної стійкості сімейств квазіполіномів з непараметричною невизначеністю.

Якщо функцію $g(\sigma)$ апроксимувати кусково-постійною функцією з невизначеними точками розриву або величинами стрибків в точках розриву, то застосовуються відомі методи аналізу робастної стійкості сімейств квазіполіномів з параметричною невизначеністю [10–13].

У загальному випадку застосовуються частотні критерії, які використовують поведінку амплітудно-фазової частотної характеристики [14, 15]: на заданій частоті значенням частотної характеристики на комплексній площині буде не точка, а деяка множина – область значень сімейства характеристичних квазіполіномів (value set). При дослідженні робастної стійкості САУ визначення такої області відіграє ключову роль.

У випадку, коли відомі точні рівняння границь множини значень сімейства P_c, можна сформулювати теореми про стійкості типу В.Л. Харитонова в термінах граничних однопараметричних сімейств квазіполіномів (edge theorem).

3. Основний результат

Розглянемо сімейство квазіполіномів з непараметричною невизначеністю (5) і визначимо частотну множину значень цього сімейства:

$$Z_c(\omega) = \{ f(i\omega) \mid f(\lambda) \in P_c \}.$$

Позначимо через ω^* максимальний додатний корінь рівняння $|p_0(i\omega)| - |p_1(i\omega)| = 0$. Вважаємо, що число ω^* існує, інакше всі квазіполіноми сімейства P_c будуть або стійкими, або нестійкими, в залежності від того, чи буде стійким поліном $p_0(\lambda) + p_1(\lambda)$.

Лема 1. Всі квазіполіноми сімейства P_c стійкі тоді і тільки тоді, коли стійкий хоча б один квазіполіном $f_0(\lambda) \in P_c$ і множина $Z_c(\omega)$ не містить нуля при $\omega \in [0, \omega^*]$.

Доказ випливає із принципу виключення нуля [15].

Дамо аналітичний опис множини $Z_c(\omega)$, для чого покладемо:

$$J_g(\varphi) = \int_0^1 e^{-i\varphi\sigma} dg(\sigma).$$

Лема 2. При кожному фіксованому $\varphi \in [0, 2\pi]$ точки $\eta = J_g(\varphi)$, де функція розподілу $g(\sigma)$ пробігає множину $G(c_1, \ldots, c_m)$, заповнюють замкнуту опуклу множину площини комплексної змінної η. Дуги кривих, які обмежують цю множину, задаються параметричними рівняннями:

$$\eta = \left\{ \int_0^1 e^{-i\varphi\sigma} d\overline{g}_\xi(\sigma) \mid \xi \in I_1 \right\}; \qquad \eta = \left\{ \int_0^1 e^{-i\varphi\sigma} d\overline{\overline{g}}_\xi(\sigma) \mid \xi \in I_2 \right\},$$

де $\overline{g}_\xi(\sigma)$, $\overline{\overline{g}}_\xi(\sigma)$ – нижнє та верхнє канонічні розподіли степеневої проблеми моментів [7]; $I_1 \subset [0, 1]$, $I_2 \subset [0, 1]$ – відрізки, які визначаються послідовністю $c_0, \ldots, c_m$.

Докази тверджень, які наводяться, зібрані в додатку.

Таким чином, множина $Z_c(\omega)$ отримується з множини $\{J_g(\omega\tau) \mid g \in G_c(c_1, \ldots, c_m)\}$ в результаті застосування операцій зміщення, повороту, розтягу (стиску), які визначаються функціями $p_0(i\omega)$, $\arg p_1(i\omega)$, $|p_1(i\omega)|$ відповідно.

Теорема 1. Нехай $\tau < \dfrac{2\pi}{\omega^*}$. Тоді всі квазіполіноми сімейства P_c стійкі в тому і тільки в тому випадку, коли стійкі квазіполіноми наступних двох однопараметричних сімейств:

$$P_c^{(1)} = \left\{ p_0(\lambda) + p_1(\lambda) \cdot \int_0^1 e^{-\lambda\tau\sigma} d\overline{g}_\xi(\sigma) \mid \xi \in I_1 \right\};$$

$$P_c^{(2)} = \left\{ p_0(\lambda) + p_1(\lambda) \cdot \int_0^1 e^{-\lambda\tau\sigma} d\overline{\overline{g}}_\xi(\sigma) \mid \xi \in I_2 \right\},$$

де розподіли $\overline{g}_\xi(\sigma)$, $\overline{\overline{g}}_\xi(\sigma)$ та відрізки I_1, I_2 визначаються, як у лемі 2.

Існує ряд способів побудови нижнього та верхнього канонічних розподілів і відрізків I_1, I_2. Дотримуючись [7], наведемо один з них.

Функції $\overline{g}_\xi(\sigma)$, $\overline{\overline{g}}_\xi(\sigma)$ є кусково-постійними. Точки розриву цих функцій співпадають з нулями поліномів $Q_\xi^{(1)}(\sigma)$, $Q_\xi^{(2)}(\sigma)$, які будуть побудовані далі. Величини стрибків в точках розриву визначаються з системи лінійних рівнянь, яку отримано з моментних співвідношень (4).

Також будуть побудовані рівняння, перші корені яких є граничними точками відрізків I_1, I_2.

Перейдемо до побудови поліномів $Q_\xi^{(1)}(\sigma)$, $Q_\xi^{(2)}(\sigma)$.

Розглянемо спочатку випадок парного $m = 2\nu$ ($\nu > 0$).

Побудуємо ортонормовану систему функцій $D_0(\sigma)$, ..., $D_\nu(\sigma)$ відносно розподілу $g(\sigma)$, тобто

$$\int_0^1 D_j(\sigma) D_k(\sigma) dg(\sigma) = \delta_{jk}, \quad j,\ k = 0,\ \ldots,\ \nu \ (\delta_{jk} \text{ – символ Кронекера}).$$

Визначимо:

$$\Delta_0 = c_0 = 1;\ \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & c_1 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix};\ \ldots;\ \ \Delta_\nu = \begin{vmatrix} 1 & c_1 & \ldots & c_\nu \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_\nu & c_{\nu+1} & \ldots & c_{2\nu} \end{vmatrix}.$$

Тоді:

$$D_0(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_0}} = 1;\ \ D_1(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_1 \cdot \Delta_0}} \cdot \begin{vmatrix} c_0 & 1 \\ c_1 & \sigma \end{vmatrix} = \frac{\sigma - c_1}{\sqrt{c_2 - c_1^2}};\ \ldots;$$

$$D_\nu(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_\nu \cdot \Delta_{\nu-1}}} \cdot \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \ldots & c_{\nu-1} & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_\nu & c_{\nu+1} & \ldots & c_{2\nu-1} & \sigma^\nu \end{vmatrix}.$$

Також визначимо «максимальну масу» [7]:

$$\rho_1(\xi) = \frac{1}{\sum_{j=0}^{\nu} D_j^2(\xi)}.$$

Потім побудуємо ортонормовану систему функцій $\mathrm{E}_0(\sigma)$, ..., $\mathrm{E}_{\nu-1}(\sigma)$ відносно розподілу $g(\sigma)$ з вагою $\sigma(1-\sigma)$, тобто

$$\int_0^1 \sigma(1-\sigma)\mathrm{E}_j(\sigma) \cdot \mathrm{E}_k(\sigma) dg(\sigma) = \delta_{jk},\ \ j,k\ =\ 0,\ \ldots,\ \nu - 1.$$

Покладемо:

$$\Delta_0' = c_0',\ \ \Delta_1' = \begin{vmatrix} c_0' & c_1' \\ c_1' & c_2' \end{vmatrix};\ \ldots;\ \ \Delta_{\nu-1}' = \begin{vmatrix} c_0' & \ldots & c_{\nu-1}' \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{\nu-1}' & \ldots & c_{2\nu-2}' \end{vmatrix},$$

де $c_j' = c_{j+1} - c_{j+2}$, $j = 0, \ldots, 2\nu - 2$.

Тоді

$$\mathrm{E}_0(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{c_0'}}=\frac{1}{\sqrt{c_1-c_2}};\ \ \mathrm{E}_1(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{\Delta_1'\Delta_0'}}\cdot\begin{vmatrix}c_0' & 1\\ c_1' & \sigma\end{vmatrix}=\frac{(c_1-c_2)\sigma-(c_2-c_3)}{\sqrt{(c_1-c_2)(c_3-c_4-(c_2-c_3)^2)}};\ \ldots;$$

$$\mathrm{E}_{\nu-1}(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{\Delta_{\nu-1}'\cdot\Delta_{\nu-2}'}}\cdot\begin{vmatrix}c_0' & c_1' & \ldots & c_{\nu-1}' & 1\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ c_{\nu-1}' & c_\nu' & \ldots & c_{2\nu-1}' & \sigma^{\nu-1}\end{vmatrix}.$$

«Максимальна маса»:

$$\rho_2(\xi)=\frac{1}{\xi(1-\xi)\cdot\sum\limits_{j=0}^{\nu-1}\mathrm{E}_j^2(\sigma)}.$$

Шукані однопараметричні сімейства поліномів:

$$Q_\xi^{(1)}(\sigma)=(\sigma-\xi)\cdot\sum_{j=0}^{\nu}D_j(\xi)\cdot D_j(\sigma)\quad \text{при } \rho_1(\xi)\le\rho_2(\xi);$$

$$Q_\xi^{(2)}(\sigma)=(\sigma-\xi)(1-\sigma)\cdot\sum_{j=0}^{\nu-1}\mathrm{E}_j(\xi)\cdot\mathrm{E}_j(\sigma)\quad \text{при } \rho_1(\xi)>\rho_2(\xi).$$

Позначимо через ξ, $\sigma_1(\xi)$, ..., $\sigma_\nu(\xi)$ прості корені поліному $Q_\xi^{(1)}(\sigma)$. Величини стрибків функції $\overline{g}_\xi(\sigma)$ в точках розриву, очевидно, визначаються з системи:

$$\begin{cases}\rho_0+\rho_1+\ldots+\rho_\nu=1,\\ \rho_0\xi+\rho_1\sigma_1+\ldots+\rho_\nu\sigma_\nu=c_1,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \rho_0\xi^\nu+\rho_1\sigma_1^\nu+\ldots+\rho_\nu\sigma_\nu^\nu=c_\nu.\end{cases}\tag{6}$$

Примітка. Всі точки розриву функції $\overline{g}_\xi(\sigma)$ є внутрішніми щодо відрізка [0, 1].

Аналогічно будується верхній канонічний розподіл. Функція $\overline{\overline{g}}_\xi(\sigma)$ має $\nu+2$ (чи $\nu+1$) точок росту, причому ці точки обов'язково присутні в граничних точках відрізка [0, 1] (в одній із граничних точок). Величини стрибків в точках розриву визначаються із системи лінійних рівнянь, аналогічних (6).

Згідно з теорією руху мас канонічних представлень моментних послідовностей [7, с. 125], параметр ξ у визначенні функції $\overline{g}_\xi(\sigma)$ змінюється на множині $[0,\ \xi_1]$, де ξ_1 – перший корінь рівняння:

$$\rho_1(\xi)=\rho_2(\xi).\tag{7}$$

Аналогічно маємо для функції $\overline{\overline{g}}_\xi(\sigma):\xi\in[\underline{\xi}_1,\overline{\xi}_1]$, де $\overline{\xi}_1$ – другий корінь рівняння (7).

Нехай тепер $m = 2\nu - 1$ – непарне число.

Побудуємо ортонормовану систему функцій $F_0(\sigma)$, ..., $F_{\nu-1}(\sigma)$ відносно розподілу $g(\sigma)$ з вагою σ, тобто

$$\int_0^1\sigma F_j(\sigma)F_k(\sigma)dg(\sigma)=\delta_{jk},\quad j,k=0,\ldots,\nu-1.$$

Визначимо:

$$\widetilde{\Delta}_0=\widetilde{c}_0;\ \ \widetilde{\Delta}_1=\begin{vmatrix}\widetilde{c}_0 & \widetilde{c}_1\\ \widetilde{c}_1 & \widetilde{c}_2\end{vmatrix};\ \ldots;\ \widetilde{\Delta}_{\nu-1}=\begin{vmatrix}\widetilde{c}_0 & \ldots & \widetilde{c}_{\nu-1}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \widetilde{c}_{\nu-1} & \ldots & \widetilde{c}_{2\nu-2}\end{vmatrix},$$

де $\widetilde{c}_j=c_{j+1}$, $j=0,\ \ldots,\ 2\nu-2$.

Тоді:

$$F_0(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{\widetilde{\Delta}_0}}=\frac{1}{\sqrt{c_1}};\quad F_1(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{\widetilde{\Delta}_1\widetilde{\Delta}_0}}\cdot\begin{vmatrix}\widetilde{c}_0 & 1\\ \widetilde{c}_1 & \sigma\end{vmatrix}=\frac{\sigma c_1-c_2}{\sqrt{c_1(c_1c_3-c_2^2)}};\ \ldots;$$

$$F_{\nu-1}(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{\widetilde{\Delta}_{\nu-1}\cdot\widetilde{\Delta}_{\nu-2}}}\cdot\begin{vmatrix}\widetilde{c}_0 & \widetilde{c}_1 & \dots & \widetilde{c}_{\nu-1} & 1\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \widetilde{c}_{\nu-1} & \widetilde{c}_\nu & \dots & \widetilde{c}_{2\nu-1} & \sigma^{\nu-1}\end{vmatrix}.$$

Визначимо «максимальну масу»:

$$\rho_1(\xi)=\frac{1}{\xi\cdot\sum\limits_{j=0}^{\nu-1}F_j^2(\xi)}.$$

Аналогічно будується ортонормована відносно розподілу $g(\sigma)$ з вагою $(1-\sigma)$ система $G_0(\sigma)$, ..., $G_{\nu-1}(\sigma)$, тобто

$$\int\limits_0^1(1-\sigma)G_j(\sigma)\cdot G_k(\sigma)dg(\sigma)=\delta_{jk},\quad j,k=0,\dots,\nu-1.$$

У цьому випадку:

$$\widetilde{\Delta}'_0=\widetilde{c}'_0;\quad \widetilde{\Delta}'_1=\begin{vmatrix}\widetilde{c}'_0 & \widetilde{c}'_1\\ \widetilde{c}'_1 & \widetilde{c}'_2\end{vmatrix};\ \dots;\ \widetilde{\Delta}'_{\nu-1}=\begin{vmatrix}\widetilde{c}'_0 & \dots & \widetilde{c}'_{\nu-1}\\ \dots & \dots & \dots\\ \widetilde{c}'_{\nu-1} & \dots & \widetilde{c}'_{2\nu-2}\end{vmatrix},$$

де $\widetilde{c}'_j=c_j-c_{j+1},\ j=0,\dots,2\nu-2$.

Тоді

$$G_0(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{\widetilde{\Delta}'_0}}=\frac{1}{\sqrt{1-c_1}},\ G_1(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{\widetilde{\Delta}'_1\widetilde{\Delta}'_0}}\cdot\begin{vmatrix}\widetilde{c}'_0 & 1\\ \widetilde{c}'_1 & \sigma\end{vmatrix}==\frac{\sigma(1-c_1)-(c_1-c_2)}{\sqrt{(1-c_1)((1-c_1)(c_2-c_3)-(c_1-c_2)^2)}},\dots,$$

$$G_{\nu-1}(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{\widetilde{\Delta}'_{\nu-1}\cdot\widetilde{\Delta}'_{\nu-2}}}\cdot\begin{vmatrix}\widetilde{c}'_0 & \dots & \widetilde{c}'_{\nu-1} & 1\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \widetilde{c}'_{\nu-1} & \dots & \widetilde{c}'_{2\nu-1} & \sigma^{\nu-1}\end{vmatrix},$$

та

$$\rho_2(\xi)=\frac{1}{(1-\xi)\cdot\sum\limits_{j=0}^{\nu-1}G_j^2(\xi)}.$$

Однопараметричні сімейства поліномів, прості корені яких визначають точки розриву функцій $\overline{g}_\xi(\sigma)$, $\overline{\overline{g}}_\xi(\sigma)$, що відповідають нижньому та верхньому канонічним розподілам, мають вигляд:

$$Q_\xi^{(1)}(\sigma)=\sigma(\sigma-\xi)\cdot\sum_{j=0}^{\nu-1}F_j(\xi)\cdot F_j(\sigma)\quad\text{при}\quad \rho_1(\xi)\le\rho_2(\xi);$$

$$Q_\xi^{(2)}(\sigma)=(\sigma-\xi)(1-\sigma)\cdot\sum_{j=0}^{\nu-1}G_j(\xi)\cdot G_j(\sigma)\quad\text{при}\quad \rho_1(\xi)>\rho_2(\xi).$$

Величини стрибків в точках розриву визначаються з системи, аналогічної (6).

Відмітимо, що число точок розриву функції $\overline{g}_\xi(\sigma)$ у загальному випадку рівне $\nu+1$, причому така точка наявна в нулі (при $\xi=\xi_1$ величина стрибка в нулі рівна нулю). Для функції $\overline{\overline{g}}_\xi(\sigma)$ число точок розриву таке ж, але одна з точок наявна в одиниці (при $\xi=\xi_1$ величина стрибка в одиниці рівна нулю).

Для сімейства функцій $\overline{g}_\xi(\sigma)$ параметр ξ змінюється на множині $[\underline{\xi}_1,\overline{\xi}_1]$, для $\overline{\overline{g}}_\xi(\sigma)$ – на множині $\xi\in[0,\ \xi_1]$.

Умови стійкості квазіполіномів сімейств $P_c^{(1)}$, $P_c^{(2)}$ випливають з принципу виключення нуля.

Нехай

$$P_c^{(j)}=\{F_j(\lambda,\tau,\xi)\mid\xi\in I_j\},\ \ j=1,2.$$

Лема 3. Для того щоб всі квазіполіноми сімейства $P_c^{(j)}$ були стійкими, необхідно і достатньо, щоб був стійким квазіполіном $F_j(\lambda,\ \tau,\ \xi_1)$ і виконувалась умова:

$$\min_{\substack{\xi\in I_j\\ \omega\in[0,\omega^*]}} \left|F_j(i\omega,\tau,\xi)\right| > 0 \quad (j = 1,\, 2).$$

Зауваження. Очевидно, квазіполіноми $F_1(\lambda, \tau, \xi_1)$ та $F_2(\lambda, \tau, \xi_1)$ співпадають.

Наслідок. Для того, щоб всі квазіполіноми сімейства

$$\left\{p_0(\lambda) + p_1(\lambda)\cdot\int_0^1 e^{-\lambda\theta\sigma}dg(\sigma) \mid g(\sigma)\in G(c_1,\dots,c_m),\, \theta\in[0,\tau]\right\}$$

були стійкими, необхідне і достатнє виконання двох умов:

а) всі квазіполіноми сімейства $\{F_1(\lambda,\theta,\underline{\xi}_1) \mid \theta\in[0,\tau]$ – стійкі;

б) $\min\left|F_j(i\omega,\theta,\xi)\right| > 0$, де мінімум береться з множини $\{(\omega,\theta,\xi)\in[0,\omega^*]\times[0,\tau]\times I_j\}$ $(j = 1,\, 2)$.

4. Реберні теореми для ланок з малим порядком астатизму.

Наведемо явний вигляд сімейств $P_c^{(1)}$, $P_c^{(2)}$ для $m = 0,\, 1,\, 2$.

У випадку $m = 0$ сімейства $P_c^{(1)}$, $P_c^{(2)}$ отримуються з теореми Рісса про представлення замкнутої опуклої оболонки [16]:

$$P_c^{(1)} = \{p_0(\lambda) + p_1(\lambda)\cdot e^{-\lambda\tau\xi} \mid \xi\in[0,1]\};$$

$$P_c^{(2)} = \{p_0(\lambda) + p_1(\lambda)\cdot(1-\xi+\xi e^{-\lambda\tau}) \mid \xi\in[0,1]\}.$$

В [16] теорема 1 уточнена.

Для $m = 1$ сімейства $P_c^{(1)}$, $P_c^{(2)}$ побудовані [17] без використання результатів леми 2:

$$P_c^{(1)} = \left\{p_0(\lambda) + p_1(\lambda)\cdot(1-\frac{c_1}{\xi}+\frac{c_1}{\xi}e^{-\lambda\tau\xi}) \mid \xi\in[c_1,1]\right\};$$

$$P_c^{(2)} = \left\{p_0(\lambda) + p_1(\lambda)\cdot(\frac{1-c_1}{1-\xi}e^{-\lambda\tau\xi}+\frac{c_1-\xi}{1-\xi}e^{-\lambda\tau}) \mid \xi\in[0,c_1]\right\}.$$

Там же розглянуто випадок, коли $\tau > \dfrac{2\pi}{\omega^*}$.

Нехай $m = 2$ $(\nu = 1)$. Згідно з п. 3, будуємо

$$D_0(\sigma) = 1;\; D_1(\sigma) = \frac{\sigma - c_1}{\sqrt{c_2 - c_1^2}};\; \rho_1(\xi) = \frac{c_2 - c_1^2}{\xi^2 - 2c_1\xi + c_2};\; \mathrm{E}_0(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{c_1 - c_2}};\; \rho_2(\xi) = \frac{c_1 - c_2}{\xi(1-\xi)}.$$

Розглянемо рівняння $\rho_1(\xi) = \rho_2(\xi)$. Очевидно:

$$(c_1 - c_2)(\xi^2 - 2c_1\xi + c_2) - \xi(1 - \xi)(c_2 - c_1^2) = 0,$$

звідки

$$\xi^2 c_1(1 - c_1) - \xi(c_1^2 - 2c_1c_2 + c_2) + c_2(c_1 - c_2) = 0.$$

Корені цього рівняння:

$$\underline{\xi}_1 = \frac{c_1 - c_2}{1 - c_1};\quad \overline{\xi}_1 = \frac{c_2}{c_1}.$$

Отже,

$$I_1 = \left[0, \frac{c_1 - c_2}{1 - c_1}\right];\; I_2 = \left[\frac{c_1 - c_2}{1 - c_1}, \frac{c_2}{c_1}\right].$$

Знаходимо поліноми:

$$Q_\xi^{(1)}(\sigma) = (\sigma - \xi)\left(1 + \frac{(\sigma - c_1)(\xi - c_1)}{c_2 - c_1^2}\right) = \frac{\sigma - \xi}{c_2 - c_1^2}(\sigma(c_1 - \xi) + (\xi c_1 - c_2));$$

$$Q_\xi^{(2)}(\sigma) = \frac{1}{c_1 - c_2}\sigma\cdot(\sigma - \xi)(1 - \sigma).$$

Для функції $\overline{g}_\xi(\sigma)$ визначимо точки росту: ξ, $\sigma_1 = \dfrac{c_2 - c_1\xi}{c_1 - \xi}$. Величини стрибків ρ_0, ρ_1 в цих точках знайдемо із системи:

$$\begin{cases} \rho_0 + \rho_1 = 1, \\ \rho_0 \xi + \rho_1 \dfrac{c_2 - c_1 \xi}{c_1 - \xi} = c_1, \end{cases}$$

тобто

$$\rho_1 = \frac{c_1 - c_1^2}{(c_1 - \xi)^2 + (c_2 - c_1^2)}; \quad \rho_2 = \frac{(c_1 - \xi)^2}{(c_1 - \xi)^2 + (c_2 - c_1^2)}.$$

Аналогічно для $\overset{=}{g}_{\xi}(\sigma)$: $\sigma_0 = 0$, ξ, $\sigma_1 = 1$ – точки росту, і величини стрибків ρ_0, ρ_ξ, ρ_1 визначаються з системи:

$$\begin{cases} \rho_0 + \rho_\xi + \rho_1 = 1, \\ \rho_\xi \xi + \rho_2 = c_1, \\ \rho_\xi \xi^2 + \rho_2 = c_2. \end{cases}$$

Звідси:

$$\rho_0 = 1 - c_1 - \frac{c_1 - c_2}{\xi}; \quad \rho_\xi = \frac{c_1 - c_2}{\xi(1-\xi)}; \quad \rho_1 = \frac{c_2 - c_1 \xi}{1 - \xi}.$$

Таким чином, отримана теорема.

Теорема 2. Всі квазіполіноми сімейства

$$\left\{ p_0(\lambda) + p_1(\lambda) \cdot \int_0^1 e^{-\lambda \tau \sigma} dg(\sigma) \mid g(\sigma) \in G(c_1, c_2) \right\} \quad \left(\tau < \frac{2\pi}{\omega^*} \right)$$

стійкі тоді і тільки тоді, коли стійкі всі квазіполіноми наступних двох однопараметричних сімейств:

$$P_c^{(1)} = \left\{ p_0(\lambda) + p_1(\lambda) \cdot \left(\frac{c_2 - c_1^2}{(c_1 - \xi)^2 + (c_2 - c_1^2)} e^{-\lambda \tau \xi} + \frac{(c_1 - \xi)^2}{(c_1 - \xi)^2 + (c_2 - c_1^2)} e^{-\lambda \tau \frac{c_2 - c_1 \xi}{c_1 - \xi}} \right) \middle| \ \xi \in \left[0, \frac{c_1 - c_2}{1 - c_1} \right] \right\};$$

$$P_c^{(2)} = \left\{ p_0(\lambda) + p_1(\lambda) \cdot \left((1 - c_1) - \frac{c_1 - c_2}{\xi} + \frac{c_1 - c_2}{\xi(1-\xi)} e^{-\lambda \tau \xi} + \frac{c_2 - c_1 \xi}{1 - \xi} e^{-\lambda \tau} \right) \middle| \ \xi \in \left[\frac{c_1 - c_2}{1 - c_1}, \frac{c_2}{c_1} \right] \right\}.$$

Зауваження. Квазіполіном

$$F_1(\lambda, \tau, \underline{\xi}_1) = p_0(\lambda) + p_1(\lambda) \left(\frac{(1 - c_1)^2}{1 - 2c_1 + c_2} e^{-\lambda \tau \frac{c_1 - c_2}{1 - c_1}} + \frac{c_2 - c_1^2}{1 - 2c_1 + c_2} e^{-\lambda \tau} \right).$$

5. Принципи робастного моделювання

У [5] проведений аналіз методу непараметричної ідентифікації лінійних об'єктів, вхід і вихід яких пов'язані співвідношенням (2). Зокрема відмічено, що функція $g_m^*(\sigma)$, яка є оцінкою вагової функції $g(\sigma)$, може суттєво відрізнятися від самої функції $g(\sigma)$ навіть у випадку великого порядку астатизму, тобто числа m.

Відмітимо, однак, що для нескінченної позитивної моментної послідовності $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ функція $g(\sigma)$, яка задовольняє співвідношення

$$\begin{cases} \int_0^1 \sigma^j dg(\sigma) = c_j; \\ j = 0, 1, \ldots, \end{cases}$$

визначається єдиним чином, тобто $g_m^* \underset{m \to \infty}{\to} g(\sigma)$. Отже, виникає проблема оцінки числа $m + 1$ моментних співвідношень (4), які дозволять апроксимувати вагову функцію з потрібним ступенем точності для даної задачі.

Розглянемо цю проблему у зв'язку із задачею стійкості САУ з характеристичним квазіполіномом:

$$f(\lambda) = p_0(\lambda) + p_1(\lambda) \cdot \int_0^1 e^{-\lambda \tau \sigma} dg(\sigma).$$

Згідно з принципом виключення нуля, ключову роль у розв'язку задачі стійкості відіграє множина значень сімейства квазіполіномів:

$$\{f(i\omega)\mid g(\sigma)\in G(c_1,\ldots,c_m)\}. \tag{8}$$

Рівняння границь множини (8) визначені у лемі 2. Для побудови множин

$$\left\{J_g(\varphi)\mid \int_0^1 dg(\sigma)=\int_0^1 |\,dg(\sigma)\,|=1\right\};$$

$$\{J_g(\varphi)\mid \quad g(\sigma)\in G(c_1)\};$$

$$\{J_g(\varphi)\mid \quad g(\sigma)\in G(c_1,c_2)\},$$

скористаємося пакетом символьних обчислень MAPLE V (рис. 3).

Рис. 3 є типовим для будь-яких c_1, c_2, φ ($0 < c_1^2 \le c_2 \le c_1 < 1$, $\varphi \in [0, 2\pi]$) і дозволяє замітити, як звужується множина $\{J_g(\varphi) \mid g(\sigma) \in G(c_1, \ldots, c_m)\}$ із зростанням m. При $m \to \infty$ ця множина вироджується в точку. Для багатьох задач уже при $m = 2$ умови робастної стійкості є допустимими. Для $m > 2$ рівняння границь множини (8) є дуже громіздкими, а при $m > 4$ їх визначення можливе, взагалі кажучи, лише чисельно. Крім того, для $m > 2$ аналіз стійкості квазіполіному $F_1(\lambda, \tau, \xi_1)$ із леми 3 є дуже непростою задачею.

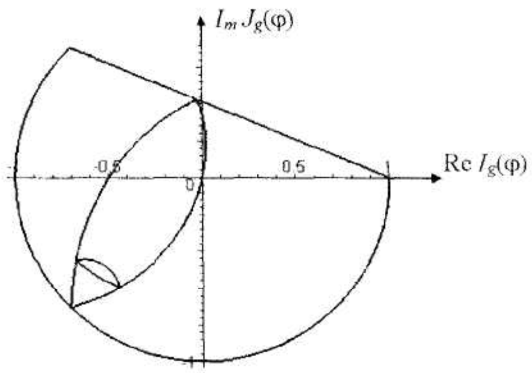

Рис. 3. Множина $J_g(\varphi)$ при $c_1 = 0{,}6$, $c_2 = 0{,}5$, $\varphi = \dfrac{5\pi}{4}$ для різних сімейств вагових функцій $g(\sigma)$

Із вищесказаного витікає висновок, який сформулюємо у вигляді двох принципів робастного моделювання.

Принцип невизначеності: чим точніше ідентифікована САУ, тим складніший аналіз її властивостей.

Принцип загрублення: доцільно не тільки не уточнювати структуру і параметри системи, а й навпаки, вихідну систему необхідно зробити грубою, відносячи її до більш широкого класу систем.

Зокрема, при ідентифікації блоку запізнювання доцільно обмежуватися випадком $m \in \{1, 2, 3\}$.

Як приклад застосування принципів робастного моделювання розглянемо САУ, структурна схема якої зображена на рис. 1, 2, а характеристичний квазіполіном має вигляд:

$$f(\lambda)=p_0(\lambda)+p_1(\lambda)\left(\gamma_0+\sum_{j=1}^{k}\gamma_j e^{-\lambda\tau\sigma_j}\right). \tag{9}$$

Вважаємо, що $\tau < \dfrac{2\pi}{\omega^*}$, де, як і раніше, ω^* – максимальний корінь рівняння $|p_0(i\omega)|^2 - |p_1(i\omega)|^2 = 0$, а параметри $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_m, \sigma_1, \ldots, \sigma_m$ відомі точно.

Згідно з принципом загрублення, визначимо величини:

$$\Gamma=\gamma_0+\sum_{j=1}^{k}\gamma_i\,; \quad c_s=\frac{1}{\Gamma}\cdot\sum_{j=1}^{k}\sigma_j^s\cdot\gamma_j, \quad s=1,\ldots,m\,,\ m\le k.$$

Замість квазіполіному (9) розглянемо сімейство квазіполіномів:

$$\left\{ p_0(\lambda) + \Gamma \cdot p_1(\lambda) \cdot \int_0^1 e^{-\lambda\tau\sigma} dg(\sigma) \mid g(\sigma) \in G(c_1, ..., c_m) \right\}.$$

Необхідні та достатні умови стійкості квазіполіномів цього сімейства даються теоремою 1 та лемою 3. Ці умови є достатніми для стійкості квазіполіному (9). Як відмічалось вище, доцільно обмежуватися випадком $m = 2$.

Закінчення

Розглянута одна із основних задач моделювання САУ – задача робастної стійкості. При цьому припускалось, що вихідна система має особливості вимірювань вхідних і вихідних сигналів лінійного елементf запізнювання у ланці зворотного зв'язку. Ця задача зведена до аналізу стійкості сімейства квазіполіномів із непараметричною невизначеністю, яка залежить від $m + 1$ моментного співвідношення. Запропонований ефективний алгоритм розв'язку, який полягає в перевірці стійкості всього двох однопараметричних сімейств квазіполіномів, яким би не було число m.

Відмічено також, що для багатьох САУ виявляються прийнятними достатні умови стійкості, отримані без врахування моментів, які мають порядок вищий третього.

Додаток

Доведення леми 2. Для доведення подамо формулювання допоміжного твердження, яке є наслідком теореми [7, с. 194].

Твердження. Якщо системи функцій $\{u_0(t), ..., u_m(t)\}$ та $\{u_0(t), , u_m(t), v_1(t), v_2(t)\}$ є системами Чебишева на $[0, 1]$, а послідовність $\{c_k\}_{k=0}^m$ строго позитивна відносно першої з них, то множина

$$\Gamma = \left\{ \left(\gamma_1 = \int_0^1 v_1(\sigma) dg(\sigma), \quad \gamma_2 = \int_0^1 v_2(\sigma) dg(\sigma) \right) \middle| \int_0^1 u_j(\sigma) dg(\sigma) = c_j, \quad j = 0, ..., m \right\}$$

є замкнутим обмеженим тілом, причому $(\gamma_1, \gamma_2) \in \partial\Gamma$ ($\partial\Gamma$ – границя Γ) тоді і тільки тоді, коли в представленні $\int_0^1 u_j(\sigma) dg(\sigma) = c_j$ $(j = 0, ..., m)$ функція $g(\sigma)$ відповідає канонічному розподілу.

Тепер для доведення леми залишається відмітити, що системи $\{1, t, ..., t^m\}$ та $\{1, t, ..., t^m, \cos\varphi t, \sin\varphi t\}$ є системами Чебишева на $[0, 1]$ при $\varphi \in (0, 2\pi)$. Дійсно, рівняння $b_1\cos x + b_2\sin x = 1$ має не більше двох коренів на відрізку $x \in [0, 2\pi]$ при будь-яких коефіцієнтах b_1, b_2. Тоді з теореми Ролля випливає, що узагальнений поліном $P(t) = 1 + \sum_{j=1}^m a_j t^j + b_1 \cos\varphi t + b_2 \sin\varphi t$ має не більше $m + 2$ нулі на $[0, 1]$ при $\varphi \in (0, 2\pi)$.

Доведення теореми 1.

Необхідність очевидна в силу включень $P_c^{(1)} \subset P_c$, $P_c^{(2)} \subset P_c$.

Достатність. Перша умова леми 1 виконана, оскільки в сімействі P_c стійкий кожен квазіполіном, який визначається канонічним розподілом $g(\sigma)$.

Наведемо виконання другої умови. Маємо: $\left| \int_0^1 e^{-i\omega\tau\sigma} dg(\sigma) \right| \le 1$ та $|p_0(i\omega)| > |p_1(i\omega)|$ при достатньо великих значеннях величини $|\omega|$. Отже, $0 \notin Z_c(\omega)$ при $\omega > \omega^*$. Якщо $0 \in Z_c(\omega_1)$ при деякому $\omega_1 \in [0, \omega^*]$, то $0 \in \partial Z_c(\omega_2)$, де $\omega_2 \in [0, \omega^*]$.

З леми 2 останнє включення означає, що в сімействі $P_c^{(1)}$ чи $P_c^{(2)}$ знайдеться квазіполіном з суто уявними нулями $\pm i\omega_2$. Протиріччя доводить теорему.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. – М.: Мир, 1967.
2. *Зубов В.И.* К теории линейных стационарных систем с запаздывающим аргументом //

Изв. вузов. Мат. – 1958. – № 6. – С. 86–95.

3. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989.

4. *Эйкхофф П.* Основы идентификации систем управления. – М.: Мир. 1975.

5. *Кнеллер Д.В., Пащенко Ф.Ф.* Непараметрическая идентификация стационарного объекта на основе метода L-проблемы моментов // А и Т. – 1994. – № 1. – С. 81–90.

6. *Андреев Н.И.* Корреляционная теория статистически оптимальных систем. – М.: Наука, 1966.

7. *Крейн М.Г., Нудельман А.А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1973.

8. *Понтрягин Л.С.* О нулях некоторых элементарных трансцендентных функций // Изв. АН СССР. Сер. Мат. – 1942. – Т. 6. – С. 115–134.

9. *Чеботарев Н.Г., Мейман Н.Н.* Проблема Рауса-Гурвица для полиномов и целых функций // Тр. мат. ин-та им. В.А. Стеклова. Т. 26. – М., 1949.

10. *Неймарк Ю.И.* Робастная устойчивость и D-разбиение // А и Т. – 1992. – № 7. – С. 10–18.

11. *Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З.* Робастная устойчивость линейных систем // Итоги науки и техники. Сер. техн. кибернетика. – М.: ВИНИТИ, 1991. – Т. 25. – С. 3–31.

12. *Fu M., Olbrot A.M., Polis M.P.* Robust stability for time-delay systems: the edge theorem and graphical test // IEEE Trans., 1989. – V. AC. – 34, № 8. – P. 813–820.

13. *Жабко А.П., Харитонов В.Л.* Методы линейной алгебры в задачах управления. – СПб.: Изд. СПб. ун-та, 1993.

14. *Горовиц А.М.* Синтез систем с обратной связью. – М.: Сов. радио, 1970.

15. *Barmish B.P., Shi Z.* Robust stability of perturbed systems with time-delay // Automatica, 1989. – V. 25. – P. 371–381.

16. *Dmitrishin D.V.* Robust stability of some system with time delay // Proc. of the 11th IFAC Workshop CAO-2000, St. Petersburg, Russia, 3-6 July 2000. – PERGAMON. – V. 2, – P. 443–446.

17. *Дмитришин Д.В.* Устойчивость систем управления с неполностью идентифицированным звеном обратной связи // Наук. праці УДАЗ ім. О.С. Попова: період. наук. зб. з радіотехніки, електроніки та економіки в галузі зв'язку. – Одеса, 2001. – № 1. – С. 60–66.

18. *Харитонов В.Л.* К определению максимально допустимого запаздывания в задачах стабилизации // Дифференциальные уравнения. – 1982. – Т. 18. – № 4. – С. 723–724.

ДМИТРИШИН Дмитро Володимирович – кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики Одеського національного політехнічного університету.

Наукові інтереси:
- робастні системи;
- стійкість систем із запізнюванням;
- робастна стабілізація.

Подано 13.12.2001